Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

ЭКОНОМИКА ФИРМЫ: ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебное пособие

ПОЛИТЕХ-ПРЕСС
Санкт-Петербургский
политехнический университет
Петра Великого

Санкт-Петербург
2019

УДК 338.45(075.8)
ББК 65.301я73
Э40

Рецензенты:

Доктор экономических наук, профессор, профессор факультета Технологического менеджмента и инноваций Санкт-Петербургского национального исследовательского университета информационных технологий, механики и оптики *Е. Л. Богданова*

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа Российского государственного педегогического университета им. А. И. Герцена *М. Я. Якубсон*

Авторы:

П. А. Аркин, К. А. Соловейчик, С. В. Салкуцан, В. В. Щеголев, А. С. Лавров, К. Г. Аркина

Экономика фирмы: теория вероятностей : учеб. пособие / П. А. Аркин [и др.] ; под ред. П. А. Аркина. – СПб. : ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2019. – 138 с.

Соответствует содержанию блока 1 структуры программы магистратуры федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 27.04.06 «Организация и управление наукоемкими производствами (уровень магистратуры)», утвержденного приказом Минобрнауки России от 30.03.2015 № 305 «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 27.04.06 "Организация и управление наукоемкими производствами (уровень магистратуры)" (зарегистрировано в Минюсте России 15.04.2015 № 36851).

Научная специальность 08.00.05 «Экономика и управление народным хозяйством».

Пособие имеет учебно-методическое назначение и предназначено для изучения студентами материала раздела «Вероятностные экономические величины» дисциплины учебного плана «Экономика фирмы». В пособии рассмотрены, в том числе на основании примеров в области экономики фирмы, основные методы теории вероятностей: случайные события и их вероятности, условная вероятность и последовательные испытания, независимые события, независимые испытания и схема Бернулли, дискретные случайные величины, функция распределения вероятностей, непрерывные случайные величины, равномерное, нормальное и показательное распределения непрерывных случайных величин.

Табл. 31. Ил. 17. Библиогр.: 8.

Печатается по решению
Совета по издательской деятельности Ученого совета
Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого

ISBN 978-5-7422-6522-1

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Целью издания данного учебного пособия является публикация методического материала, непосредственно связанного с дисциплинами учебного плана уровня магистратуры, в которых используется математический аппарат теории вероятностей. В пособии изложены основы теории вероятностей в возможно более доступной для студентов нематематических направлений подготовки форме. Пособие содержит основные теоретические сведения, необходимые для решения задач по теории вероятностей. Приведенная теория иллюстрируется большим количеством задач, в том числе в области экономики фирмы, с подробным ходом решения. Также предлагается набор задач с ответами для решения и самопроверки. В конце учебного пособия содержится многовариантная индивидуальная домашняя работа по рассмотренным темам.

Пособие содержит основные разделы теории вероятностей, такие как случайные события и их вероятности, классическое и статистическое определение вероятности, геометрическое определение вероятности, вероятность суммы событий, условная вероятность и последовательные испытания, независимые события, полная вероятность и формула Байеса, независимые испытания и схема Бернулли, локальная и интегральная теоремы Муавра – Лапласа, предельная теорема Пуассона, дискретные случайные величины, числовые характеристики дискретных случайных величин, функция распределения вероятностей, непрерывные случайные величины, числовые характеристики непрерывных случайных величин, равномерное, нормальное и показательное распределения непрерывных случайных величин.

Пособие рекомендуется к использованию студентами уровня магистратуры направления подготовки 27.04.06 Организация и управление наукоемкими производствами Образовательной программы Процессы управления наукоемкими производствами как при изучении дисциплины Экономика фирмы в третьем семестре, так и дисциплины Экономика наукоемкого производства. Учебное пособие может быть также полезно студентам данного направления подготовки образовательной программы Технологическое лидерство и предпринимательство при изучении дисциплин Управление ростом нового наукоемкого предприятия и венчурный капитал; Финансы, оценка проектов и венчурный капитал, а также студентам магистратуры различных направлений подготовки при написании работ, в том числе выпускных квалификационных работ, связанных с обработкой статистического материала.

1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ И ИХ ВЕРОЯТНОСТИ.

Теория вероятностей – это наука о математических закономерностях случайных явлений. Речь идет о явлениях, наблюдения над которыми не всегда приводят к одним и тем же определенным результатам, но для которых при массовом повторении наблюдений проявляются закономерности в получении близких результатов. Опыт, эксперимент будем называть испытанием. Результат наблюдения (эксперимента) называют **случайным событием**. События обычно обозначают заглавными буквами латинского алфавита: A, B, C и т.д. Каждому случайному событию приписывается числовая характеристика P(A), называемая **вероятностью** этого события и оценивающая «степень случайности». Таким образом, осуществляется переход от реальных, «физических», явлений к их абстрактным математическим моделям («вероятностным» моделям). Построение вероятностных моделей и математический анализ закономерностей для P(A) составляют основное содержание теории вероятностей.

Классификация событий. Действия над событиями

Определение 1.1. Будем называть событие **достоверным,** если в результате испытания оно обязательно произойдет. Будем обозначать его буквой U.

Определение 1.2. Событие называется **невозможным**, если оно никогда не может произойти, при данном эксперименте.Оно обозначается буквой V.

Пример 1.1. Игральный кубик при подбрасывании обязательно упадет вниз – событие достоверное. Но выпадение 7 очков, при однократном бросании одной игральной кости – событие невозможное.

Определение 1.3. Событие, которое не будет достоверным или невозможным будем называть **случайным** событием.

Определение 1.4. Если появление одного события исключает появление другого, то говорят, что события **несовместны**.

Пример 1.2. При однократном броске игральной кости не может выпасть одновременно и 5 и 6 очков одновременно.

Допустим, что проводится некоторый эксперимент, и о его предполагаемом результате делается высказывание А. Например, если бросаются одновременно три монеты, то А может иметь вид: «из трех монет хотя бы одна упала гербом вверх». Составление высказываний подобного рода является первым этапом математического описания случайных событий. Причем понятие «событие произошло» отождествляется с истинностью высказывания А. Известно из курса математической логики, что над высказываниями можно определить операции дизъюнкции, конъюнкции, импликации и эквиваленции. Проделывая такие операции, будем получать словесные описания «сложных» событий на основе описания «простых». В теории вероятностей на этот счет принята следующая терминология. Если А и В – случайные события, то их суммой А + В, произведением АВ, разностью А-В называются события, состоящие соответственно в том, что «происходит А или В», «А и В», «А и не В».

Суммой событий $\boldsymbol{A + B}$ называется событие, которое заключается в том, что произошло хотя бы одно из событий A или B. Не исключается и появление обоих событий.

Произведением событий $\boldsymbol{AB}$ называется событие состоящее в том, что происходят и событие A и событие B.

Разностью событий A и B называется событие $\boldsymbol{A\text{-}B}$, состоящее в том, что событие A происходит, а событие B не происходит. Разности событий соответствует разность множеств.

Событие $\bar{A} = E–A$ называется событием, **противоположным** A. Оно состоит в том, что A не происходит.

Пример 1.3. Выпадение герба и цифры – противоположные события. Ясно, что $\mathrm{A} + \bar{\mathrm{A}} = \mathrm{U}$ и $\mathrm{A}\bar{\mathrm{A}} = \mathrm{V}$.

Определение 1.5. Пусть число результатов эксперимента конечно. Если они попарно несовместны и в результате эксперимента одно из них обязательно появится, то будем говорить, что они образуют **полную группу событий** Ω. К полной группе событий предъявляется требование **равновозможности** событий.

Классическое определение вероятности работает с равновозможными (равновероятными) событиями.

Понятие **равновозможных событий** не определяется, а лишь поясняется примерами. Для каждого из таких событий характерно то, что ни одно из них не является объективно более возможным, чем другие. В практической задаче исследователь сам решает, какие события считать равновозможными.

Задача 1.1. Монета бросается три раза. Событие А состоит в том, что ровно два раза выпал герб. Чему равна его вероятность?

Решение. Определим полную группу событий Ω в виде троек из букв г-«герб» и ц- «цифра». Ω = {(ггг), (ггц), (гцг), (цгг), (ццг), (цгц), (гцц), (ццц)}; А = {(ггц), (цгг), (гцг)}. Первый символ показывает, каков исход первого бросания монеты, второй – второго, третий – третьего. Если предположить, что восемь элементарных событий, составляющих полную группу Ω равновозможны, то вероятность А, вычисленная по классической схеме, равна 3/8.

Даже в таком простом примере не ясно, почему полная группа выбрана именно так, а не иначе. Можно предложить другой вариант.

Пусть Ω содержит только четыре элементарных события: число гербов из трех равно 0, 1, 2 или 3. Если предположить, что все четыре элементарных события равновозможны, то вероятность А будет равна 1/4. Таким образом, для разных моделей получаем разные оценки вероятности. Какая модель лучше описывает эксперимент?

В общем случае это довольно сложный вопрос, ответить на который помогает статистика (то есть обработка реальных экспериментальных данных). Если модель достоверно отражает закономерности реального эксперимента (адекватна ему), то относительные частоты, с которыми наблюдаются результаты этого эксперимента, при большом числе повторений эксперимента должны быть «близки» к вероятностям, рассчитанным с помощью модели.

В рассмотренном примере можно предложить логическое «тестирование» двух моделей. В качестве теста предлагается сравнить вероятности событий Х и У: Х – «все три монеты упали одинаковой стороной вверх»; У – «не все три монеты упали одинаковой стороной вверх».

Интуитивно ясно (и можно подтвердить на опытах), что событие Х менее вероятно, чем У. Первая модель адекватно отражает эту закономерность, тогда как во второй вероятности Х и У не равны.

Ответ. 3/8.

Пример 1.4. Полная группа событий при однократном броске игральной кости это выпадение 1,2,3,4,5 или 6 очков. Так при бросании игральной кости равновозможно появление любого количества очков от 1 до 6.

Определение 1.6. Если в результате наступления события А обязательно наступает событие В, то говорят, что событие А **благоприятно** для В.

Пример 1.5. Так события «выпадение 2 очков», «выпадение 4 очков», «выпадение 6 очков» являются благоприятствующими для события «выпадение чётного количества очков».

Пример 1.6. По мишени произведено три выстрела. Пусть событие A_0 состоит в том, что попаданий нет, событие A_1 – в том, что произошло одно попадание, A_2 – в том, что произошло два попадания, A_3 соответствует трем попаданиям. Рассмотрим событие A – «произошло не больше двух попаданий». Очевидно, что $A_0 \subset A$, $A_1 \subset A$, $A_2 \subset A$. Кроме того, $A_0 + A_1 + A_2 = A$. События A_0 и A_1, например, несовместны (они не могут произойти одновременно), т.е. $A_0 \times A_1 = V$. Понятно, что $A_1 \times A = A_1$ (если произошли одновременно события A_1 и A, то это значит, что произошло событие A_1). A_3 является событием, противоположным событию A (если A не происходит, т.е. из трех выстрелов произошло больше двух попаданий, то значит, произошло A_3). Событие A-A_2 состоит в том, что произошло не больше двух попаданий, но не два ровно, т.е. стрелок попал в цель один раз или не попал ни одного раза, поэтому $A - A_2 = A_0 + A_1$.

2. Классическое и статистическое определения вероятности

Первая книга по теории вероятностей была издана Гюйгенсом в 1657 году. Приведенное определение вероятности было дано Я. Бернулли в 1713 году. Но первой вероятностной задачей считается опубликованная в 1494 году итальянским математиком Л. Пачиолли следующая **задача:** два игрока договорились играть в кости до момента, когда одному из них удастся выиграть *3* партии. Но игра была прервана после того, как первый выиграл *2*, а второй – *1* партию. Как справедливо разделить ставку? Пачиолли верного решения не нашел. Он предлагал разделить ставку в отношении *2:1*, не учитывая числа партий, которые еще надо выиграть, чтобы получить всю ставку. Спустя почти 50 лет другой итальянский математик Д. Кардано (1501-1576) подверг рассуждения Пачиолли критике, но и сам предложил ошибочное решение. Через 100 с лишним лет в 1654 году задача была, наконец, решена в ходе переписки между двумя выдающимися французскими математиками Б. Паскалем (163-1662) и П. Ферма (1601-1665). Приведем решение Паскаля. Если бы игроки сыграли еще одну партию, то решение было бы очевидно: при выигрыше A ему досталась бы вся ставка (т.к. он выиграл уже три партии), при выигрыше B справедливо было бы разделить всю ставку пополам (т.к. у каждого по две выигранных партии). Возможности у этих исходов одинаковы. Таким образом, A может получить всю ставку или ее половину, в среднем $(1 + 1/2):2 = 3/4$ ставки; B может ничего не выиграть или выиграть половину ставки, т.е. в среднем $(0 + 1/2):2 = 1/4$ ставки. Поэтому ставка должна быть разделена в отношении 3:1 (а не 2:1, как предлагал Пачиолли).

Определение 2.1. (классическое). Пусть некоторый эксперимент имеет конечное, не равное нулю, число n попарно несовместных исходов. Допустим далее, что все элементарные события равновозможны в силу каких-то объективных не математических причин. Пусть событию А благоприятствуют m элементарных исходов. Тогда, по определению, **вероятностью события** A назовем число:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \qquad (2.1)$$

Очевидны свойства вероятности $P(A)$, вытекающие из определения:

1. $P(A) \geq 0$, $P(A) \leq 1$;

2. $P(U) = 1$, $P(V) = 0$.

Рассмотрим несколько примеров вычисления вероятности с помощью классической модели (как еще говорят, «по классической схеме»).

Задача 2.1. Пусть в коробке имеется 2 красных, 2 белых и 6 синих шаров. Наудачу вынимаем два шара. Какова вероятность событий: а) вынуты два красных шара; б) вынуты два синих шара?

Решение. Пусть событие A – «вынуты два красных шара» и B – «вынуты два синих шара». Число всех исходов испытания равно числу способов вытащить 2 шара из 10: $n = C_{10}^2 = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$, причем все исходы равновозможны. Исход, благоприятный событию A, только один (поскольку красных шаров всего 2), следовательно, $P(A) = 1/45$. Число исходов, благоприятных событию B, равно числу способов вытащить 2 шара из 6: $m = C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$, значит, $P(B) = 15/45 = 1/3$.

Ответ. а) 1/45; б) 1/3.

Замечание. Классическое определение вероятности не требует того, чтобы испытания практически проводились, достаточно лишь посчитать теоретически число всех исходов и число благоприятных, а затем применить формулу. Но она может быть использована лишь в случае, когда все события равновозможны и образуют полную группу попарно несовместных событий.

Определение 2.2. (статистическое определение вероятности). Предположим, что некоторое испытание, в результате которого может наступить событие A, проведено N раз, и при этом событие A появилось ровно M раз. Тогда число

$$\mu(A) = \frac{M}{N} \qquad (2.2)$$

называется **статистической вероятностью** события A в рассматриваемой серии испытаний.

Пример 2.1. Рождается ребенок – мальчик или девочка. Кажется, что эти события равновозможны, т.е. вероятность рождения мальчика равна 1/2. Но статистика рождений не вполне согласуется с нашим «кажется». В разное время в различных странах мальчиков рождается несколько больше, чем девочек – примерно 518 мальчиков на каждую тысячу детей. Значит, статистическая вероятность рождения мальчика равна $\mu = 0{,}518$.

Замечание. Подчеркнем еще раз, что в отличие от классического определения вероятности, статистическая вероятность может быть вычислена в том случае, если испытания действительно проводились.

Практика показывает, что в тех случаях, когда точно известна вероятность $P(A)$ в классическом понимании, при достаточно большом числе N проведенных испытаний $\mu(A) \approx P(A)$. Это приближенное равенство получило теоретическое обоснование в законе больших чисел, открытом Яковом Бернулли.

Задача 2.2. Наудачу дважды подбрасывают монету. Найти: 1) вероятность выпадения двух гербов; 2) вероятность выпадения только одного герба; 3) вероятность выпадения хотя бы одного герба.

Решение. Испытание состоит в двукратном подбрасывании монеты. Будем различать первый бросок и второй бросок. Пусть событие A означает, что выпало точно два герба, т.е. при первом подбрасывании выпал герб и при втором подбрасывании – герб; событие B – выпал точно один герб, т.е. либо при первом броске выпал герб и при втором – решетка, либо при первом броске выпала решетка и при втором – герб, событие C – выпал хотя бы один герб, т.е. хотя бы при одном броске выпал герб. Надо найти $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$.

Элементарным событием назовем упорядоченную последовательность двух букв, а именно, элементарные события образуют следующие последовательности: г–г, т.е. при первом и втором бросках выпали гербы, г–р (при первом броске выпал герб, при втором – решетка), р–г (при первом броске выпала решетка, при втором – герб), р–р (при первом и втором бросках выпали решетки). Множество n состоит из этих четырех элементарных исходов. Очевидно, эти исходы образуют полную группу, так как они попарно несовместны и один из них обязательно появится при любом осуществлении двух бросков монеты. Кроме того, все эти четыре исхода равновозможны (в том смысле, что шансы на появление у всех исходов одинаковы). Выполнены все условия, следовательно, применимо классическое определение вероятности. Событию A благоприятствует только один элементарный исход г–г. Поэтому и по классическому определению вероятности $P(A) = 1/4$. Событию B благоприятствуют два элементарных исхода (р–г) и (г–р). Поэтому $P(B) = 2/4 = 1/2$. Событию C благоприятствуют три элементарных события (г–г), (г–р), (р–г), Поэтому $P(C) = 3/4$.

Ответ. 1) 1/4; 2) 1/2; 3) 3/4.

Задача 2.3. Наудачу один раз бросается игральная кость. Найти вероятность выпадения числа очков, кратного трем.

Решение. Обозначим через A событие – на верхней грани выпало число очков, кратное трем. Это означает, что на верхней грани выпало 3 или 6 очков. Элементарным исходом нашего эксперимента назовем исход ω_i– на верхней грани выпало i очков, $i = 1,...,6$. Эти 6 элементарных исходов образуют n. Ясно, что ω_i образуют полную группу (при одном и том же броске не могут оказаться на верхней грани одновременно две разные цифры и при любом броске на верхней грани выпадет какое-либо число от 1 до 6). Эти элементарные исходы равновозможны, так как кость бросается наудачу (выпадение 1-го очка имеет такие же шансы, как и выпадение 2-х очков и т.д.). Выполнены все условия применимости классического определения вероятности. Событию A благоприятствуют 2 исхода ω_3 и ω_6, значит, откуда следует, что $P(A) = 2/6 = 1/3$.

Ответ. 1/3.

Задача 2.4. Дважды подбрасывают наудачу игральную кость. Найти вероятность того, что: 1) при обоих подбрасываниях выпадет одно и то же число очков; 2) сумма выпавших очков не превзойдет 4.

Решение. Введём события: A – при первом и втором подбрасываниях выпадет одинаковое число очков; B – сумма выпавших очков не превзойдет 4 (иными словами сумма очков равна 2, либо 3, либо 4). Назовем элементарным событием последовательность двух целых точек $i = 1,...,6$, $j = 1,...,6$, где i – число очков, выпавших при первом подбрасывании, j – число очков, выпавших при втором подбрасывании. Эти элементарные события образуют множество n. Очевидно, что эти события образуют полную группу и равновозможны; общее число элементарных событий равно $6{\cdot}6 = 36$. Выполнены все предпосылки применимости классического определения вероятности. Событию A благоприятствуют следующие 6 элементарных исходов: (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6). По классическому определению вероятности $P(A) = 6/36 = 1/6$. Событию B благоприятствуют 6 элементарных исходов: (1,1), (1,2), (2,1), (1,3), (3,1) (2,2). Других благоприятствующих исходов нет. Таким образом, $P(B) = 6/36 = 1/6$.

Ответ. 1) 1/6; 2) 1/6.

Задача 2.5. В партии содержатся 50 деталей, из которых 10 бракованных. Из партии наудачу берутся 5 деталей. Найти вероятность того, что: 1) все 5 деталей бракованные; 2) все 5 деталей доброкачественные; 3) в пятерке извлеченных деталей 3 детали бракованные и 2 детали доброкачественные.

Решение. Как уже отмечалось выше, будем считать, что все детали пронумерованы, т.е. они образуют множество из $n = 50$ различных по номерам объектов, из которых 10 – бракованные, а остальные 40 – доброкачественные. Из этой партии наудачу берутся 5 деталей. В этом состоит эксперимент. Пусть событие A – все 5 деталей бракованные, событие B – все 5 деталей доброкачественные, событие C – в пятерке извлеченных деталей 3 детали бракованные и 2 – доброкачественные. Элементарный исход нашего эксперимента определяется номерами пяти взятых деталей, причем порядок указания этих номеров не имеет значения. Следовательно, элементарное событие совпадает с сочетанием из 50 элементов по 5. Общее число таких элементарных событий совпадает с числом различных сочетаний из 50 элементов по 5 и выражается формулой $n = C_{50}^{5} = \dfrac{50!}{5!\cdot 45!}$. Все эти элементарные исходы образуют полную группу и равновозможны, так как 5 деталей берутся наудачу и одна пятерка деталей имеет такие же шансы быть взятой, что и любая другая. Выполнены все предпосылки применимости классического определения вероятности. Событию A благоприятствуют лишь те пятерки деталей, которые взяты из 10 бракованных деталей. Так как порядок взятых 5-ти деталей не играет роли, то $m = C_{10}^{5} = \dfrac{10!}{5!\cdot 5!}$ и, следовательно, $P(A) = \dfrac{C_{10}^{5}}{C_{50}^{5}}$. Событию B благоприятствуют лишь пятерки деталей, которые взяты из 40 доброкачественных деталей. Поэтому $m = C_{40}^{5}$, и $P(B) = \dfrac{C_{40}^{5}}{C_{50}^{5}}$.

Событию C благоприятствуют лишь те элементарные исходы (пятерки деталей), которые содержат 3 бракованные и 2 доброкачественные детали. По правилу умножения число таких исходов равно $m = C_{10}^{3}C_{40}^{2}$ и, следовательно, $P(C) = \dfrac{C_{10}^{3}\cdot C_{40}^{2}}{C_{50}^{5}}$.

Ответ. 1) $\dfrac{C_{10}^{5}}{C_{50}^{5}}$; 2) $\dfrac{C_{40}^{5}}{C_{50}^{5}}$; 3) $\dfrac{C_{10}^{3}\cdot C_{40}^{2}}{C_{50}^{5}}$.

Задача 2.6. В урне находятся 25 белых и 5 черных шаров. Из урны наудачу извлекаются 9 шаров. Найти: 1) вероятность того, что все 9 шаров – белые; 2) вероятность того, что среди 9-ти извлеченных шаров 3 черного цвета; 3) вероятность того, что среди 9-ти извлеченных шаров имеется хотя бы один шар черного цвета.

Решение. Всего в урне 30 шаров. Будем считать, что все они пронумерованы. Эти 30 шаров разделяются на две группы. Первая группа состоит из 25-ти белых шаров, вторая группа состоит из

5-ти черных шаров. Эксперимент состоит в изъятии наудачу 9-ти шаров из 30-ти шаров. Взятая девятка образует 9-элементное подмножество множества из 30-ти шаров (их порядок не имеет значения), т.е. является сочетанием из 30 элементов по 9. Обозначим через A событие – все 9 шаров – белые. Событие B – из 9 вынутых шаров 3 черных. Событие C среди 9-ти вынутых шаров имеется хотя бы один черный шар. Элементарным событием в этом эксперименте объявим любое сочетание из 30-ти элементов по 9. Тогда число таких элементарных событий равно $n = C_{30}^{9}$. Ясно, что эти элементарные исходы образуют полную группу и равновозможны, т.к. шары берутся наудачу и шансы появиться у одной девятки шаров равны шансам появиться у любой другой девятки шаров. Выполнены все предпосылки применимости классического определения вероятности. Событию A благоприятствуют лишь те сочетания, которые являются девятиэлементными подмножествами 25-элементного множества белых шаров. Поэтому $m = C_{25}^{9}$ и $P(A) = \dfrac{C_{25}^{9}}{C_{30}^{9}}$. Событию B благоприятствуют лишь те сочетания из 9 шаров, которые содержат 3 черных и 6 белых шаров. По правилу умножения $m = C_{5}^{3} \cdot C_{25}^{6}$ и, следовательно, $P(B) = \dfrac{C_{5}^{3} \cdot C_{25}^{6}}{C_{30}^{9}}$. Событие $\bar{C}$ означает, что все 9 шаров – белые, т.е. $\bar{C} = A$. Поэтому $P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - P(A) = 1 - \dfrac{C_{25}^{9}}{C_{30}^{9}}$.

Ответ. 1) $\dfrac{C_{25}^{9}}{C_{30}^{9}}$; 2) $\dfrac{C_{5}^{3} \cdot C_{25}^{6}}{C_{30}^{9}}$; 3) $1 - \dfrac{C_{25}^{9}}{C_{30}^{9}}$.

Задача 2.7. На девяти одинаковых карточках написано по одной цифре от 1 до 9 (на разных карточках разные цифры). Наудачу берутся 5 карточек и располагаются в строку. Найти вероятность того, что: 1) получится четное число; 2) полученное число делится на 5; 3) полученное число делится на 25.

Решение. Карточки образуют множество из $n = 9$ различимых элементов (на карточках разные цифры). Эксперимент состоит во взятии наудачу пяти карточек из девяти и расположении их наугад в строку. В результате получается пятизначное число. Во втором случае, когда берутся все 9 карточек и располагаются в строку, получается 9-значное число. Пусть событие A означает, что полученное число четное; событие B означает, что полученное число делится на 5; событие C означает, что полученное число делится на 25. В первом испытании под элементарным событием понимаем любое пятизначное число, которое можно получить. Поскольку пятизначное число определяется набором различных цифр, а также их порядком следования, то элементарное событие совпадает с размещением из 9 элементов по 5. Поэтому число элементарных событий $n = A_9^5 = \frac{9!}{4!}$. Очевидно, все эти элементарные события образуют полную группу и равновозможны. Равновозможность обеспечивается взятием наудачу пяти карточек и расположением их в произвольном порядке. Выполнены все предпосылки применимости классического определения вероятности. Найдем m. Пятизначное число является четным тогда и только тогда, когда последняя цифра четна, т.е. равна либо 2, либо 4, либо 6, либо 8. Нуль не берем, так как он отсутствует на девяти карточках. Таким образом, четное пятизначное число с различным написанием цифр можно получить, совершив последовательно два действия. Первое действие – выбор четной цифры для написания последней цифры пятизначного числа. Это действие можно совершить четырьмя различными способами по числу различных четных цифр. Второе действие состоит в выборе наудачу четырех цифр из оставшихся восьми свободных цифр и расположении их наугад на первых четырех позициях написания пятизначного числа. Второе действие можно выполнить различными способами. По правилу умножения $m = 4 \cdot A_8^4$ и, следовательно, $P(A) = \frac{4 \cdot A_8^4}{A_9^5} = \frac{4}{9}$.

Событию B благоприятствуют те элементарные события, у которых на последнем месте стоит цифра 5. Значит, количество таких пятизначных чисел совпадает с числом размещений четырех элементов из 8-и оставшихся карточек, не содержащих цифру 5:

$m = A_8^4$. Поэтому $P(B) = \frac{A_8^4}{A_9^5} = \frac{1}{9}$.

Событию C благоприятствуют лишь те пятизначные числа, последние две цифры которых образуют двузначное число, которое делится на 25. В нашем случае возможные варианты: последние две цифры образуют либо число25, либо число 75. Таким образом, последние две цифры пятизначного числа могут быть записаны двумя разными способами. Тогда первые три цифры пятизначного числа могут быть написаны A_7^3 различными способами. Поэтому $m = 2 \cdot A_7^3$ и, следовательно, $P(C) = \frac{2 \cdot A_7^3}{A_9^5} = \frac{1}{36}$.

Ответ. 1) 4/9; 2) 1/9; 3) 1/36.

Задача 2.8. По условиям лотереи «Спортлото 6 из 45» участник лотереи, угадавший 4,5,6 видов спорта из отобранных при случайном розыгрыше 6 видов спорта из 45, получает денежный приз. Найти вероятность, что будут угаданы: а) все 6 цифр; б) 4 цифры.

Решение. а) Пусть событие A – угадывание всех 6 видов спорта из 45. Общее число всех случаев, т.е. всех вариантов заполнения карточек спортлото, есть $n = C_{45}^6$, так как каждый вариант заполнения отличается только составом видов спорта. Число случаев, благоприятствующих событию A, есть $m = 1$. Поэтому

$$P(A) = \frac{1}{C_{45}^6} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40} \approx 0,0000001 .$$

б) Пусть событие B – угадывание 4 видов спорта из 6 выигравших из 45. Вначале найдем число способов, какими можно выбрать 4 вида спорта из 6 выигравших, т.е. C_6^4. Но это еще не все: к каждой комбинации 4-х выигравших видов спорта из 6 следует присоединить комбинацию 2-х невыигравших видов из 45-6 = 39; таких комбинаций C_{39}^2. По правилу произведения общее число случаев, благоприятствующих событию *B*, равно $m = C_6^4 \cdot C_{39}^2$.

Итак, $P(B) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{C_6^4 \cdot C_{39}^2}{C_{45}^6} = 0,00136$.

Ответ. а) $0,0000001$; б) $0,00136$.

Задача 2.9. На полке наудачу располагаются 10 различных книг. Какова вероятность того, что: 1) две заранее отмеченные книги окажутся рядом; 2) три заранее отмеченные книги окажутся рядом?

Решение. Испытание состоит в расположении 10-ти книг на полке. Событие *A* – две заранее отмеченные книги оказались рядом, неважно в каком порядке. Событие *B* – три отмеченные книги оказались рядом, неважно в каком порядке. Элементарным событием объявляем любую перестановку 10-ти книг на полке. *n* состоит из множества всевозможных таких перестановок. Очевидно, *n* образует полную группу элементарных равновозможных событий. $n = 10!$ Выполняются все условия для применимости классического определения вероятности. Событию *A* благоприятствуют лишь те перестановки 10-ти книг, у которых две отмеченные книги окажутся рядом, неважно в каком порядке $m = 2! \cdot 9!$.

Поэтому $P(A) = \dfrac{2! \cdot 9!}{10!} = \dfrac{1}{5}$. Событию *B* благоприятствуют лишь те перестановки 10-ти книг, у которых заранее отмеченные 3 книги окажутся рядом, неважно в каком порядке. В первом пункте уже было подсчитано, что число таких перестановок равно $m = 3! \cdot 8!$,

поэтому $P(B) = \dfrac{3! \cdot 8!}{10!} = \dfrac{1}{15}$.

Ответ. 1) 1/5; 2) 1/15.

Задача 2.10. В лифт семиэтажного дома на первом этаже вошли три человека. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любом из этажей, начиная со второго. Найти вероятности следующих событий: А) все пассажиры выйдут на четвертом этаже; В) все пассажиры выйдут одновременно (на одном и том же этаже); С) все пассажиры выйдут на разных этажах.

Решение. $P(A)=\dfrac{1}{6\cdot 6\cdot 6}=\dfrac{1}{216}$. Вероятность события В вшестеро больше вероятности события *A*: $P(B)=\dfrac{6}{6\cdot 6\cdot 6}=\dfrac{1}{36}$. Для события *C* число способов, которыми можно распределить трех пассажиров по шести этажам: $P(C)=\dfrac{C_6^3}{6\cdot 6\cdot 6}=\dfrac{20}{216}=\dfrac{5}{54}$.

Ответ. А) $\dfrac{1}{216}$; В) $\dfrac{1}{36}$; С) $\dfrac{5}{54}$.

Задача 2.11. Одновременно бросают два кубика. Известно, что выпала сумма очков, равная восьми. Какова вероятность того, что выпали 3 и 5?

Решение. Уже есть условие: выпало 8 очков. Рассмотрим, когда такое возможно: 2 + 6, 3 + 5, 4 + 4, 5 + 3, 6 + 2. Все 5 возможностей. Для нас «хорошими» являются две. Поэтому $P\left(A\right)=\dfrac{2}{5}$.

Ответ. 2/5.

Задача 2.12. В ящике 20 шаров с номерами 1,2,...,20. Наудачу выбираются шесть шаров. Найти вероятность того, что среди них есть шары с номерами 1 и 2.

Ответ. 3/38.

Задача 2.13. Среди 100 фотокарточек есть одна фотокарточка любимого артиста. Взяли наудачу 10 фотокарточек. Какова вероятность того, что среди них есть фото любимого артиста?

Ответ. 1/10.

Задача 2.14. Из колоды в 36 карт вытаскивают две карты. Какова вероятность, что будет хотя бы одна карта пиковой масти.

Ответ. 31/70.

Задача 2.15. Из 12 лотерейных билетов, среди которых есть 4 выигрышных, наудачу берут 6. Какова вероятность того, что хотя бы один из них выигрышный?

Ответ. 32/33.

Задача 2.16. Из 60 вопросов, входящих в экзаменационные билеты, студент подготовил 50. Какова вероятность, что вытянутый студентом билет, содержащий два вопроса, будет включать в себя подготовленные вопросы?

Ответ. 245/354.

3. Геометрическое определение вероятности

Классическое определение вероятности неприменимо, если логически возможных исходов эксперимента бесконечно много.

Определение 3.1. (геометрическое). Пусть D – некоторая геометрическая фигура на плоскости, имеющая площадь $S(D)$. B – её часть, имеющая площадь $S(B)$. Какова вероятность, что случайно выбранная точка M из D принадлежит также и B (как говорят, «попадет в B»)? Если предположить, что вероятность попадания в произвольную часть D зависит только от площади этой части (причем прямо пропорционально) и не зависит от ее расположения в D, то естественно за эту вероятность принять, по определению, отношение площадей:

$$P(A) = \frac{S(B)}{S(D)}. \tag{3.1}$$

Замечание. Если множество E всех исходов опыта есть подмножество одномерного или трехмерного пространства, то геометрическая вероятность вычисляется аналогично, только в определении фигурирует не площадь множества, а длина или объем.

Задача 3.1. Найдем вероятность того, что сумма длин двух отрезков, длина каждого из которых меньше или равна 2, будет больше 2.

Решение. Пусть событие A – «сумма длин отрезков больше 2». Обозначим через x и y длины первого и второго отрезков. По ус-

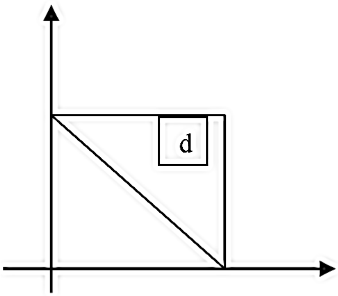


Рис. 3.1

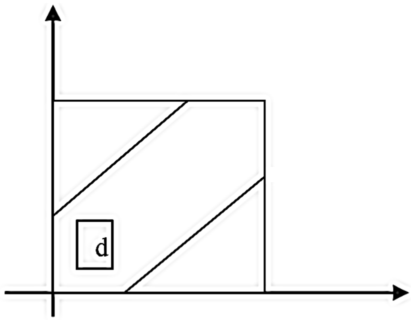


Рис. 3.2

ловию $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 2$. На плоскости (x, y) множество, удовлетворяющее этим условиям, изображается квадратом со стороной 2.

Неравенство $x + y > 2$ означает, что сумма длин отрезков больше двух. Множество точек d, удовлетворяющее данному неравенству, лежит выше прямой $y = 2 - x$ (см. рис.3.1). Площадь этого множества, очевидно, составляет половину площади квадрата. Событие A произойдет, если точка с координатами (x, y), наугад выбранная в квадрате D, попадет в область d, заданную неравенством $x + y > 2$.

Согласно геометрическому определению, вероятность A равна отношению площадей d и D, т.е. равна 1/2.

Ответ. 1/2.

С помощью геометрического определения вероятности решается целый ряд задач, в формулировке которых совсем нет геометрических объектов. Покажем это на примере.

Задача 3.2. (о встрече) Два товарища условились встретиться в промежутке времени с 12 до 13 часов. Договорились, что тот, кто пришел первым, ждет другого в течение 20 минут, после чего уходит. Найдем вероятность того, что встреча состоится.

Решение. Пусть событие A – «товарищи встретились». Обозначим через x момент прихода одного из товарищей, через y – момент прихода второго. По условию x и y расположены в промежутке от 12 до 13 часов, можно считать, что $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $0 \leqslant y \leqslant 1$. Товарищи встретятся, если время прихода одного из них отличается от времени прихода второго не более, чем на 20 минут (1/3 часа), т.е. $|x - y| \leqslant 1/3$.

Задача переформулируется следующим образом: в квадрат $D = \{(x,y)\colon 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ наудачу ставится точка. Требуется найти вероятность того, что она попадет в область $d = \{(x,y)\colon |x - y| \leqslant 1/3\} = \{(x,y)\colon x - 1/3 \leqslant y \leqslant x + 1/3\}$. Области D и d изображены на рис.3.2. Площадь квадрата D равна 1, площадь области d легко вычисляется: $s(d) = 1 - (2/3)^2 = 5/9$. Следовательно, вероятность того, что товарищи встретятся, равна 5/9.

Ответ. 5/9.

Задача 3.3. В круг радиуса R наудачу бросается точка. Какова вероятность, что взятая точка окажется от центра круга на расстоянии, большем, чем $\dfrac{R}{2}$?

Решение. Эксперимент состоит во взятии наугад точки в круге радиуса R. Значит, D совпадает с множеством точек круга радиуса R. Элементарным событием является точка круга радиуса R, $S(D) = \pi R^2$. B – множество точек круга D, отстоящих от центра круга на расстояние, большее, чем $\dfrac{R}{2}$; $S(B) = \pi R^2 - \pi\left(\dfrac{R}{2}\right)^2 = \dfrac{3\pi R^2}{4}$. По геометрическому определению вероятности $P(A) = \dfrac{3\pi R^2}{4} / \pi R^2 =$

$$P(A) = \frac{3\pi R^2}{4} / \pi R^2 = \frac{3\pi R^2}{4\pi R^2} = \frac{3}{4}.$$

Ответ. 3/4.

Задача 3.4. На горизонтальном диаметре круга радиуса R нагад берется точка. Затем через эту точку проводится хорда, перпендикулярная диаметру. Найти вероятность того, что длина хорды не превосходит R.

Решение. Угол $\angle AOB = \angle A'OB' = \dfrac{\pi}{6}$ (см. рис.3.3). Эксперимент состоит во взятии наудачу точки из интервала $(-R, R)$, следовательно, $D=(-R,R)$, а $|D|=2R$. Так как $\angle AOB=\frac{\pi}{6}$, то длина отрезка АВ равна $\frac{R}{2}$, следовательно, хорда, проходящая через А и В, равна R. В качестве B берем $[-R,B']\cup[B,R]$. Длина вертикальной хорды не превосходит R тогда и только тогда, когда наудачу взятая точка из D попадет в B. Так как $|D|=2R-2R\cos\frac{\pi}{6}=2R-R\sqrt{3}$, то по геометрическому определению вероятности $P(A)=\frac{2R-R\sqrt{3}}{2R}=$ $=1-\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0{,}15$.

Ответ. 0,15.

Задача 3.5. На верхней полуокружности радиуса R наудачу берется точка. Затем через эту точку проводится хорда, перпендикулярная горизонтальному диаметру. Какова вероятность, что длина хорды не превосходит R?

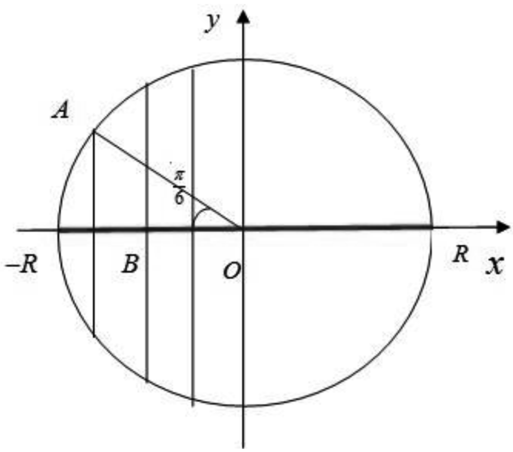


Рис. 3.3

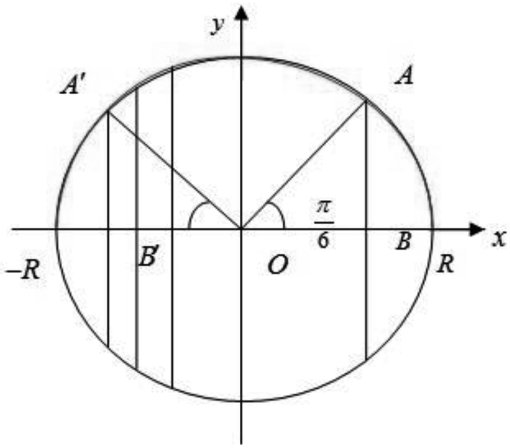


Рис. 3.4

Решение. Испытание состоит во взятии наугад точки из верхней полуокружности радиуса *R*. Значит, *D* образовано множеством точек верхней полуокружности, $S(D)=\pi R$. Обозначим через *B* объединение двух дужек (см. рис. 3.4): $(-R)A' \cup AR$. Длина искомой хорды не превзойдет *R* тогда и только тогда, когда наудачу взятая точка, через которую проводится вертикальная хорда, содержится в *B*. Так как $S(B)=2\cdot\frac{\pi}{6}\cdot R=\frac{\pi R}{3}$, то искомая вероятность находится по геометрическому определению и имеет значение $P(A)=\frac{\frac{\pi R}{3}}{\pi R}=\frac{1}{3}\approx 0{,}33$.

Ответ. 0,33.

Может показаться, что задача 3.4 и задача 3.5 одинаковы, так как точки горизонтального диаметра находятся во взаимно однозначном соответствии с концами вертикальных хорд, проходящих через них, лежащих на верхней полуокружности. Иными словами, на первый взгляд, два различных способа решения приводят к различным ответам. На самом деле, две последние задачи совершенно различны, так как речь в них идет о различных испытаниях. В задаче 3.4 наудачу берутся точки горизонтального диаметра, через которые проводят хорды, а в задаче 3.5 испытание состоит во взятии наудачу точек верхней полуокружности, через которые проводят хорды.

4. Вероятность суммы событий

Пусть события A и B несовместны, m – число равновозможных элементарных событий, благоприятных событию A, k – число таких событий, благоприятных событию B, n – общее число равновозможных элементарных событий, образующих полную группу попарно несовместных событий.

В силу классического определения вероятности $P(A) = m/n$, $P(B) = k/n$. Согласно определению суммы событий, событие $A + B$ имеет место, когда происходит событие A или событие B. Поскольку A и B несовместны, число элементарных событий, благоприятных $A + B$, равно $m + k$, поэтому

$$P(A+B)=\frac{m+k}{n}=\frac{m}{n}+\frac{k}{n}=P(A)+P(B). \qquad (4.1)$$

Последнее равенство легко обобщить на любое конечное число попарно несовместных событий. Сформулируем данный факт в виде теоремы.

Теорема 4.1. (*о сумме попарно несовместных событий*). Вероятность суммы попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

Задача 4.1. В лотерее выпущено 10 000 билетов и установлено 10 выигрышей по 200 рублей, 100 выигрышей по 100 рублей, 500 выигрышей по 25 рублей и 1000 выигрышей по 5 рублей. Какова вероятность того, что человек, купивший билет, выиграет не менее 25 рублей?

Решение. Пусть событие A – «человек выиграл не менее 25 рублей», событие A_1 – «выигрыш составил 200 рублей», событие A_2 – «выигрыш составил 100 рублей», событие A_3 – «выигрыш равен 25 рублям». Поскольку куплен один билет, то $A = A_1 + A_2 + A_3$, причем A_1, A_2 и $A3$ – события попарно несовместные (любые два события не могут произойти одновременно). Следовательно,

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{10}{10000} + \frac{100}{10000} + \frac{500}{1000} = 0{,}061.$$

Ответ. 0,061.

Замечание. Формула (4.1) применима лишь в случае, когда события несовместны. Покажем, что она неверна для произвольных событий, которые могут происходить одновременно.

Задача 4.2. Бросаем две монеты. Чему равна вероятность появления хотя бы одного герба?

Решение. Пусть событие A – «появление герба при подбрасывании первой монеты», событие B – «появление герба при подбрасывании второй монеты». Требуется найти вероятность события $C = A + B$. Покажем, что в этом случае $P(C) \neq P(A) + P(B)$. События A и B не являются несовместными: они могут произойти одновременно. Легко видеть, что $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/2$, но $P(C) \neq 1$ (событие C не является достоверным). Значит, формула (4.1) не может быть применена. Вычислим $P(C)$. При бросании двух монет могут произойти 4 события, образующие полную группу попарно несовместных событий (выпадение двух гербов, выпадение двух цифр, выпадение герба на первой монете и цифры на второй, и, наоборот, выпадение цифры на первой монете и герба на второй). Благоприятными для C являются 3 из них, следовательно, $P(C) = 3/4$.

Ответ. 3/4.

Выведем формулу, позволяющую вычислять вероятность суммы любых двух событий.

Пусть n – общее число равновозможных элементарных событий, образующих полную группу попарно несовместных событий, m – число тех из них, которые благоприятны событию A, k – число таких событий, благоприятных B.

Допустим, что события A и B могут происходить одновременно, и среди событий, благоприятных A или B содержится r таких, которые благоприятствуют и A, и B одновременно.

В силу классического определения вероятности $P(A) = m/n$, $P(B) = k/n$, $P(AB) = r/n$. Согласно определению суммы событий, событие $A + B$ имеет место, когда происходит событие A или событие B, причем события A и B могут происходить и одновременно. Очевидно, что событию $A + B$ благоприятствуют $m + k - r$ элементарных исходов, поэтому

$$P(A+B)=\frac{m+k-r}{n}=\frac{m}{n}+\frac{k}{n}-\frac{r}{n}=P(A)+P(B)-P(AB). \quad (4.2)$$

Очевидно, что эта формула является обобщением формулы (4.1). Она может быть применена и при решении задачи 4.2.

На основании равенства (4.2) сформулируем теорему о вероятности суммы любых двух событий.

Теорема 4.2. (*о сумме двух событий*). Вероятность суммы любых двух событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного осуществления.

Задача 4.3. Бросаем две игральные кости. Вычислим вероятность выпадения хотя бы одной шестерки.

Решение. Пусть событие A – «выпадение шестерки на первой кости», событие B – «выпадение шестерки на второй кости». Мы хотим вычислить вероятность события $A + B$. Очевидно, что $P(A) = 1/6$, $P(B) = 1/6$, $P(AB) = 1/36$. Согласно формуле (4.2) $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 1/6 + 1/6 - 1/36 = 11/36$.

Ответ. 11/36.

Мы определили ранее вероятность события как некоторую числовую функцию, определенную на множестве событий, имеющих место в данном эксперименте. Такую вероятность называют **безусловной вероятностью**, подчеркивая этим, что она не зависит ни от каких дополнительных условий, кроме фиксированного комплекса условий эксперимента.

Задача 4.4. В библиотеке на стеллаже в случайном порядке расставлены десять учебников по экономике и пять – по математике. Библиотекарь наудачу берет три учебника. Найти вероятность того, что хотя бы один из взятых учебников будет по математике.

Решение. *Способ первый*. Очевидно, что случайное событие $\bar{D}$ – ни один из взятых учебников не будет по математике. Тогда $D+\bar{D}=U$ – достоверное событие. $P\left(D+\bar{D}\right)=P\left(U\right)=1$. События D и $\bar{D}$ – несовместные, следовательно, $P\left(D\right)+P\left(\bar{D}\right)=1$. С помощью классического определения вероятности вычисляем: $P\left(\bar{D}\right)=\dfrac{C_{10}^{3}}{C_{15}^{3}}=\dfrac{24}{91}$. Тогда $P\left(D\right)=1-P\left(\bar{D}\right)=1-\dfrac{24}{91}=\dfrac{67}{91}$.

Способ второй. Пусть случайное событие A – один из трёх учебников – по математике, случайное событие B – два из трёх взятых учебников – по математике и случайное событие C – три взятых учебника – по математике. Тогда случайное событие D можно представить в виде суммы трёх введённых событий: $D=A+B+C$. События A, B и C – несовместные, то есть не могут одновременно произойти. Тогда $P\left(D\right)=P\left(A+B+C\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)+P\left(C\right)$. Применяя классическое определение вероятности, вычисляем:

$$P\left(A\right)=\frac{C_5^1\cdot C_{10}^2}{C_{15}^3}=\frac{45}{91},\quad P\left(B\right)=\frac{C_5^2\cdot C_{10}^1}{C_{15}^3}=\frac{20}{91},\quad P\left(C\right)=\frac{C_5^3\cdot C_{10}^0}{C_{15}^3}=\frac{2}{91}.$$

Подставив эти вероятности в предыдущее равенство, получаем: $P(D) = 45/91 + 20/91 + 2/91 = 67/91$.

Ответ. 67/91.

Задача 4.5. В розыгрыше первенства по баскетболу участвуют 18 команд, из которых случайным образом формируются две группы по 9 команд в каждой. Среди участников соревнований имеется 5 команд экстра-класса. Найти вероятность следующих событий: А) все команды экстра-класса попадут в одну и ту же группу; В) две команды экстра-класса попадут в одну группу, а три – в другую.

Решение. $P(A)=\dfrac{2C_5^5\cdot C_{13}^4}{C_{18}^9}=\dfrac{1}{34}$, $P(B)=\dfrac{C_5^2\cdot C_{13}^7+C_5^3\cdot C_{13}^6}{C_{18}^9}=\dfrac{12}{17}$.

Ответ. А) $\frac{1}{34}$; В) $\frac{12}{17}$.

Задача 4.6. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,3.Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

Решение. Вероятность того, что кофе не будет только в 1-м автомате: 0,3-0,12 = 0,18;Вероятность того, что кофе не будет только в 2-м автомате: 0,3-0,12 = 0,18; Вероятность того, что кофе не будет в обоих автоматах 0,12. Вероятность того, что кофе не будет хотя бы в одном автомате 0,18 + 0,18 + 0,12 = 0,48. Вероятность того, что кофе будет в обоих автоматах 1-0,48 = 0,52.

Ответ. 0,52.

5. Условная вероятность. Последовательные испытания

Пусть ставятся два эксперимента. И пусть до события B произошло событие A. Изменит ли оценку шанса появления B информация о том, что A уже произошло? Рассмотрим пример такой ситуации.

Пример 5.1. Мы положили в ящик два шарика: черный и белый. Наугад вытаскивается один шар.

Событие A: «первый шар – белый».

Событие B: «второй шар – черный».

Если мы не знаем, какого цвета первый шар (например, шар вынут в абсолютной темноте), то естественно считать, что вероятность $P(B) = 0{,}5$. Если же известно, что А произошло, то вероятность $P(B) = 1$.

Для математического описания зависимостей между результатами последовательно проводимых экспериментов используется понятие **условная вероятность.** Условная вероятность появления события B, если событие A произошло, обозначается $P(B/A)$. Поскольку событие, противоположное A, мы обозначали $\bar{A}$, то условная вероятность события B, если событие A не произошло, будет обозначаться через $P(B/\overline{A})$.

Определение 5.1. Для произвольного события B **условной вероятностью** B при условии A называют вероятность события B, вычисленную в предположении, что A наступило. Обозначают $P(B/A)$ и вычисляют по формуле

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)}. \qquad (5.1)$$

Аналогично определяется, что $P(B/A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)}$ (5.2)

Пример 5.2. Из урны, в которой находятся 10 белых и 5 черных шаров, вынимаем один за другим два шара. Какова вероятность вытащить вторым белый шар? Рассмотрим события: A – «первый шар белый» и B – «второй шар белый». Понятно, что $P(A) = 2/3$. Если событие A произошло, то среди оставшихся 14 шаров только 9 белых, поэтому вероятность события B будет равна 9/14. Если же событие A не произошло, т.е. первый шар оказался черным, то среди 14 оставшихся в урне шаров будет 10 белых, и вероятность B будет равна 10/14 или 5/7. Таким образом, вероятность появления события B зависит от того, произошло или нет событие A, т.е. вероятность B – условная, и $P(B/A) = 9/14$, $P(B/\overline{A}) = 5/7$.

На основании формул (5.1) и (5.2) можно дать способ вычисления вероятности произведения двух событий:

$$P(AB) = P(B) \cdot P(A/B) = P(A) \cdot P(B/A). \qquad (5.3)$$

Сформулируем это правило в виде теоремы.

Теорема 5.1. Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие наступило.

Задача 5.1. Из колоды в 36 карт наугад вынимаем 2 карты. Вычислим вероятность того, что а) вынуты две дамы; б) вынуты дама и валет.

Решение. Обозначим события: A – «первая карта – дама», B – «вторая карта – дама», C – «вторая карта – валет». Мы хотим вычислить вероятности $P(AB)$ и $P(AC)$. Поскольку в колоде 4 дамы, то $P(A) = 4/36$. Если одна дама из колоды уже вынута, то вероятность того, что вторая карта – тоже дама, равна $P(B/A) = 3/5$. Вероятность того, что вторая карта – валет, очевидно, равна $P(C/A) = 4/35$. Согласно формуле (5.3.)

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = (4/36) \cdot (3/35) = 1/105, \text{ а}$$
$$P(AC) = P(A) \cdot P(C/A) = (4/36) \cdot (4/35) = 4/315.$$

Ответ. а) 1/105; б) 4/315.

Задача 5.2. Студент на экзамене знает 20 вопросов из 25. Преподаватель задает два вопроса. Какова вероятность, что студент знает оба эти вопроса?

Решение. Пусть событие А – «студент ответит на первый вопрос». Событие В – «студент ответит на второй вопрос». Вероятность $P(A) = 20/25 = 0{,}8$. Если событие А произошло, то остается 19 известных вопросов из 24, то есть $P(B/A) = 19/24$. Получаем $P(AB) = 0{,}8 \cdot 19/24 = 0{,}6333$.

Ответ. 0,6333.

Задача 5.3. В коробке десять красных, пять синих и два желтых шара. Один за другим (без возвращения) вынимаются три шара. Какова вероятность, что: а) последовательно вынуты шары: желтый, синий, красный? б) последовательно вынуты три разноцветных шара?

Решение. Р(Ж-С-К) = (2/17)(5/16)(10/15) = 5/204.

$$P(A) = \frac{2}{17}\frac{5}{16}\frac{10}{15} + \frac{2}{17}\frac{10}{16}\frac{5}{15} + \frac{10}{17}\frac{2}{16}\frac{5}{15} + \frac{10}{17}\frac{5}{16}\frac{2}{15} +$$
$$+\frac{5}{17}\frac{2}{16}\frac{10}{15} + \frac{5}{17}\frac{10}{16}\frac{2}{15} = 6 \cdot \frac{2 \cdot 5 \cdot 10}{17 \cdot 16 \cdot 15} \approx 0{,}441.$$

Ответ. а) 5/204; б) 0,441.

Задача 5.4. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Определить вероятность того, что: а) студент знает все три предложенные ему вопроса; б) студент не знает лишь второй из трёх предложенных ему вопросов; в) студент не знает только один из трёх предложенных ему вопросов.

Решение. Введём обозначения: событие A – студент знает три вопроса; событие B – студент не знает второй вопрос; событие C – студент не знает один из трёх вопросов; событие D_i – студент знает i-й предложенный ему вопрос ($i = 1,2,3$).

Тогда события A, B и C можно представить так:

$$A = D_1 D_2 D_3\,,\; B = D_1 \overline{D}_2 D_3\,,\; C = \overline{D}_1 D_2 D_3 + D_1 \overline{D}_2 D_3 + D_1 D_2 \overline{D}_3\,.$$

События D_1, D_2 и D_3 являются зависимыми, потому что вероятность знания или незнания каждого следующего вопроса изменяется в зависимости от осуществления или неосуществления предыдущего события.

Поэтому $P(A) = P(D_1)\cdot P\left(\dfrac{D_2}{D_1}\right)\cdot P\left(\dfrac{D_3}{D_1 D_2}\right) = \dfrac{20}{25}\cdot\dfrac{19}{24}\cdot\dfrac{18}{23} = \dfrac{57}{115}$,

$$P(B) = P\left(D_1 \overline{D}_2 D_3\right) = P(D_1)\cdot P\left(\frac{\overline{D}_2}{D_1}\right)\cdot P\left(\frac{D_3}{D_1 \overline{D}_2}\right) = \frac{20}{25}\cdot\frac{5}{24}\cdot\frac{19}{23} = \frac{14}{138}\,.$$

При нахождении вероятности события C учтём, что слагаемые – несовместные события.

$$P(C) = P\left(\overline{D}_1 D_2 D_3\right) + P\left(D_1 \overline{D}_2 D_3\right) + P\left(D_1 D_2 \overline{D}_3\right) =$$

$$= \frac{5}{25}\cdot\frac{20}{24}\cdot\frac{19}{23} + \frac{20}{25}\cdot\frac{5}{24}\cdot\frac{19}{23} + \frac{20}{25}\cdot\frac{19}{24}\cdot\frac{5}{23} = 3\cdot\frac{19}{138} = \frac{57}{138}\,.$$

Ответ. а) 57/115; б) 14/138; в) 57/138.

Задача 5.5. В ящике находятся 6 катушек белых, 4 катушки чёрных и 2 катушки красных ниток. Катушки извлекаются по одной без возвращения. Определить вероятность того, что катушка с белыми нитками появится раньше, чем катушка с чёрными нитками.

Решение. По условию задачи после появления катушки с белыми нитками извлечения прекращаются, после появления катушки с красными нитками проводится следующее извлечение, катушка с чёрными нитками не должна появляться. Если A – случайное событие – катушка с белыми нитками появилась раньше, чем катушка с чёрными нитками, то $A = A_1 + C_1 A_2 + C_1 C_2 A_3$, где A_i – появление катушки с белыми нитками при i-ом извлечении (i = 1, 2, 3), C_i – появление катушки с красными нитками при i-ом извлечении (i = 1, 2). Здесь события-слагаемые – несовместные события, а события-сомножители – зависимые события, так как катушки извлекаются без возвращения и возможность извлечь катушку какого-то конкретного цвета зависит от результатов предыдущих извлечений. Поэтому $P(A) = P(A_1) + P(C_1) P\left(\frac{A_2}{C_1}\right) + P(C_1) P\left(\frac{C_2}{C_1}\right) P\left(\frac{A_3}{C_1 C_2}\right) =$

$$\frac{6}{12} + \frac{2}{12} \cdot \frac{6}{11} + \frac{2}{12} \cdot \frac{1}{11} \cdot \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

Ответ. 3/5.

Задача 5.6. Какова вероятность при бросании двух кубиков получить четную сумму при условии, что хотя бы на одном выпало 6 очков.

Решение. Обозначим события: A – «получить четную сумму», B – «хотя бы на одном кубике выпало 6 очков», тогда: $P(AB) = \frac{5}{36}$, $P(B) = \frac{11}{36}$, $P(A/B) = \frac{5}{11}$.

Ответ. 5/11.

Задача 5.7. Буквы Т, Е, И, Я, Р, О написаны на отдельных карточках. Ребенок берет карточки в случайном порядке и прикладывает одну к другой: а) 3 карточки; б) все 6 карточек. Какова вероятность того, что получится слово: а) «ТОР»; б) «ТЕОРИЯ»?

Решение. а) Пусть событие А – получение слова «ТОР». $P(A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{120}$.

б) Пусть событие В – получение слова «ТЕОРИЯ». $P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{720}$.

Ответ. а) $\frac{1}{120}$; б) $\frac{1}{720}$.

Задача 5.8. Буквы А, А, А, Н, Н, С написаны на отдельных карточках. Ребенок берет карточки в случайном порядке и прикладывает одну к другой все 6 карточек. Какова вероятность того, что получится слово «АНАНАС»:

Решение. Пусть событие A – получение слова «АНАНАС».

$P(A)=\frac{3\cdot 2\cdot 2\cdot 1\cdot 1\cdot 1}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=\frac{1}{60}$.

Ответ. $\frac{1}{60}$.

Задача 5.19. Из 30 студентов 10 имеют спортивные разряды. Какова вероятность того, что выбранные наудачу 3 студента – разрядники?

Решение. Пусть событие A – 3 выбранных наудачу студента – разрядники.

$$P(A)=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{30\cdot 29\cdot 28}=\frac{6}{203}.$$

Ответ. $\frac{6}{203}$.

Задача 5.10. В урне 9 белых шаров и 1 черный шар. Вынули сразу три шара. Какова вероятность, что все шары белые?

Решение. $P(A)=\frac{9}{10}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{7}{8}=\frac{7}{10}$.

Ответ. 7/10.

Задача 5.11. Из колоды в 36 карт одну за другой вытаскивают три карты. Какова вероятность того, что первой картой будет туз, второй – король, третьей – дама?

Решение. $P(A)=\frac{4}{36}\cdot\frac{4}{35}\cdot\frac{4}{34}=\frac{8}{5355}$.

Ответ. 8/5355.

Задача 5.12. Буквы слова ПОКОЛЕНИЕ выписаны на карточках. Наудачу вынимают одну карточку за другой и укладывают по порядку. Найти вероятность того, что получится слово ПОЛЕ.

Решение. $P(A)=\frac{1}{9}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{2}{6}=\frac{1}{756}$.

Ответ. 1/756.

Задача 5.13. В урне два белых и три черных шара. Два игрока поочередно вынимают из урны по шару, не вкладывая их обратно. Выигрывает тот, кто раньше получит белый шар. Найти вероятность того, что выиграет первый игрок.

Решение. Пусть событие A – выиграет первый игрок. $P(A)=\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{3}{5}$.

Ответ. 3/5.

Задача 5.14. Из полной колоды карт (52 листа) вынимаются сразу четыре карты. Найти вероятность того, что все эти четыре карты будут разных мастей.

Решение. Первая карта может быть какой угодно масти; вторая должна быть не такой, как первая; третья – не такой, как первая и вторая; четвертая – не такой, как три первые. Искомая вероятность равна: $P(A)=1\cdot\frac{39}{51}\cdot\frac{26}{50}\cdot\frac{13}{49}\approx 0{,}106$.

Ответ. 0,106.

Задача 5.15. Из полной колоды карт (52 листа) вынимаются сразу четыре карты. Каждая карта после вынимания возвращается в колоду. Найти вероятность того, что все эти четыре карты будут разных мастей.

Решение. $P(A)=1\cdot\frac{39}{52}\cdot\frac{26}{52}\cdot\frac{13}{52}\approx 0{,}094$.

Ответ. 0,094.

Задача 5.16. Из полной колоды карт (52 листа) вынимают сразу две карты. Одну из них смотрят – она оказалась дамой; после этого две вынутые карты перемешивают и одну из них берут наугад. Найти вероятность того, что она окажется тузом.

Решение. Чтобы событие A – появление туза при втором вынимании – имело место, нужно, прежде всего, мы вынули не ту карту, которую вынули в первый раз (вероятность этого 1/2); затем, чтобы вторая карта была тузом.

$$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{51} = \frac{2}{51}.$$

Ответ. 2/51.

Задача 5.17. Условия опыта те же, что в предыдущей задаче, но первая (посмотренная) карта оказалась тузом; найти вероятность того, что при втором вынимании мы получим тоже туз.

Решение. Событие A – туз при втором вынимании – может произойти в двух вариантах: A_1 – второй раз появился тот же туз, что и первый раз; A_2 – второй раз появился не тот, а другой туз.

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{51} = \frac{27}{51}.$$

Ответ. 27/51.

Задача 5.18. В барабане револьвера семь гнезд, из них в пяти заложены патроны, а два оставлены пустыми. Барабан приводится во вращение, в результате чего против ствола случайным образом оказывается одно из гнезд. После этого нажимается пусковой крючок; если ячейка была пустая, выстрела не происходит. Найти вероятность того, что, повторив такой опыт два раза подряд, мы оба раза не выстрелим.

Решение. Так как любое гнездо при первом выстреле может сочетаться с любым во втором, число случаев $n = 7 \cdot 7 = 49$.Число благоприятных случаев равно числу комбинаций пустых гнезд: $m = 2 \cdot 2 = 4$; $p = \frac{m}{n} = \frac{4}{49}$.

Ответ. $\frac{4}{49}$.

Задача 5.19. В условиях задачи 5.19 найти вероятность того, что оба раза выстрел произойдет.

Решение. По-прежнему $n = 49$. Число благоприятных случаев $m = 5 \cdot 4 = 20$, так как при первом выстреле гнездо с патроном можно выбрать пятью способами, а при втором выстреле – четырьмя: $p = \frac{m}{n} = \frac{20}{49}$.

Ответ. $\frac{20}{49}$.

6. Независимые события.

Введем теперь понятие независимого события.

Определение 6.1. Если $P(B/A) = P(B)$, т.е. условная вероятность события B равна его безусловной вероятности, то событие B называют **независимым** от события A.

В этом случае, из формулы (5.3) следует, что

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)\,, \tag{6.1}$$

и теорема о произведении двух событий принимает очень простой вид.

Теорема 6.1. (*о произведении двух независимых событий*). Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

Рассмотрим, как рассчитать вероятность совокупного результата двух или более экспериментов, которые проводятся в независимых друг от друга условиях.

Итак, вероятность события A остается постоянной как при условии, что B произошло, так и при условии, что В не произошло. Именно это мы принимаем за независимость в обыденной жизни.

На практике обычно для установления независимости событий не используют формальное определение и не анализируют формулы, а определяют независимость интуитивно. Например, нетрудно сообразить, что результаты нескольких подбрасываний монеты или кубика – независимые события.

Задача 6.1. Бросаем две игральные кости. Какова вероятность выпадения на первой кости пяти очков, а на второй – не менее трех очков?

Решение. Обозначим события: A – «выпадение пяти очков на первой кости», B – «выпадение не менее трех очков на второй кости». $P(A) = 1/6$, $P(B) = 4/6 = 2/3$. Очевидно, что события A и B совместны и независимы, поэтому $P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 1/9$.

Ответ. 1/9.

Определение 6.2. События $A_1, A_2, ..., A_k$ из будем называть **независимыми в совокупности**, если вероятность совместного наступления любых n ($n \geqslant 2$) из этих событий равна произведению их вероятностей.

Для событий, независимых в совокупности, верна следующая теорема, обобщающая теорему 6.1.

Теорема 6.2. (*о произведении событий, независимых в совокупности*) Если события $A_1, A_2, ..., A_k$ независимы в совокупности, то

$$P(A_1, A_2, ..., A_k) = P(A_1)P(A_2)...P(A_k), \tag{6.2}$$

т.е. вероятность произведения событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий.

Заметим, что для независимости в совокупности нескольких событий недостаточно их попарной независимости. В этом можно убедиться на следующем примере, принадлежащем С.Н. Бернштейну.

Пример 6.1. Пусть грани тетраэдра (четырехгранной пирамиды) раскрашены следующим образом: первая грань – красного цвета, вторая – зеленого, третья – синего, а на четвертой грани есть все эти три цвета. Выбираем на тетраэдре одну грань случайным образом. Обозначим события следующим образом: A – «на выбранной грани есть красный цвет», B – «на выбранной грани есть зеленый цвет», C – «на этой грани есть синий цвет».

Всего тетраэдр имеет 4 грани, на двух из них есть красный цвет, поэтому $P(A) = 2/4 = 1/2$. Аналогично вычисляем $P(B) = P(C) = 1/2$.

Допустим, что произошло событие B, т.е. мы выбрали вторую или четвертую грань. Тогда событие A может наступить при условии, что B уже произошло, только в одном из двух случаев (только на четвертой грани есть красный цвет, а на второй грани его нет). Поэтому $P(A/B) = 1/2$. Аналогично $P(A/C) = P(B/C) = 1/2$.

Из равенства $P(A) = P(A/B)$ следует, что события A и B независимы. Из равенств $P(B) = P(B/C)$ и $P(A) = P(A/C)$ следует, что B и C, A и C тоже попарно независимы.

Однако, если произошли события B и C одновременно (на грани есть и синий и зеленый цвета), то заведомо и событие A произошло (на этой грани есть и красный цвет тоже), т.е. $P(A/BC) = 1$.

Таким образом, $P(A) \neq P(A/BC)$, это означает, что события A, B и C не являются независимыми в совокупности, хотя они попарно независимы.

Вероятность события ABC (на грани есть все три цвета) очевидно, равна 1/4. Эта вероятность может быть вычислена с помощью формулы (5.3), но формула (6.2) здесь неприменима.

Задача 6.2. Пусть события А, В, С состоят в попадании точки в фигуры, указанные на рисунке, расположенные внутри общего правильного треугольника (проведены средние линии). Независимы ли события А, В, С в совокупности?

Решение. Здесь $P(A) = P(B) = P(C) = 0{,}5$; $P(AB) = P(BC) = P(AC) = 0{,}25$, следовательно, есть попарная независимость. Однако $P(ABC) = 0.25$, в то время как $P(A)\,P(B)\,P(C) = 1/8 = 0{,}125$.

Ответ. В совокупности события А, В и С зависимы.

Перейдем теперь к расчету вероятностей совокупных результатов последовательных или совместных испытаний, независимых с точки зрения «физики».

Задача 6.3. Мишень состоит из концентрических кругов. За попадание в определенную часть мишени начисляются очки, согласно схеме на рисунке ниже. Первый стрелок попадает в «десятку» мишени с вероятностью 0,2, в «девятку» – с вероятностью 0,3, в «восьмерку» – с вероятностью 0,4. В остальную часть мишени или мимо – с вероятностью 0,1. Ве-

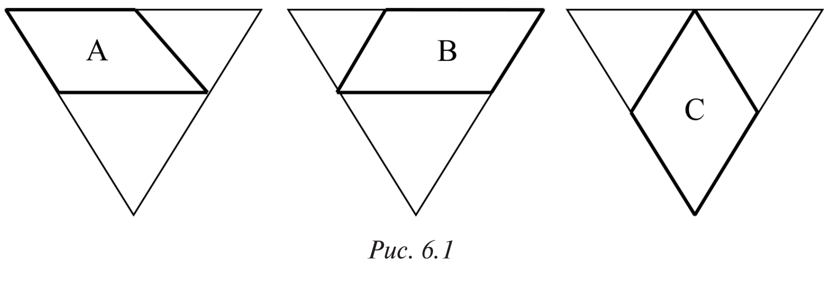


Рис. 6.1

роятности поражения указанных в примере частей мишени вторым стрелком таковы: «в десятку» – 0.3, «в девятку» – 0.6, «в восьмерку»- 0,1. Эксперимент заключается в том, что два стрелка дают залп помишени (делают по одному выстрелу одновременно). Будем считать, чторезультат выстрела второго стрелка не зависит от результата первого с точки зрения «физики» эксперимента, то есть мы имеем дело с совместными независимыми испытаниями. Каковы вероятности событий: 1) «у первого стрелка – 10 очков и у второго – 9», 2) «сумма очков за выстрел у команды из двух стрелков не менее 18»?

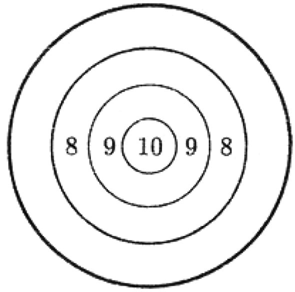


Рис. 6.1

Решение. «Физическая» независимость явлений A и B, как уже обсуждалось, основана на том, что шанс появления A при условии B, что B произошло, равен шансу появления A при условии, что B не произошло. Пусть событие A – «у первого стрелка – 10 очков»; B – «у второго стрелка – 9 очков». Получаем, что P(AB) = P(A) P(B) = 0,2 · 0,6 = 0,12.

Рассуждая аналогично, получаем: вероятность, что команда набрала не менее 18 очков, равна сумме вероятностей событий, описываемых ниже.

Событие	Число очков у первого	Число очков у второго
A_1	10	10
A_2	10	9
A_3	10	8
A_4	9	10
A_5	9	9
A_6	8	8

$$P = P(A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6) = 0{,}2 \cdot 0{,}3 + 0{,}2 \cdot 0{,}6 +$$
$$+ 0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}3 \cdot 0{,}3 + + 0{,}3 \cdot 0{,}6 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}59.$$

Ответ. 1) 0,12; 2) 0,59.

Выделим два очевидных следствия из теоремы сложения вероятностей, которые относятся к вычислению вероятности суммы независимых событий.

Теорема 6.3. Пусть события А и В независимы. Тогда

$$P(A + B) = 1 - P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}), \qquad (6.3)$$

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B). \qquad (6.4)$$

Задача 6.4. Два охотника одновременно выстрелили в зайца. Первый попадает в 70 % случаев, а второй – в 20 %. Какова вероятность, что заяц будет подстрелен?

Решение. Если А, В – события, состоящие в попадании соответственно, первого, второго охотников, то А + В – попадание хотя бы одного из них. Поэтому $P(A + B) = 0{,}7 + 0{,}2 - 0{,}7 \cdot 0{,}2 = 1 - 0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}76$.

Ответ. 0,76.

Здесь считалось, что А и В – независимые события. Заметим, что одновременный залп повышает вероятность попадания и с точки зрения теории.

Обозначим: Для $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $P(A_i) = p_i$, а вероятность противоположного события $P(\bar{A}_i) = 1 - p_i = q_i$. В итоге получаем формулу для вычисления вероятности появления хотя бы одного события:

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 q_3 \ldots q_n \qquad (6.5)$$

Замечание. Если все события $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3, \ldots, \bar{A}_n$ имеют одну и ту же вероятность $\boldsymbol{p}$, то вероятность появления хотя бы одного из этих событий

$$P(A) = 1 - q^n \qquad (6.6)$$

Задача 6.5. Вероятность правильного ответа студента на первый вопрос билета – 0,6, на второй – 0,3, на третий – 0,8. Какова вероятность, что студент правильно ответит хотя бы на один вопрос билета?

Решение. Обозначим A_1 – событие «правильный ответ на первый вопрос», A_2 – событие «правильный ответ на второй вопрос», A_3 – событие «правильный ответ на третий вопрос». Событие А –

«ответ на хотя бы один вопрос» означает ответ на один вопрос или на два вопроса или на все три вопроса. События А (ответ на хотя бы один вопрос) и $\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$ (студент не ответил ни на один вопрос) противоположны, следовательно сумма их вероятностей равна единице: $P(A) + P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3) = 1$. Тогда

$$P(A) = 1- P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) =$$
$$= 1 - 0{,}4\cdot0{,}7\cdot0{,}2 = 0{,}944.$$

Ответ. 0,944.

Задача 6.5. Три стрелка делают по одному выстрелу. Вероятность того, что первый стрелок попадет в цель, равна 0,8; для второго и третьего стрелков эти вероятности равны соответственно 0,7 и 0,4. Вычислим вероятности следующих событий: 1) все три стрелка попадут в цель; 2) ровно один стрелок попадет в цель; 3) хотя бы один стрелок попадет в цель.

Решение. Пусть B – «все три стрелка попадут в цель», C – «ровно один стрелок попадет в цель» и D – «хотя бы один стрелок попадет в цель». Обозначим события: A_1 – «первый стрелок попал в цель»; A_2 – «второй стрелок попал в цель»; A_3 – «третий стрелок попал в цель». Тогда события B, C и D могут быть записаны в следующем виде: $B = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$, $C = A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3$, $D = A_1 + A_2 + A_3$.

По условию $P(A_1) = 0{,}8$; $P(A_2) = 0{,}7$; $P(A_3) = 0{,}4$; поэтому $P(\bar{A}_1) = 1–0{,}8 = 0{,}2$; $P(\bar{A}_2) = 0{,}3$; $P(\bar{A}_3) = 0{,}6$.

События A_1, A_2, A_3 – независимые (каждый стрелок попадает или нет независимо от другого), значит, согласно теореме 6.1,

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0{,}8\times0{,}7\times0{,}4 = 0{,}224.$$

Событие C мы представили в виде суммы несовместных событий и, используя теоремы 4.1. и 6.1, получим:

$$P(C) = P(A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3) + P(\bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3) + P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3) =$$
$$= 0{,}8\times0{,}3\times0{,}6 + 0{,}2\times0{,}7\times0{,}6 + 0{,}2\times0{,}3\times0{,}4 = 0{,}252.$$

Чтобы найти $P(D)$, мы перейдем к противоположному событию $\bar{D}$, состоящему в том, что ни один стрелок не попал.

Тогда $P(D) = 1 - P(\bar{D})\ 1 - P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3) = 1 - 0{,}2 \times 0{,}3 \times 0{,}6 = 0{,}964$.

Ответ. 1) 0,224; 2) 0,252; 3) 0,964.

Задача 6.6. Какова вероятность того, что наудачу взятое натуральное число не делится: *а*) ни на два, ни на три; *б*) на два или на три?

Решение. Пусть случайное событие A – наудачу взятое число не делится ни на два, ни на три; случайное событие B – наудачу взятое число не делится на два или на три. Введём ещё два события: C – наудачу взятое число не делится на два; D – наудачу взятое число не делится на три. Тогда, очевидно, $A = C \cdot D$, $B = C + D$. События C и D независимы, так как и среди всех натуральных чисел и среди нечётных натуральных чисел два числа из идущих подряд трёх не делятся на три, следовательно, $P(A) = P(C) \times$ $\times P(D) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

Однако события C и D совместны, поэтому:

$$P(B) = P(C) + P(D) - P(CD) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{6}.$$

Ответ. а) 1/3; б) 5/6.

Задача 6.7. Из урны, содержащей 6 белых и 4 чёрных шара, наудачу последовательно извлекается по одному шару до первого появления чёрного шара. Найти вероятность того, что придётся производить четвёртое извлечение, если извлечения шаров производятся: *а*) с возвращением шаров в урну; *б*) без возвращения шаров в урну.

Решение. Случайное событие A – будет производиться четвёртое извлечение. Ясно, что четвёртое извлечение будет производиться в том случае, если при первых трёх извлечениях не появится чёрный шар. Обозначим через A_i случайное событие – при i-ом извлечении появился шар белого цвета ($i = 1,2,3$). Тогда $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$, следовательно, $P(A) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3)$.

а) В этом случае шары извлекаются с возвращением, поэтому вероятность извлечения белого шара в очередной раз не зависит от результатов предыдущих извлечений, поэтому события A_i независимы и $P(A)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)=0,6^3=0,216.$

б) Если шары извлекаются без возвращения, то после каждого извлечения состав урны изменяется, следовательно, изменяются и вероятности извлечения шаров. События A_i в этом случае зависимы, поэтому $P(A)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1A_2)=\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\approx 0,167$.

Ответ. а) 0,216; б) 0,167.

Задача 6.8. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле у каждого из двух стрелков равна 0,3. Стрелки стреляют по очереди, причём каждый может сделать по два выстрела. Попавший в мишень первым получает приз. Найти вероятности получения приза для каждого из стрелков и вероятность того, что приз будет вручён стрелкам. Какова вероятность того, что приз останется у организаторов соревнования?

Решение. Обозначим события, вероятности которых следует определить. A – приз будет вручён первому стрелку; B – приз будет вручён второму стрелку; C – приз будет вручён стрелкам; $\overline{C}$ – приз останется у организаторов соревнования.

Введём также события:

A_i – первый стрелок попал в мишень при i-ом выстреле;

B_i – второй стрелок попал в мишень при i-ом выстреле ($i = 1, 2$).

Тогда можно записать: $A=A_1+\overline{A}_1\overline{B}_1A_2$, $B=\overline{A}_1B_1+\overline{A}_1\overline{B}_1\overline{A}_2B_2$, $C=A+B$.

События-слагаемые во всех случаях – несовместные события, а события-сомножители – независимые события, так как вероятность попадания в мишень каждым из стрелков не зависит ни от номера выстрела, ни от результата предыдущего выстрела. Таким образом:

$$P(A)=P(A_1)+P(\overline{A}_1)P(\overline{B}_1)P(A_2)=0,3+0,7\cdot 0,7\cdot 0,3=0,447\,;$$

$$P(B)=P(\overline{A}_1)P(B_1)+P(\overline{A}_1)P(\overline{B}_1)P(\overline{A}_2)P(B_2)=$$

$$= 0,7 \cdot 0,3 + 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,7 = 0,7 \cdot P(A) = 0,3129;$$

$$P(C) = P(A) + P(B); \; P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 0,2401.$$

Вероятность события можно найти иначе:

$$P(\overline{C}) = P(\overline{A}_1) P(\overline{B}_1) P(\overline{A}_2) P(\overline{B}_2) = 0,7^4 = 0,2401.$$

Ответ. Вероятность получения приза для стрелка *A* равна 0,447; для игрока *B* – 0,3129; вероятность того, что приз будет вручён стрелкам – 0,7599; вероятность того, что приз останется у организаторов соревнования – 0,2401.

Задача 6.9. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и набирает её наудачу. Определить вероятность того, что он наберёт нужный номер не более чем за три попытки.

Решение. Случайное событие *A* – абонент дозвонился не более, чем за три попытки набора номера. Пусть случайное событие A_i – абонент дозвонился при *i*-ом наборе номера ($i = 1, 2, 3$). Так как каждый следующий набор номера производится только в том случае, если предыдущая попытка оказалась неудачной, то $A = A_1 + \overline{A}_1 A_2 + \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3$. Здесь события-слагаемые несовместны, а события-сомножители зависимы, поскольку при каждом следующем наборе номера абонент учитывает результат предыдущих попыток. Значит,

$$P(A) = P(A_1) + P(\overline{A}_1) \cdot P\left(\frac{A_2}{\overline{A}_1}\right) +$$

$$+ P(\overline{A}_1) \cdot P\left(\frac{\overline{A}_2}{\overline{A}_1}\right) \cdot P\left(\frac{A_3}{\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2}\right) = \frac{1}{10} + \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{9} + \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{10}.$$

Вероятность события *A* можно также найти, вычислив сначала вероятность противоположного события $\bar{A}$ и использовав формулу $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.

Случайное событие $\bar{A}$ – абонент не дозвонился за три набора номера – есть произведение трёх событий: $\overline{A} = \overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3$, поэтому

$$P\left(\overline{A}\right)=P\left(\overline{A}_1\right)\cdot P\left(\frac{\overline{A}_2}{\overline{A}_1}\right)\cdot P\left(\frac{A_3}{\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2}\right)=\frac{9}{10}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{7}{8}=\frac{7}{10},\ P(A)=1-0{,}7=0{,}3.$$

Ответ. 0,3.

Задача 6.10. В первой урне находятся три белых, пять красных и семь синих шаров, во второй урне – два белых, четыре красных и девять синих шаров. Из каждой урны наудачу извлекают по одному шару. Найти вероятность того, что извлечённые шары будут одного цвета.

Решение. Случайное событие D – извлечённые шары одного цвета. Введём ещё шесть случайных событий:

A_i – из i-ой урны извлекли шар белого цвета;

B_i – из i-ой урны извлекли шар красного цвета;

C_i – из i-ой урны извлекли шар синего цвета; $i = 1{,}2$.

Вероятности этих событий легко вычисляются по классическому определению вероятности. Очевидно, что шары будут одного цвета, если они будут оба или белого, или красного, или синего цвета. Значит, $D=A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2$.

Ясно, что события-слагаемые несовместны, а события-сомножители независимы. Следовательно,

$$P\left(D\right)=P\left(A_1A_2\right)+P\left(B_1B_2\right)+P\left(C_1C_2\right)=$$
$$=P\left(A_1\right)P\left(A_1\right)+P\left(B_1\right)P\left(B_2\right)+P\left(C_1\right)P\left(C_2\right)=$$
$$=\frac{3}{15}\cdot\frac{2}{15}+\frac{5}{15}\cdot\frac{4}{15}+\frac{7}{15}\cdot\frac{9}{15}=\frac{89}{225}.$$

Ответ. 89/225.

Задача 6.11. Игрок A поочерёдно играет с игроками B и C, имея вероятность выигрыша в каждой партии 2/3, и прекращает игру после первого проигрыша или после двух сыгранных с каждым игроком партий. Определить вероятности выигрыша игры игроками A, B и C.

Решение. Обозначим через A, B и C события – выигрыш игры игроком A, B и C соответственно и через B_i, C_i события – выигрыш игроком B или C i-ой партии ($i = 1,2$). Так как выигрыш партии каждым из игроков B или C означает проигрыш партии и, следовательно, остановку игры ведущим её игроком A, то случайные события A, B, C можно записать в виде:

$$A = \overline{B}_1\overline{C}_1\overline{B}_2\overline{C}_2\,;\; B = B_1 + \overline{B}_1\overline{C}_1 B_2\,;\; C = \overline{B}_1 C_1 + \overline{B}_1\overline{C}_1\overline{B}_2 C_2\,.$$

Здесь события-слагаемые будут несовместными, а события-сомножители – независимыми событиями, поэтому

$$P(A) = P(\overline{B}_1)P(\overline{C}_1)P(\overline{B}_2)P(\overline{C}_2) = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{16}{81},$$

$$P(B) = P(B_1) + P(\overline{B}_1)\cdot P(\overline{C}_1)\cdot P(B_2) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{13}{27},$$

$$P(C) = P(\overline{B}_1)P(C_1) + P(\overline{B}_1)P(\overline{C}_1)P(\overline{B}_2)P(C_2) =$$
$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{26}{81}.$$

Ответ. Вероятности выигрыша игры игроком А – 16/81, игроком В – 13/27 и игроком С – 26/81.

Замечание. Так как события A, B и C образуют полную группу ($A+B+C=U$) и попарно несовместны, то $P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) = 1$, поэтому вероятность одного из событий, например C, можно было найти так: $P(C) = 1 - P(A) + P(B) = 1 - \frac{16}{81} - \frac{13}{27} = \frac{26}{81}$.

Задача 6.12. Брошены последовательно три монеты. Определить, зависимы или независимы события: А = {выпадение «герба» на первой монете}; В = {выпадение хотя бы одной решки}.

Решение. $P(A) = \frac{1}{2}$; $P(B) = 1 - \frac{1}{2^3} = \frac{7}{8}$; $P(AB) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^3}\right) = \frac{3}{8}$.

Ответ. События зависимы.

Задача 6.13. Для того чтобы сбить самолет, достаточно одного попадания. Было сделано три выстрела с вероятностями попадания 0,1; 0,2 и 0,4 соответственно. Какова вероятность, что самолет сбит?

Решение. Обозначим событие А – «самолет сбит». Чтобы найти $P(A)$, мы перейдем к противоположному событию $\bar{A}$, состоящему в том, что самолет не сбит.

Тогда $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3) = 1 - 0{,}9 \times 0{,}8 \times 0{,}7 = 0{,}568$.

Ответ. 0,568.

Задача 6.14. Для того чтобы разрушить мост, нужно попадание не менее двух бомб. Независимо сбросили три бомбы с вероятностями попадания 0,1; 0,3 и 0,4. Какова вероятность, что мост разрушен?

Решение. $P(A) = 0{,}9 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 + 0{,}1 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}6 + 0{,}1 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}166$.

Ответ. 0,166.

Задача 6.15. Какова вероятность того, что при многократном бросании игральной кости шестерка выпадет впервые на четвертом броске?

Решение. $P(A) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{125}{1296}$.

Ответ. 125/1296.

Задача 6.16. Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 4 очка в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 3 очка, в случае ничьей – 1 очко, если проигрывает – 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,4.

Решение. $0{,}4 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}32$

Ответ. 0,32.

Задача 6.17. Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,9, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из не пристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,2. На столе лежит 10 револьверов, из них только 4 пристрелянные. Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватает первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон промахнется.

Решение. Джон берет пристрелянный револьвер и промахивается или берет не пристрелянный револьвер и промахивается: $0{,}4 \cdot 0{,}1 + 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}52$.

Ответ. 0,52.

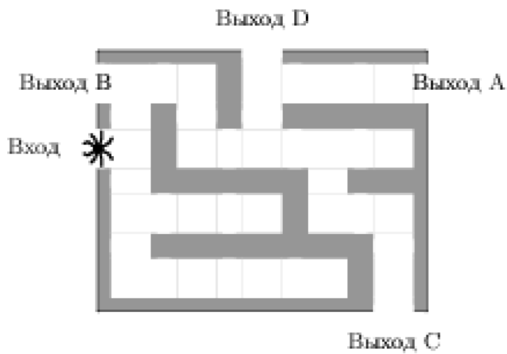
Задача 6.18. Если гроссмейстер А играет белыми, то он выигрывает у гроссмейстера Б с вероятностью 0,52. Если А играет черными, то А выигрывает у Б с вероятностью 0,3. Гроссмейстеры А и Б играют две партии, причем во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А выиграет оба раза.

Ответ. 0,156.

Задача 6.19. Биатлонист пять раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что биатлонист первые три раза попал в мишени, а последние два промахнулся. Результат округлите до сотых.

Ответ. 0,02.

Задача 6.20. На рисунке изображён лабиринт. Паук заползает в лабиринт в точке «Вход». Развернуться и ползти назад паук не может, поэтому на каждом разветвлении паук выбирает один из путей, по которому ещё не полз. Считая, что выбор дальнейшего пути чисто случайный, определите, с какой вероятностью паук придёт к выходу D.



Ответ. 1/16.

Задача 6.21. В Волшебной стране бывает два типа погоды: хорошая и отличная, причём погода, установившись утром, держится неизменной весь день. Известно, что с вероятностью 0,8 погода завтра будет такой же, как и сегодня. Сегодня 3 июля, погода в Волшебной стране хорошая. Найдите вероятность того, что 6 июля в Волшебной стране будет отличная погода.

Ответ. 0,392.

7. Полная вероятность. Формула Байеса

Выведем теперь еще две важные формулы – формулу полной вероятности и формулу Байеса.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть требуется найти вероятность события A, которое происходит обязательно вместе с одним из событий B_1, B_2, ...B_n, образующих полную группу попарно несовместных событий. Тогда, если событие A наступило, то обязательно произошло одно из событий AB_1, AB_2, ... AB_n. Это означает, что $A = AB_1 + AB_2 + ... + AB_n$. Поскольку события B_1, B_2, ...B_n попарно несовместны, то и события AB_1, AB_2, ... AB_n обладают тем же свойством.

По теореме сложения вероятностей несовместных событий: $P(A) = P(AB_1) + P(AB_2) + ... + P(AB_n)$. Кроме того, по формуле (5.1) имеем: $P(AB_1) = P(A/B_1) \cdot P(B_1)$, $P(AB_2) = P(A/B_2) \cdot P(B_2)$, ..., $P(AB_n) = P(A/B_n) \cdot P(B_n)$. Следовательно,

$$P(A) = P(A/B_1)P(B_1) + P(A/B_2)P(B_2) + ... + P(A/B_n)P(B_n). \quad (7.1)$$

Равенство (7.1) носит название **формулы полной вероятности**. События B_1, B_2, ...B_n в этой формуле часто называют **гипотезами**. Это название оправдывается тем, что мы не знаем заранее, с каким из событий B_1, B_2, ...B_n вместе наступает событие A, и говорится, что A наступило в условиях той или иной гипотезы.

Задача 7.1. Город получает тетради от трех фабрик. Первая поставляет 30% общего числа тетрадей, вторая – 50%, третья – 20%. Среди тетрадей, сделанных на первой фабрике, – 60% имеют розовую обложку, на второй – 20%, на третьей – 80%. Какова вероятность, что купленная в этом городе наугад тетрадь будет в розовой обложке?

Решение. Здесь B_i ($i = 1, 2, 3$) – событие, соответствующее высказыванию «купить тетрадь i-й фабрики». А – «купить тетрадь в розовой обложке». По условию задачи: $P(B_1) = 0{,}3$, $P(B_2) = 0{,}5$, $P(B_3) = 0{,}2$, $P(A/B_1) = 0{,}6$, $P(A/B_2) = 0{,}2$, $P(A/B_3) = 0{,}8$. По формуле полной вероятности получаем, что $P(A) = 0{,}3 \cdot 0{,}6 + 0{,}5 \cdot 0{,}2 + 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}44$.

Ответ. 0,44.

Задача 7.2. Студент из n билетов знает ответы лишь на m билетов. Что вероятнее: сдать экзамен, взяв билет первым или взяв билет вторым?

Решение. Если студент берет билет первым, то вероятность равна m/n (классическая схема). Пусть он берет билет вторым, тогда введем две гипотезы: B_1 – первый отвечающий забрал «хороший билет», B_2 – первый отвечающий забрал «плохой билет». Очевидно, что $P(B_1) = m/n$, $P(B_2) = (n\text{-}m)/n$. По формуле (7.1) получаем:

$$P(A)=\frac{m}{n}\cdot\frac{m-1}{n-1}+\frac{n-m}{n}\cdot\frac{m}{n-1}=\frac{m}{n},$$

где $P(A)$ – вероятность сдать экзамен, идя вторым.

Ответ. Вероятность сдать экзамен, взяв билет первым или вторым одинаковая.

Попробуйте доказать, что она не зависит, от того каким по счету идти на экзамен.

Применяя формулу (5.1) легко найти вероятность $P(B_i/A)$ для любого i от 1 до n. Действительно, $P(B_i/A)=\dfrac{P(AB_i)}{P(A)}$. Подставляя в эту формулу значение $P(A)$ из (7.1) и учитывая, что $P(AB_i) = P(A/B_i)P(B_i)$, получаем

$$P(B_i/A)=\frac{P(A/B_i)P(B_i)}{P(A/B_1)P(B_1)+P(A/B_2)P(B_2)+\ldots+P(A/B_n)P(B_n)}. \qquad (7.2)$$

Формула (7.2) называется **формулой Байеса**. Она широко применяется при решении задач, связанных с вероятностной оценкой гипотез после проведения эксперимента, поскольку позволяет найти вероятность каждой гипотезы при условии, что событие A произошло.

Задача 7.3. В кузове грузовика 15 ящиков тушенки первого завода, 9 ящика второго и 6 ящика третьего завода. Вероятность производства брака на первом заводе – 0,03, на втором – 0,02, на третьем – 0,01. Взятая для контроля наудачу банка тушенки оказалась годной. На каком заводе вероятнее всего она была изготовлена?

Решение. Пусть событие А – «тушенка годная». Событие B_1- «тушенка сделана на 1 заводе», B_2 – «тушенка сделана на 2 заводе», B_3 – «тушенка сделана на 3 заводе». Из условия задачи: $P(B_1) = 15/30 = 0{,}5$; $P(B_2) = 0{,}3$; $P(B_3) = 0{,}2$. Тогда условные вероятности выпуска годной тушенки для отдельных заводов: $P(A/B_1) = 0{,}97$; $P(A/B_2) = 0{,}98$; $P(A/B_3) = 0{,}99$. По формуле полной вероятности вероятность выбора годной банки:

$$P(A) = P(B_1)\cdot P(A/B_1) + P(B_2)\cdot P(A/B_2) + P(B_3)\cdot P(A/B_3) =$$
$$= 0{,}5\cdot 0{,}97 + 0{,}3\cdot 0{,}98 + 0{,}2\cdot 0{,}99 = 0{,}977.$$

Вероятность выпуска годной банки соответственно на заводах 1,2,3, округляя до тысячных, находим по формуле Байеса:

$$P(B_1/A) = (P(B_1)\cdot P(A/B_1): P(A) = (0{,}5\cdot 0{,}97) : 0{,}977 \approx 0{,}496$$
$$P(B_2/A) = (P(B_2)\cdot P(A/B_2)) : P(A) = (0{,}3\cdot 0{,}98) : 0{,}977 \approx 0{,}300$$
$$P(B_3/A) = (P(B_3)\cdot P(A/B_3)) : P(A) = (0{,}2\cdot 0{,}99) : 0{,}977 \approx 0{,}204.$$

Ответ. Вероятнее всего банка была изготовлена на первом заводе.

Задача 7.4. Два станка производят детали, поступающие на общий конвейер. Вероятность получения стандартной детали на первом станке равна 0,9, на втором – 0,85. Производительность второго станка вдвое больше производительности первого. Вычислим вероятность того, что наудачу взятая с конвейера деталь стандартна.

Решение. Обозначим события: A – «наудачу взятая с конвейера деталь стандартна», B_1 – «взятая деталь изготовлена на первом станке», B_2 – «деталь изготовлена на втором станке». Очевидно, что $P(B_1) = 1/3$, $P(B_2) = 2/3$, $P(A/B_1) = 0{,}9$, $P(A/B_2) = 0{,}85$. Согласно формуле полной вероятности, $P(A) = 0{,}9 \cdot 1/3 + 0{,}8 \cdot 2/3 \approx 0{,}8667$.

Ответ. 0,8667.

Задача 7.5. Предположим, что в первой из трех урн 6 белых и 4 черных шарика, во второй – 7 белых и 3 черных, в третьей – только 8 белых. Наугад выбираем одну из трех урн, из нее наугад вынимаем шарик. Какова вероятность того, что шар белый?

Решение. Обозначим события: A – «вынут белый шарик», B_1 – «наугад выбрана первая урна», B_2 – «наугад выбрана вторая урна», B_3 – «наугад выбрана третья урна». Ясно, что $P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = 1/3$, $P(A/B_1) = 6/10 = 3/5$, $P(A/B_2) = 7/10$, $P(A/B_3) = 1$. Согласно формуле полной вероятности $P(A) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{3} + 1\frac{1}{3} = \frac{23}{30} \approx$ $\approx 0{,}7667$.

Ответ. 0,7667.

Задача 7.6. В первой из трех урн 6 белых и 4 черных шарика, во второй – 7 белых и 3 черных, в третьей – только 8 белых. Наугад выбираем одну из трех урн, из нее наугад вынимаем шарик. Он оказался белым. Какова вероятность того, что шар вынут из второй урны?

Решение. Обратите внимание на то, что формулировки задач 7.5 и 7.6 очень похожи. Они отличаются лишь поставленными вопросами. В первой из этих задач надо вычислить вероятность события A, которое происходит в условиях гипотез B_1, B_2 и B_3, и поэтому мы применяем формулу полной вероятности. Во второй задаче событие A уже произошло, требуется переоценить вероятность второй гипотезы, т.е. вычислить $P(B_2/A)$, значит, здесь нужно применить формулу Байеса.

События обозначаем так же, как и в задаче 7.5: A – «вынут белый шарик», B_1 – «наугад выбрана первая урна», B_2 – «наугад выбрана вторая урна», B_3 – «выбрана третья урна». Тогда $P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = 1/3$, $P(A/B_1) = 3/5$, $P(A/B_2) = 7/10$, $P(A/B_3) = 1$. Согласно формуле Байеса $P(B_2 / A) = \frac{(7/10) \cdot (1/3)}{(3/5) \cdot (1/3) + (7/10) \cdot (1/3) + 1/3} = \frac{7}{23} \approx 0{,}3043$.

Ответ. 0,3043.

Задача 7.7. Из 10 студентов, которые пришли на экзамен по математике, трое подготовились отлично, четверо – хорошо, двое – удовлетворительно, а один совсем не подготовился – понадеялся на то, что все спишет. В билетах 20 вопросов. Отлично подготовившиеся студенты могут ответить на все 20 вопросов; те, кто подготовился хорошо, могут ответить на 16 вопросов; удовлетворительно – на 10; а тот, кто не подготовился, может ответить только на 5 вопросов. Каждый студент получает билет, в котором три вопроса. Приглашенный первым студент ответил на все вопросы своего билета. Какова вероятность того, что он отлично подготовился?

Решение. Обозначим события: A – «студент ответил на 3 вопроса», B_1 – «приглашен студент, подготовившийся отлично», B_2 – «приглашен студент, подготовившийся хорошо», B_3 – «приглашен студент, подготовившийся удовлетворительно», B_4 – «приглашен студент, который к экзамену не готов». Согласно условиям задачи, $P(B_1) = 0,3$, $P(B_2) = 0,4$, $P(B_3) = 0,2$, $P(B_4) = 0,1$. Кроме того, $P(A/B_1) = 1$, $P(A/B_2) = (16/12) \cdot (15/19) \cdot (14/18) \approx 0,491$, $P(A/B_3) = (10/20) \cdot (9/19) \cdot (8/18) \approx 0,105$, $P(A/B_4) = (5/20) \cdot (4/19) \cdot$ $\cdot\ (3/18) \approx 0,009$. Следует найти $P(B_1/A)$. По формуле Байеса

$$P(B_1 / A) = \frac{0,3 \cdot 1}{0,3 \cdot 1 + 0,4 \cdot 0,491 + 0,2 \cdot 0,105 + 0,1 \cdot 0,009} \approx 0,579.$$

Ответ. 0,579.

Как видим, искомая вероятность сравнительно невелика, поэтому преподавателю придется предложить студенту еще несколько дополнительных вопросов.

Задача 7.8. Из урны, содержащей 3 белых и 2 чёрных шара, переложено 2 шара в урну, содержащую 4 белых и 2 чёрных шара. Найти вероятность вынуть после этого из второй урны белый шар.

Решение. Обозначим через A событие – из второй урны вынут белый шар. Можно выдвинуть три гипотезы: B_1 – из первой урны во вторую переложены два белых шара; B_2 – переложены один белый и один чёрный шары; B_3 – переложены два чёрных шара.

Имеем: $P\left(B_1\right) = \dfrac{C_3^2}{C_5^2} = 0,3$, $P\left(B_2\right) = \dfrac{C_3^1 \cdot C_2^1}{C_5^2} = 0,6$, $P\left(B_3\right) = \dfrac{C_2^2}{C_5^2} = 0,1$.

Условные вероятности равны: $P\left(\frac{A}{B_1}\right)=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$, $P\left(\frac{A}{B_2}\right)=\frac{5}{8}$, $P\left(\frac{A}{B_3}\right)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$.

По формуле полной вероятности получаем:

$$P(A)=P(B_1)P\left(\frac{A}{B_1}\right)+P(B_2)P\left(\frac{A}{B_2}\right)+P(B_3)P\left(\frac{A}{B_3}\right)=$$
$$=0,3\cdot\frac{3}{4}+0,6\cdot\frac{5}{8}+0,1\cdot\frac{1}{2}=0,65.$$

Ответ. 0,65.

8. Независимые испытания. Схема Бернулли

Определение 8.1. Испытаниями Бернулли называются независимые испытания с двумя исходами (традиционно их называют «успех» и «неудача»), вероятность которых не меняется от испытания к испытанию.

Проводятся ровно n одинаковых последовательных или совместных независимых испытаний, причем каждое испытание имеет ровно два элементарных исхода: A (успех) и $\bar{A}$ (неудача).

Обозначим вероятности: $P(A) = p$, $P(\bar{A}) = 1 - p = q$.

Будем говорить, что опыты (испытания) проводятся **по схеме Бернулли**, если выполнены следующие условия:

1. Число опытов известно. Оно равно натуральному числу n.
2. Опыты независимы.
3. В каждом опыте одно событие A может произойти с постоянной вероятностью p.

Вычислим вероятность того, что «в n испытаниях событие A произойдет ровно m раз и не произойдет $n - m$ раз». Обозначим это событие $P_n(m)$. Очевидно, что оно распадается на частные случаи, имеющие вид произведений m множителей A и $n - m$ множителей $\bar{A}$.

Например, при $n = 3$, $m = 2$ это случаи: $AA\bar{A} + A\bar{A}A + \bar{A}AA$.

Тогда вероятность $P_3(2) = ppq + pqp + qpp = C_3^2 p^2 q$.

В общем случае вероятность события $P_n(m)$ находится по формуле

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m} . \qquad (8.1)$$

Эта формула называется «биномиальным законом расчета вероятности», поскольку описывает слагаемые **бинома Ньютона**:

$$(p+q)^n = C_n^0 p^0 q^n + C_n^1 p^1 q^{n-1} + \ldots + C_n^n p^n q^0 .$$

Эта же формула в литературе называется **формулой Бернулли** по имени её создателя.

Задача 8.1. В контрольной работе пять задач. Вероятность не решить любую из них равна 0,2. Какова вероятность, что будет решено не менее трех задач?

Решение. Здесь $q = 0{,}2$. Поэтому $p = 0{,}8$. Нам необходимо найти вероятность суммы $P_5(3) + P_5(4) + P_5(5)$. По теореме сложения и формуле (8.1) получаем:

$$P_5(m \geq 3) = P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) =$$
$$C_5^3 p^3 q^2 + C_5^4 p^4 q + C_5^5 p^5 = 10 \cdot (0{,}8)^3 \cdot (0{,}2)^2 +$$
$$+ 5 \cdot (0{,}8)^4 \cdot 0{,}2 + (0{,}8)^5 \approx 0{,}942.$$

Ответ. 0,942.

Задача 8.2. Вероятность попадания стрелка в цель при одном выстреле равна 0,8. Допустим, что он стреляет по цели 6 раз. Найдем вероятность того, что стрелок попал в цель не менее четырех раз.

Решение. По условию задачи $n = 6$, $p = 0{,}8$, $q = 0{,}2$. Искомая вероятность равна $P_6(m \geq 4) = P_6(4) + P_6(5) + P_6(6)$. Применяя три раза формулу (8.1), находим $P_6(4) = C_6^4 \cdot 0{,}8^4 \cdot 0{,}2^2 \approx 0{,}246$, $P_6(5) \approx 0{,}393$, $P_6(6) \approx 0{,}262$. Поэтому $P_6(m \geq 4) \approx 0{,}901$.

Ответ. 0,901.

Поскольку в n испытаниях событие A может произойти 0 раз или 1 раз или 2 раза ... или n раз, причем перечисленные случаи включают в себя все возможности и несовместны между собой, то очевидно, что

$$P(0)+P(1)+\ldots+P(n)=1.$$

При фиксированном значении n вероятность $P_n(m)$ с увеличением m сначала возрастает, затем достигает своего максимального значения и при дальнейшем росте m убывает.

Докажем это свойство.

Из формулы (8.1) легко получить соотношение: $\dfrac{P_n(m+1)}{P_n(m)}=$ $=\dfrac{n-m}{m+1}\cdot\dfrac{p}{q}$.

Тогда $P_n(m+1)>P_n(m)$, если $(n-m)p>(m+1)q$, т.е. $m<np-q$;

$P_n(m+1)=P_n(m)$, если $m=np-q$;

$P_n(m+1)<P_n(m)$, если $m>np-q$.

Значение m_0, при котором вероятность $P_n(m)$ принимает наибольшее значение, называется **вероятнейшим (или наиболее вероятным) значением**.

Как следует из предыдущих оценок, вероятнейшее значение удовлетворяет неравенству $np-q\le m_0\le np-q+1$.

Учитывая, что $q=1-p$, последнее неравенство можно переписать в виде

$$np+p-1\le m_0\le np+p. \qquad (8.2)$$

Если $np+p$ является целым числом, то наиболее вероятных значений два: $np+p-1$ и $np+p$.

Задача 8.3. В условиях задачи 8.2 найдем вероятнейшее значение числа попаданий стрелка.

Решение. В этом примере $n=6$, $p=0{,}8$, $q=0{,}2$. Поэтому в силу неравенства (8.2), $4{,}6\leqslant m_0\leqslant 5{,}6$. Это означает, что при данных условиях наиболее вероятное число попаданий равно пяти.

Ответ. 5.

Задача 8.4. Пусть стрелок стреляет по цели 50 раз, а вероятность попадания стрелка в цель при одном выстреле равна 1/3. Вычислим наиболее вероятное число попаданий.

Решение. Применяя формулу (8.2), имеем $16 \leqslant m_0 \leqslant 17$. Значит, вероятнейших значений два. Вероятнее всего, что в данных условиях стрелок попадет в цель 16 или 17 раз.

Ответ. 16,17.

Задача 8.5. Каким должно быть число подбрасываний игральной кости, чтобы наивероятнейшее число выпадений грани с единицей оказалось равным 5?

Решение. Искомое число подбрасываний n должно быть таким, чтобы значение $m_0 = 5$ принадлежало отрезку $[np - q,\ np + p]$. В рассматриваемом случае $p = \frac{1}{6}$, $q = \frac{5}{6}$, следовательно, n определяется из неравенств $\frac{1}{6}n - \frac{5}{6} \leq 5 \leq \frac{1}{6}n + \frac{1}{6}$ откуда находим $29 \leqslant n \leqslant 35$.

Отметим, что среди найденных значений n в пяти случаях ($n = 30$, 31, 32, 33, 34) значение $m_0 = 5$ является единственным наивероятнейшим числом выпадений грани с единицей (соответствующее $np - q$ – нецелое) и в двух случаях ($n = 29$, 35) наряду с $m_0 = 5$ существует другое наиболее вероятное число появлений единицы ($np - q$ – целое).

Ответ. $29 \leqslant n \leqslant 35$

Задача 8.6. Вероятность выиграть по лотерейному билету равна 0,08. Каково наиболее вероятное число выигрышных билетов: а) из 90; б) из 99? Сколько билетов надо купить, чтобы наиболее вероятное число выигрышных было: в) равно единице?

Решение. При $n = 90$, $p = 0{,}08$, $q = 0{,}92$ имеем $np–q = 6{,}28$, $np + p = 7{,}28$; поэтому $k_0 = 7$.

При $n = 99$, $p = 0{,}08$, $q = 0{,}92$ имеем $np - q = 7$, $np + p = 8$; следовательно, k_0 может принимать любое из двух значений: 7 или 8.

При $k_0 = 1$ имеем $0{,}08n - 0{,}92 \leqslant 1$, то есть $n \leqslant 24$, и $0{,}08\, n + 0{,}08 \geqslant 1$, то есть $n \geqslant 12$. Следовательно, купить нужно не менее 12 и не более 24 билетов.

Ответ. а) 7; б) 7,8; в) $12 \leqslant n \leqslant 24$.

Задача 8.7. В урне 2 белых и 3 чёрных шара. Производится 10 извлечений шаров из урны по два шара каждый раз с последующим возвращением извлечённой пары шаров в урну. Найти вероятность того, что ровно при двух извлечениях будет вынута разноцветная пара шаров.

Решение. Здесь опыт заключается в извлечении пары шаров из урны. Число опытов $n = 10$. Событие A – появление разноцветной пары шаров. Его вероятность $p = P(A) = \frac{2 \cdot 3}{C_5^2} = \frac{3}{5}$ (всего исходов, т. е., пар шаров – C_5^2, из них благоприятствующих исходов, т. е., разноцветных пар шаров – $C_2^1 \cdot C_3^1 = 2 \cdot 3 = 6$). Опыты независимы, так как извлечённая пара шаров перед очередным извлечением возвращается обратно в урну. Искомая вероятность $P_2(10)$ может быть найдена по формуле Бернулли: $P_2(10) = C_{10}^2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^8 \approx 0,01$.

Ответ. 0,01.

Задача 8.8. А) Каково наиболее вероятное число выпадений грани с одной точкой при 26 подбрасываниях игральной кости? Б) Чему равна соответствующая этому числу выпадений вероятность?

Решение. Здесь число n опытов (подбрасываний кости) равно 26, p – вероятность выпадения грани с одной точкой равна 1/6, $q = 1 - p = 5/6$. В рассматриваемом случае $np - q = \frac{26}{6} - \frac{5}{6} = \frac{21}{6} = 3,5$ – нецелое число, единственное искомое наивероятнейшее число m_0 выпадений грани с одной точкой определяется из условий $np - q < m_o < np + p$, в нашем случае $3,5 < m_o < 4,5$, т. е., $m_0 = 4$. (Отметим также, что при нецелом $np - q$ m_0 всегда является ближайшей к числу $np - q$ целочисленной точкой справа). Вероятность $P_{26}(4)$ найдем по формуле Бернулли: $P_{26}(4) = C_{26}^4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{22}$.

Ответ. А) 4; Б) $P_{26}(4) = C_{26}^4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{22}$.

Как мы видим из решения последней задачи, в условиях схемы Бернулли вычисления вероятности по формуле (8.1) удобны только при достаточно маленьких значениях m и n.

При больших значениях m и n вычисление $P_n(m)$ представляет значительные трудности, главным образом, из-за сложности подсчета факториалов в формуле числа сочетаний. Поэтому возникает необходимость в приближенных формулах, позволяющих с достаточной степенью точности определять эти вероятности.

Впервые формула такого рода была найдена Муавром в 1730 году для частного случая схемы Бернулли при $p = q = 1/2$, а затем обобщена Лапласом на случай произвольного p, отличного от 0 и 1. Эта формула получила название локальной теоремы Муавра – Лапласа.

9. Локальная теорема Муавра – Лапласа. Интегральная теорема Муавра – Лапласа. Предельная теорема Пуассона

Локальная теорема Муавра-Лапласа. В условиях схемы Бернулли при достаточно большом количестве испытаний имеет место приближенное равенство

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \tag{9.1}$$

где $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$.

Для функции $\varphi(x)$ составлены таблицы, которые присутствуют во всех справочниках и пособиях по теории вероятностей (см. приложение 1). Они позволяют не вычислять значение $\varphi(x)$ в каждой конкретной задаче. При пользовании таблицами нужно учитывать, что функция $\varphi(x)$ четная, т.е. $\varphi(-x) = \varphi(x)$. Поэтому значения этой функции при отрицательных x в таблице не приводятся.

Формула (9.1) позволяет достаточно точно вычислить $P_n(m)$, когда n велико, а p не очень близко к 0 или к 1.

Этой формулой обычно пользуются, если $npq \geqslant 10$.

Задача 9.1. 95% всей продукции некоторой фабрики составляет продукция высшего сорта. Определим вероятность того, что из взятых на проверку 500 изделий 480 окажутся высшего сорта.

Решение. По условию задачи мы находимся в рамках схемы Бернулли, где $n = 500$, $m = 800$, $p = 0{,}95$, $q = 0{,}05$. Поскольку n достаточно велико, и $npq = 500 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}05 = 23{,}75 \geqslant 10$, мы можем использовать формулу (9.1) для вычисления искомой вероятности.

Тогда $x = \dfrac{1}{\sqrt{npq}} \approx 0{,}2052$, $x = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}} \approx 1{,}026$. По таблице значений $\varphi(x)$ находим $\varphi(1{,}026) \approx 0{,}235$. Следовательно, $P_{500}(480) \approx 0{,}048$. Как мы видим, полученная вероятность достаточно мала.

Ответ. 0,048 (≈5 %)

Ценность для практики локальной теоремы Лапласа невысока. Гораздо более важным для практического использования является вопрос о вероятности того, что событие A наступит не менее k_1 и не более k_2 раз, т.е. вероятность $P_n(k_1 \leqslant m \leqslant k_2)$. В этом случае приближенную формулу дает интегральная теорема Муавра – Лапласа.

Интегральная теорема Муавра-Лапласа. В условиях схемы Бернулли имеет место приближенное равенство

$$P_n(k_1 \leqslant m \leqslant k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \qquad (9.2)$$

где $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$, $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-z^2/2} dz$.

Функция $\Phi(x)$ называется **функцией Лапласа**. Для нее также составлены таблицы (см. приложение 2), которые можно найти во всех справочниках и пособиях по теории вероятностей. При пользовании таблицами нужно учитывать, что функция $\Phi(x)$ нечетная, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Кроме того, обычно в таблицах указаны значения функции Лапласа для значений x от 0 до 5; при $x > 5$ полагают $\Phi(x) = 0{,}5$.

Задача 9.2. В условиях задачи 9.1. найдем вероятность того, что от 470 до 490 изделий окажутся высшего сорта.

Решение. По условию задачи $n = 500$, $k_1 = 470$, $k_2 = 490$, $p = 0{,}95$, $q = 0{,}05$. Поскольку n достаточно велико, и $npq = 500 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}05 = 23{,}75 \geqslant 10$, мы для вычисления искомой вероятности $P_n(k_1 \leqslant m \leqslant k_2)$ используем формулу (9.2). Проводя вычисления, получаем: $x_1 \approx -1{,}026$, $x_2 \approx 3{,}078$. По таблице значений функции Лапласа $\Phi(x)$ находим $\Phi(-1{,}026) = -\Phi(1{,}026) \approx -0{,}3475$, $\Phi(3{,}078) \approx 0{,}4990$.

Следовательно, $P_{500}(470 \leqslant m \leqslant 490) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) \approx 0{,}8465$.

Ответ. 0,8465 (≈85 %).

Следствием из интегральной теоремы Муавра-Лапласа является формула для вычисления вероятности осуществления неравенства

$$\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon,$$

то есть вероятности того, что отклонение относительной частоты $\frac{m}{n}$ наступления события А от его вероятности p не превышает по абсолютной величине некоторого заданного числа ε:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \qquad (9.3)$$

Равенство (9.3) легко выводится из (9.2) и носит название **формулы вероятности отклонения относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях.**

Задача 9.3. Вероятность появления события А в каждом из независимых испытаний равна 0,6. Найдем вероятность того, что относительная частота появления события А в 1000 испытаниях отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более, чем на 0,02.

Решение. Согласно условию задачи $n = 1000$, $p = 0{,}6$, $q = 1\text{-}p = 0{,}4$, $\varepsilon = 0{,}02$. Значит, $\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} = 0{,}02 \cdot \sqrt{\frac{1000}{0{,}6 \cdot 0{,}4}} \approx 1{,}29$. По таблицам находим $\Phi(1{,}29) \approx 0{,}4015$, и согласно формуле (9.3), $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \approx 0{,}8030.$

Ответ. 0,803.

Заметим, что при достаточно большом числе испытаний n и фиксированном ε величина $\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$ тоже велика ($\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} \to$ при $n \to +\infty$), и $2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \approx 1$ (поскольку при $x > 5$ $\Phi(x) \approx 0{,}5$). Это означает, согласно (9.3), что

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \to 1 \text{ при } n \to +\infty. \tag{9.4}$$

Соотношение (9.4) носит название **теоремы Бернулли**. Оно показывает, что при достаточно большом числе испытаний n практически достоверным можно считать тот факт, что отклонение относительной частоты m/n (т.е. статистической вероятности) наступления события А от его вероятности p не превышает по абсолютной величине любого сколь угодно малого заданного числа ε.

Практически равенство (9.4) означает следующее: при большом числе испытаний n статистическая вероятность события m/n приближается к его классической вероятности p, т.е. $\mu(A) \approx P(A)$. Подбрасывая монету достаточно большое число раз, мы вправе ожидать, что герб будет выпадать примерно в половине случаев. Бросая кубик достаточно большое число раз, можно ожидать, что шестерка выпадет в 1/6 части опытов и т.д.

Если в условиях схемы Бернулли n достаточно велико, а $npq < 10$, т.е. p близко к 0 или к 1, то теоремы Муавра – Лапласа уже не дают достаточной точности.

В случае, когда n велико, а p близко к 0 (т.е. событие А происходит редко), рекомендуется пользоваться приближенной формулой, полученной Пуассоном. Теорему Пуассона часто называют «формулой редких событий». Она дает хорошее приближение, если $np \le 10$.

Теорема Пуассона. В условиях схемы Бернулли, т.е. при проведении n независимых испытаний с двумя исходами, в каждом из которых вероятность появления события A постоянна и равна p ($0< p <1$), а вероятность появления противоположного события $\overline{A}$ равна $q = 1-p$, для $P_n(m)$ (вероятности того, что в этих испытаниях событие A наступит ровно m раз) имеет место приближенное равенство

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \tag{9.5}$$

где $\lambda = np$.

Задача 9.4. Известно, что в партии, состоящей из 5000 деталей, вероятность брака равна 0,0004. Вычислим вероятности следующих событий: а) в партии ровно 3 бракованных детали; б) бракованных деталей в партии не более трех; в) бракованных деталей больше трех.

Решение. а) Ясно, что мы находимся в условиях схемы Бернулли, причем $n = 5000$, $m = 2$, $p = 0{,}00004$. Поскольку n достаточно велико, а p близко к 0, $\lambda = np = 2 <10$, то для вычисления искомой вероятности нужно воспользоваться формулой (9.5): $P_{5000}(3) \approx \frac{2^3}{3!} e^{-2} \approx 0{,}1804.$

б) Бракованных деталей в партии не более трех, если их 0 или 1 или 2 или 3, следовательно, $P_{5000}(m \leqslant 3) = P_{5000}(0) + P_{5000}(1) +$ $+ P_{5000}(2) + P_{5000}(3) \approx \left(\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!}\right) e^{-2} \approx 0{,}8571.$

в) Заметим, что события б) и в) в данной задаче противоположны, поэтому $P_{5000}(m > 3) = 1 - P_{5000}(m \leqslant 3) \approx 1 - 0{,}8571 = 0{,}1429$.

Ответ. а) 0,1804; б) 0,8571; в) 0,1429.

Замечание. Если в условиях схемы Бернулли n достаточно велико, а p близко к 1, то $q = 1 - p$ близко к 0, и теорему Пуассона можно применять к событию $\bar{A}$ (именно это событие будет происходить редко).

Задача 9.5. Вероятность рождения девочки 0,485. Какова вероятность, что среди 10 000 новорожденных будет 4950 девочек?

Решение. Здесь n = 10 000, m = 4950, p = 0,485, q = 0,515, $\sqrt{npq} \approx 49{,}98$, $x = 2{,}001$, $\varphi(x) \approx 0{,}0539$ (по таблице приложения 1). Поэтому $P_{5000}(4950) \approx 0{,}0011$. Видно насколько мала вероятность, что количество новорожденных девочек равно **точно** 4 950.

Ответ. 0,0011.

Задача 9.6. Вероятность рождения мальчика 0,515. Какова вероятность, что среди 10 000 новорожденных число мальчиков отличается от числа девочек не более чем на 400?

Решение. По условию задачи n = 10 000, p = 0,515, q = 0,485, $\sqrt{npq} \approx 49{,}98$, $\left|m - (10000 - m)\right| \le 400$, то есть $4800 \leqslant m \leqslant 5200$. Откуда $x_1 = (4800 - 5150)/49{,}98 \approx -7$, $x_2 = (5200 - 5150)/49{,}98 \approx 1$. По таблице (приложение 2) Ф(-7) = – Ф(7)≈ -0,5; Ф(1)≈0,34, следовательно $P(4800 \leqslant m \leqslant 5200) = Ф(1) - Ф(-7) \approx 0{,}84$.

Ответ. 0,84.

Задача 9.7. Вероятность того, что картофелина поражена вредителем p = 0,15. Найти вероятность того, что среди случайно отобранных 600 картофелин относительная частота появления пораженных картофелин отклонится от вероятности p = 0,15 по абсолютной величине не более чем на 0,03.

Решение. По условию задачи n = 600, p = 0,15, q = 0,85, ε = 0,03. Подставляя данные в формулу (9.3) получаем:

$$P\left(\left|\frac{m}{600} - 0{,}15\right| \le 0{,}03\right) \approx 2\Phi\left(0{,}03 \cdot \sqrt{\frac{600}{0{,}15 \cdot 0{,}85}}\right) =$$
$$2\Phi(2{,}06) = 2 \cdot 0{,}4803 = 0{,}9606$$

Вероятность Ф(2,06) = 0,4803 находим по таблице приложения 2.

Ответ. 0,9606.

Задача 9.8. Завод отправил на базу 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,002. Найти вероятность того, что в пути будет повреждено изделий: а) ровно три; б) менее трех; в) более трех; г) хотя бы одно.

Решение. Число n = 500 велико, вероятность p = 0,002 мала и рассматриваемые события (поврежденные изделия) независимы, поэтому имеет место формула Пуассона, $\lambda = n \cdot p = 500 \cdot 0{,}002 = 1$.

а) Найдем вероятность того, что будет повреждено ровно 3 изделия: $P_{500}(3) = e^{-1}/3! = 0{,}36788/6 = 0{,}0613$;

б) Найдем вероятность того, что будет повреждено менее 3 изделия:

$$P_{500}(0) + P_{500}(1) + P_{500}(2) = e^{-1} + e^{-1} + e^{-1}/2 = 5/2 \cdot 0{,}36788 = 0{,}9197\,;$$

в) Найдем вероятность того, что будет повреждено более 3 изделий. События «повреждено более трех изделий» и «повреждено не более трех изделий» – противоположны, отсюда:

$$P_{500}(>3) = 1 - \left(P_{500}(0) + P_{500}(1) + P_{500}(2) + P_{500}(3)\right) = 0{,}019\,;$$

г) Найдем вероятность того, что будет повреждено хотя бы одно изделие. События «повреждено хотя бы одно изделие» и «ни одно изделие не повреждено» – противоположные, отсюда: $P = 1 - P_{500}(0) = 0{,}632$.

Ответ. а) 0,0613; б) 0,9197; в) 0,019; г) 0,632.

Задача 9.9. Посеяли 10000 семян. Вероятность для семени не прорасти 0,0003. Какова вероятность того, что все семена прорастут?

Решение. Поскольку вероятность не прорасти для семени обратно пропорциональна количеству посеянных семян, то применим формулу Пуассона с параметром $\lambda = 10000 \cdot 0{,}0003 = 3$. В результате получим $P_{10000}(0) \approx \frac{3^0}{0!} e^{-3} = e^{-3} \approx 0{,}05$.

Ответ. 0,05.

Задача 9.10. В партии из 768 арбузов каждый арбуз оказывается неспелым с вероятностью 1/4. Найти вероятность того, что количество спелых арбузов будет в пределах от 564 до 600.

Решение. По условию задачи $n = 768$, $k_1 = 564$, $k_2 = 600$, $p=\frac{3}{4}$, $q=\frac{1}{4}$. Поскольку n достаточно велико, и $npq = 768\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} = 144 \geq 10$, мы для вычисления искомой вероятности $P_n(k_1 \leqslant m \leqslant k_2)$ используем формулу (9.2). Проводя вычисления, получаем:

$$x_1 = \frac{564-768\cdot\frac{3}{4}}{\sqrt{768\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}}} = \frac{564-576}{12} = -1, \qquad x_2 = \frac{600-768\cdot\frac{3}{4}}{\sqrt{768\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}}} = \frac{600-576}{12} = 2.$$

По таблице значений функции Лапласа $\Phi(x)$ находим $\Phi(-1) = -\Phi(1) \approx -0{,}3413$, $\Phi(2) \approx 0{,}4772$.

Следовательно, $P_{768}(564 \leq m \leq 600) \approx \Phi(x_2)-\Phi(x_1) \approx 0{,}49772 +$ $+ 0{,}3413 = 0{,}8185.$

Ответ. 0,8185.

Задача 9.11. Вероятность найти белый гриб среди прочих равна 1/4. Какова вероятность того, что среди 300 грибов будет 75 белых?

Решение. По условию задачи мы находимся в рамках схемы Бернулли, где $n = 300$, $m = 75$, $p=\frac{1}{4}$, $q=\frac{3}{4}$. Поскольку n достаточно велико, и $npq = 300\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4} = 56{,}25 \geq 10$, мы можем использовать формулу (9.1) для вычисления искомой вероятности. Тогда $\frac{1}{\sqrt{npq}} \approx 0{,}1333$, $x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}} = 0$. По таблице значений $\varphi(x)$ находим $\varphi(0) \approx 0{,}3989$. Следовательно, $P_{500}(480) \approx 0{,}053$.

Ответ. 0,053.

Задача 9.12. Вероятность прерывания телефонного соединения равна 0,03. Какова вероятность того, что среди 200 соединений будет не более двух прерываний?

Ответ. $25 \cdot e^{-6}$.

Задача 9.13. При социологических опросах граждан каждый человек независимо от других может дать неискренний ответ с вероятностью 0,2. Найдите вероятность того, что из 22500 опросов число неискренних ответов будет не более 4620.

Ответ. 0,9773.

Задача 9.14. Найти вероятность того, что при 150 выстрелах мишень будет поражена ровно70 раз, если вероятность попадания при одном выстреле равна 0,4.

Ответ. 0,0165.

Задача 9.15. Игральную кость бросают 80 раз. Найти приближенно границы, в которых число выпадений шестерки будет заключено с вероятностью 0,9973.

Ответ. От 4 до 23 раз.

10. Случайные величины

Определение 10.1. Будем называть **случайной** величину, которая в результате эксперимента принимает одно возможное значение, неизвестное заранее.

Примеры случайных величин

1. Число гербов, выпавшее при 10 бросаниях монеты.
2. Количество попаданий при 10 выстрелах.
3. Число произведенных выстрелов при стрельбе до первого попадания.
4. Длина листа, сорванного с конкретного дерева.
5. Время ожидания автобуса на остановке.

Очевидно, что для задания случайной величины просто перечислить все её значения мало, а порой и невозможно. Более того, случайные величины в примере 1 и 2 принимают одинаковые перечни возможных значений, однако вероятности у них различные.

Разнообразие случайных величин весьма велико. Число принимаемых значений может быть конечным или бесконечным, значения могут быть расположены на числовой оси дискретно или заполнять некоторые интервалы целиком. В зависимости от этого свойства случайные величины принято разделять на **дискретные** и **непрерывные**.

Интуитивно ясно, что возможные значения дискретной случайной величины есть отдельные изолированные числа, которые эта величина принимает с определенными вероятностями, а значения непрерывной случайной величины заполняют целиком некоторые интервалы.

11. Дискретные случайные величины

Дискретной называется случайная величина, которая может принимать конечное или счетное множество различных значений (**счетным** называется множество, все элементы которого можно поставить во взаимнооднозначное соответствие с числами натурального ряда, т.е. перенумеровать.). В примерах 1-3 параграфа 10 рассмотрены дискретные случайные величины.

Рассмотрим сначала случайные величины, которые могут принимать лишь конечное число различных значений.

Пусть возможными исходами некоторого эксперимента являются события A_1, A_2, ... A_n, которые образуют полную группу попарно несовместных событий. Пусть $P(A_i) = p_i$ (т.е. вероятность появления события A_i в результате эксперимента равна p_i). Заметим, что $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$.

Введем некоторую числовую функцию x, которая ставит в соответствие событиям числа: $\xi(A_1) = x_1$, $\xi(A_2) = x_2$, ..., $\xi(A_n) = x_n$. Таким образом, мы определили значения, которые может принимать случайная величина x: если наступило событие A_i, то случайная величина принимает значение $x_i (i = 1,2,...,n)$.

Этот факт может быть записан следующим образом: $P(\xi = x_i) = p_i$ (вероятность того, что случайная величина принимает значение x_i, равна p_i).

Теперь вместо того, чтобы говорить «события A_1, A_2, ... A_n образуют полную группу попарно несовместных событий и происходят в результате эксперимента с вероятностями $P(A_1)$, $P(A_2)$,..., $P(A_n)$», можем сказать «**задана случайная величина** x**, которая принимает значения** x_1, x_2, ... x_n **с вероятностями** p_1, p_2,..., p_n».

Набор p_1, p_2,...,p_n называется **распределением вероятностей случайной величины** x.

Случайную величину ξ удобно задавать в виде таблицы:

ξ	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n

Эта таблица называется ***законом распределения величины*** ξ.

Рассмотрим часто встречающиеся законы распределения дискретных случайных величин.

Равномерное распределение

В общем случае, если ряд распределения случайной величины имеет вид:

ξ	x_1	...	x_m	...	x_n
p	$\frac{1}{n}$	...	$\frac{1}{n}$	...	$\frac{1}{n}$

то соответствующее ему распределение называется **равномерным дискретным**. В верхней строке стоит число очков, которое может выпасть, в нижней строке – вероятность, с которой это число очков может появиться. В данном случае все p_i равны. Такое распределение вероятностей называется **равномерным**.

Задача 11.1. Бросается игральная кость. Составить закон распределения случайного числа очков, выпавших при одном бросании игральной кости.

Решение. При бросании игральной кости случайная величина будет задана следующим образом:

ξ	1	2	3	4	5	6
p	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Это равномерное распределение.

Геометрическое распределение

Пусть p и q – неотрицательные числа, и $q = 1 - p$. Распределение дискретной случайной величины называется геометрическим, если ее ряд распределения имеет вид:

ξ	1	2	...	m	...	n
p	p	qp	...	$q^{m-1}p$	...	q^{n-1}

Геометрическим называют закон распределения дискретной случайной величины, описывающей число независимых испытаний, которые проводятся до первого появления некоторого события A. Опыты прекращаются как только событие A наступило; максимальное число опытов, которое можно провести, равно n. Если событие A в каждом из испытаний наступает с вероятностью p (и не наступает с вероятностью $q = 1-p$), то вероятность того, что проведено ровно m опытов, вычисляется по формуле $P(\xi = m) = p \cdot q^{m-1}$ при $m < n$, и $P(\xi = m) = q^{m-1}$ при $m = n$.

Задача 11.2. На экзамене преподаватель задает студенту не более пяти вопросов. Экзаменатор прекращает задавать вопросы, как только студент обнаруживает незнание заданного вопроса. Вероятность того, что студент ответит на любой из вопросов, равна 0,8. Составить закон распределения случайной величины ξ – числа вопросов, которые задаст преподаватель студенту.

Решение. Величина х принимает возможные значения 1, 2, 3, 4, 5. Ясно, что $\xi = 1$, если студент не ответил на первый вопрос. Значит, $P(\xi = 1) = 1-0{,}8 = 0{,}2$. ξ принимает значение 2, если студент ответил на первый вопрос и не ответил на второй, поэтому $P(\xi = 2) = 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}16$. Далее находим $P(\xi = 3) = (0{,}8)^2 \times \cdot 0{,}2 = 0{,}128$, $P(\xi = 4) = (0{,}8)^3 \cdot 0{,}2 = 0{,}1024$. Преподаватель задает пятый вопрос, если студент ответил на четыре предыдущих, следовательно, $P(\xi = 4) = (0,8)^4 = 0,4096$. Легко проверить, что сумма всех вероятностей равна единице. Запишем результат в таблицу.

ξ	1	2	3	4	5
p	0,2	0,16	0,128	0,1024	0,4096

Этот пример знакомит нас с геометрическим распределением вероятностей.

Биномиальное распределение

Биномиальным называют закон распределения дискретной случайной величины, описывающей число появления некоторого события A в n независимых испытаниях с двумя исходами. Если событие A в каждом из испытаний наступает с вероятностью p, то вероятность того, что A в n испытаниях произойдет ровно m раз, вычисляется по формуле $P_n(\xi = m) = C_n^m p^m q^{n-m}$, где $q = 1-p$.

ξ	0	1	…	m	…	n
p	q^n	$C_n^1 \cdot p \cdot q^{n-1}$	…	$C_n^m p^m q^{n-m}$	…	p^n

Соответствующее такому ряду распределение дискретной случайной величины называется **биномиальным.**

Биномиальное распределение имеют, например, такие случайные величины: число гербов, выпадающее при $\boldsymbol{n}$ бросаниях монеты; число попаданий в цель при $\boldsymbol{n}$ выстрелах (если вероятность попадания при одном выстреле не меняется).

Задача 11.3. Пусть монета бросается 4 раза, а случайная величина х – это число выпавших гербов. Составить закон распределения случайной величины.

Решение. Для х возможными значениями являются числа 0, 1, 2, 3, 4. Вероятности, с которыми принимаются эти значения, вычисляются по формуле (6.1) главы 2: $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$, где $p = q = 1/2$, поскольку мы находимся в условиях схемы Бернулли.

Находим эти вероятности: $P_n(0) = C_4^0(1/2)^4 = 1/16$, $P_n(1) = C_4^1(1/2)^4 = 1/4$, $P_n(2) = 3/8$, $P_n(3) = 1/4$, $P_n(4) = 1/16$, и записываем случайную величину в виде таблицы.

ξ	0	1	2	3	4
p	1/16	1/4	3/8	1/4	1/16

Такое распределение вероятностей является биномиальным.

Распределение Пуассона

Если число испытаний велико, а вероятность p появления события в каждом испытании очень мала, то для вычисления вероятностей в этом случае используют приближенную формулу

$$P_n(\xi = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda},$$

где $\lambda = np$ (среднее число появления события), и говорят, что случайная величина распределена ***по закону Пуассона***. (Последняя формула уже встречалась нам в теореме Пуассона.)

Ряд распределения Пуассона (синоним — ***закон Пуассона***) имеет вид:

ξ	0	1	2	...	m	...
p	$e^{-\lambda}$	$\lambda \cdot e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda}$	...	$\frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$	...

Легко убедиться, что сумма вероятностей во второй строке таблицы равна единице. Это следует из того, что сумма ряда $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \lambda^m / m!$ равна e^{λ}.

Поскольку вероятность «успеха» в одном испытании очень мала, закон Пуассона называют также **законом редких явлений**.

Методами математической статистики установлено, что распределение Пуассона имеют такие случайные величины, как число опечаток на странице машинописного текста, поступление вызовов на АТС в единицу времени, число покупателей в магазине в определенный час и тому подобные.

Задача 11.4. Машинистка делает в среднем две опечатки на трех страницах текста. Случайная величина ξ – число опечаток на одной странице. Выдвинуть гипотезу о законе распределения ξ и вычислить вероятность того, что на странице не будет ни одной опечатки.

Решение. Представим себе работу машинистки над страницей как повторные независимые испытания, проводимые по схеме Бернулли: каждый печатный знак (из $\boldsymbol{n}$ штук на странице) может быть напечатан верно или нет. Предположим, что вероятность опечатки в одном знаке постоянна и равна $\boldsymbol{p}$. Она настолько мала, что произведение $\lambda = np = 2/3$. Исходя из таких допущений, предполагаем, что случайная величина x имеет распределение Пуассона

ξ	0	1	2	...	m	...
p	$e^{-\frac{2}{3}}$	$-\frac{2}{3}\cdot e^{-\frac{2}{3}}$	$\dfrac{\left(-\frac{2}{3}\right)^2}{2!}e^{-\frac{2}{3}}$	...	$\dfrac{\left(-\frac{2}{3}\right)^m}{m!}e^{-\frac{2}{3}}$	...

Следовательно, искомая вероятность равна $P(0) = e^{-2/3} \approx 0{,}5145$. Таким образом, с вероятностью 0,5145 ($\approx$ 52%) на странице не будет ни одной опечатки.

Гипергеометрическое распределение

Рассмотрим задачу о выборке данного состава. Пусть даны n предметов, из которых ровно m отмечены. Все n предметов тщательно перемешаны. Наугад без возвращения выбираются l предметов из n. Рассмотрим случай, когда $l \leqslant m$ и $l \leqslant n - m$. Обозначим через X число отмеченных предметов среди l выбранных. Очевидно, что X – это дискретная случайная величина, имеющая множество значений $\{0,1,\ldots,l\}$. Ряд распределения для X имеет вид

ξ	0	...	k	...	l
p	$\dfrac{C_{n-m}^{l}}{C_n^l}$	...	$\dfrac{C_m^k C_{n-m}^{l-k}}{C_n^l}$	...	$\dfrac{C_m^l}{C_n^l}$

Распределение дискретной случайной величины, соответствующее такому ряду, называется **гипергеометрическим.** Аналогичные формулы могут быть записаны для выборок, где содержатся элементы трех и более сортов, а также для случая, когда $l > m$ или $l > n - m$. Важно, что мы «следим» только за одним из сортов.

Задача 11.5. В пакете перемешаны семена декоративных тыкв разных сортов: двенадцать семян грушевидной, десять семян пупырчатой и пять семян круглой. Выбираем случайным образом три семечка из этого пакета. Случайная величина ξ – число семечек пупырчатой тыквы среди выбранных. Выдвинуть гипотезу о законе распределения ξ и найти вероятность того, что выбрано ровно одно семя пупырчатой тыквы.

Решение. Если предположить, что все сочетания из 27 по 3 равновозможны, то получим гипергеометрический закон распределения.

ξ	0	1	2	3
p	$\dfrac{C_{10}^0 \cdot C_{17}^3}{C_{27}^3}$	$\dfrac{C_{10}^1 \cdot C_{17}^2}{C_{27}^3}$	$\dfrac{C_{10}^2 \cdot C_{17}^1}{C_{27}^3}$	$\dfrac{C_{10}^3 \cdot C_{17}^0}{C_{27}^3}$

Искомая вероятность равна $P_3(1) = \dfrac{C_{10}^1 \cdot C_{17}^2}{C_{27}^3}$.

Задача 11.6 Изыскатель бурит скважины в садоводстве «Ладога» до первого обнаружения чистой питьевой воды. Вероятность получить воду при каждом бурении постоянна и равна 0.1. Случайная величина ξ – число сделанных скважин. Найти закон распределения ξ и вероятность того, что будет сделано менее 40 попыток.

Решение. Если предположить, что попытки делаются независимо друг от друга, то получаем стандартное геометрическое распределение с параметром $p = 0{,}1$.

ξ	1	2	....	39
p	0,1	0,9·0,1	....	$(0,9)^{38} \cdot 0,1$

Искомая вероятность равна P({1,.. .,39}) = 0,1 + 0.9·0.1 + ... + $(0,9)^{38}$ ·0.1. Используя формулу суммы для геометрической прогрессии, получим, что эта вероятность равна 1 – $(0.9)^{39}$, что, примерно, равно 0,984.

Задача 11.7. Для группы, в которой 3 отличника, 12 студентов имеют хорошие и отличные оценки, а 15 студентов имеют удовлетворительные оценки написать закон распределения случайной величины ξ.

Решение. Случайная величина ξ может принимать следующие значения: 2, 3, 4, 5. Запишем закон распределения случайной величины ξ в виде таблицы:

ξ	2	3	4	5
p	0	0,5	0,4	0,1

Задача 11.8. В партии 10% нестандартных деталей. Наугад отобраны 4 детали. Написать закон распределения дискретной случайной величины ξ – числа нестандартных деталей среди четырех отобранных.

Решение. Вероятность появления нестандартной детали в каждом случае равна 0,1. Найдем вероятности того, что среди отобранных деталей:

1) Вообще нет нестандартных $P_4(0) = \frac{4!}{0! \cdot 4!} 0,1^0 \cdot 0,9^4 = 0,6561$;

2) Одна нестандартная $P_4(1) = \frac{4!}{1! \cdot 3!} 0,1^1 \cdot 0,9^3 = 0,2916$;

3) Две нестандартные детали $P_4(2) = \frac{4!}{2! \cdot 2!} 0,1^2 \cdot 0,9^2 = 0,0486$;

4) Три нестандартные детали $P_4(3) = \frac{4!}{3! \cdot 1!} 0,1^3 \cdot 0,9^1 = 0,0036$;

5) Четыре нестандартных детали $P_4(4)=\frac{4!}{4!\cdot 0!}0,1^4\cdot 0,9^0=0,0001.$

Запишем результаты в виде таблицы (биномиальное распределение):

ξ	0	1	2	3	4
p	0,6561	0,2916	0,0486	0,0036	0,0001

Задача 11.9. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Наудачу отобраны две детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных.

Решение. Запишем закон распределения случайной величины ξ в виде таблицы (гипергеометрическое распределение):

ξ	0	1	2
p	$\frac{C_8^0\cdot C_2^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{45}$	$\frac{C_8^1\cdot C_2^1}{C_{10}^2}=\frac{16}{45}$	$\frac{C_8^2\cdot C_2^0}{C_{10}^2}=\frac{28}{45}$

Задача 11.10. Игральная кость брошена 3 раза. Написать закон распределения случайной величины ξ – числа появлений шестерки.

Решение: Запишем закон распределения случайной величины ξ в виде таблицы (биномиальное распределение):

ξ	0	1	2	3
p	$\frac{125}{216}$	$\frac{25}{72}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

Задача 11.11. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. Составить закон распределения числа отказавших элементов в одном опыте.

Решение. Запишем закон распределения случайной величины x в виде таблицы (биномиальное распределение):

ξ	0	1	2	3
p	$0{,}9^3 = 0{,}729$	$C_3^1 pq^2 = 3 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^2 = 0{,}243$	0,027	0,001

Задача 11.12. По цели производится 5 выстрелов. Вероятность попадания для каждого выстрела равна 0,4. Составить закон распределения числа попаданий.

Решение. По формуле Бернулли: $P_{5,5} = 0{,}01024$, $P_{4,5} = 0{,}0768$, $P_{3,5} = 0{,}2304$, $P_{2,5} = \dfrac{5!}{2! \cdot 3!} 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^3 = 0{,}3456$, $P_{1,5} = \dfrac{5!}{1! \cdot 4!} 0{,}4^1 \cdot 0{,}6^4 =$
$= 0{,}2592$, $P_{0,5} = \dfrac{5!}{0! \cdot 5!} 0{,}4^0 \cdot 0{,}6^5 = 0{,}0778$.

Запишем результаты в виде таблицы (биномиальное распределение):

ξ	0	1	2	3	4	5
p	0,0778	0,2592	0,3456	0,2304	0,0768	0,01024

12. Числовые характеристики дискретных случайных величин

При изучении одномерной случайной величины возникает проблема предсказания среднего значения M, которое она может принимать при n измерениях. Кроме того, для случайных величин, имеющих большое количество возможных значений, актуальна проблема выделения «наиболее вероятной» части из всего множества значений. Последняя проблема может быть более четко сформулирована следующим образом: определить окрестность M, в которую значения случайной величины попадут с определенной вероятностью (например, 0,99). Для ответа на поставленные вопросы используются так называемые числовые характеристики случайных величин: математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение. Здесь мы рассмотрим их определения для случайных величин дискретного типа.

Математического ожидание

Пусть дискретная случайная величина ξ имеет известный закон распределения:

ξ	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n

Определение 12.1. Математическое ожидание случайной величины х обозначается $M(\xi)$. Оно характеризует среднее значение этой величины (ожидаемое значение). Если ξ принимает конечное число значений, то $M(\xi)$ вычисляется по формуле

$$M(\xi) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + ... + x_n \cdot p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \ . \qquad (12.1)$$

Если множество значений ξ конечно, то математическое ожидание $M(\xi)$ представляет собой сумму нескольких чисел, следовательно, всегда существует. Если же множество значений ξ счетно, то $M(\xi)$ представляет собой сумму числового ряда (бесконечно много слагаемых). Такая сумма может быть не определена (ряд расходится). В таком случае говорят, что математическое ожидание не существует.

Свойства математического ожидания

1. Математическое ожидание постоянной величины равно этой величине.

Если случайная величина ξ может принимать только одно значение a с вероятностью 1, то $M(\xi) = a \cdot 1 = a$.

2. Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий этих величин.

Пусть $\xi = x + y$. Тогда $M(\xi) = M(x + y) = M(x) + M(y)$.

3. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий этих величин.

Случайные величины x и y принято называть *независимыми*, если они являются численными характеристиками независимых случайных событий. Если величины x и y независимы, то в обозначениях, введенных выше, случайная величина $\xi = x \cdot y$.

$$M(\xi) = M(x \cdot y) = M(x) \cdot M(y).$$

4. Постоянный множитель случайной величины можно вынести за знак математического ожидания.

Заметим, что это свойство является прямым следствием свойств 1 и 3, т.к. $M(ax) = M(a) \cdot M(x) = M(x) \cdot aM(x)$.

Приведем далее без доказательства **формулы для вычисления математического ожидания случайных величин**, имеющих стандартные дискретные распределения:

1. Геометрический закон: $M(\xi) = \dfrac{1}{p}$,
2. Биномиальный закон: $M(\xi) = n \cdot p$,
3. Закон Пуассона: $M(\xi) = \lambda$,
4. Гипергеометрический закон: $M(\xi) = \dfrac{l \cdot m}{n}$.

В случае, когда закон распределения не является стандартным, можно найти математическое ожидание по определению.

Дисперсия дискретной случайной величины

Пусть дискретная случайная величина ξ имеет известный закон распределения:

ξ	x_1	x_2	…	x_n
p	p_1	p_2	…	p_n

Пусть существует математическое ожидание $M(\xi)$. Дисперсия $D(\xi)$ случайной величины ξ характеризует отклонение случайной величины ξ от математического ожидания, т.е. характеризует разброс случайной величины относительно ее среднего значения. Дисперсию можно было бы измерить с помощью суммы величин $\left(x_i - M(\xi)\right) \cdot p_i$, но такая мера неудобна, поскольку отклонения могут принимать как положительные, так и отрицательные значения, которые при суммировании сокращаются.

Определение 12.2. Дисперсия – математическое ожидание случайной величины $\left(\xi - M\left(\xi\right)\right)^2$.

$$D(\xi) = (x_1 - M(\xi))^2 \cdot p_1 + (x_2 - M(\xi))^2 \cdot p_2 + \ldots + (x_n - M(\xi))^2 \cdot p_n,$$

$$D(\xi) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(\xi))^2 p_i = M\left(\left(\xi - M\left(\xi\right)\right)^2\right). \qquad (12.2)$$

Пользуясь свойствами математического ожидания, преобразуем формулу для вычисления дисперсии:

$$D(\xi) = M(\left(\xi - M\left(\xi\right)\right)^2) = M(\xi^2 - 2\xi M(\xi) + M^2(\xi)) =$$
$$= M(\xi^2) - 2M(\xi)M(\xi) + M^2(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi).$$

Следовательно, дисперсия может быть найдена так же по формуле:

$$D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = \sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 p_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i p_i\right)^2. \qquad (12.3)$$

Формулой (12.3) удобно пользоваться при вычислении дисперсии на практике. Из этой формулы и свойств математического ожидания вытекают следующие свойства дисперсии.

Свойства дисперсии

1. Дисперсия постоянной величины равна нулю.

Действительно, $D(a) = M(a^2) - M^2(a) = a^2 - a^2 = 0$.

2. Постоянный множитель случайной величины выносится за знак дисперсии с квадратом.

$D(ax) = M(a^2x^2) - M^2(ax) = a^2(M(x^2) - M^2(x)) = a^2D(x)$.

3. Дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме их дисперсий.

Если величины x и y независимы, то $M(xy) = M(x) \cdot M(y)$, следовательно, $D(x+y) = M\left(\left(x+y\right)^2\right) - M^2(x+y) = M\left(x^2 + 2xy + y^2\right) -$

$$-\left(M(x)+M(y)\right)^2 = M(x^2)+2M(xy)+M(y^2)-(M^2(x)+2M(x)M(y)+$$

$$+M^2(y)) = M(x^2)-M^2(x)+M(y^2)-M^2(y) = D(x)+D(y).$$

Приведем без доказательства **формулы для вычисления дисперсии случайных величин**, имеющих стандартные дискретные распределения:

1. Геометрический закон: $D(\xi) = \dfrac{1-p}{p^2}$,

2. Биномиальный закон: $D(\xi) = n \cdot p \cdot \left(1-p\right)$,

3. Закон Пуассона: $D(\xi) = \lambda$

4. Гипергеометрическии закон: $D(\xi) = l \cdot (n-l) \cdot \dfrac{m \cdot (n-m)}{n^2 \cdot (n-1)}$..

Как нетрудно заметить, дисперсия измеряется не в таких единицах, как математическое ожидание: единицы измерения возводятся в квадрат. Это не всегда удобно. Для единообразия единиц измерения из дисперсии извлекают квадратный корень.

Среднее квадратическое отклонение

Определение 12.3. Квадратный корень из дисперсии, то есть величина

$$\sigma = \sqrt{D(\xi)} \tag{12.4}$$

называется **средним квадратическим отклонением** случайной величины ξ.

Рассмотрим теперь проблему определения минимального интервала вида $(M(\xi) - r, M(\xi) + r)$, в который значения ξ попадают с заданной вероятностью $\boldsymbol{p}$. Если закон распределения дискретной случайной величины известен, то такой интервал можно определить, добавляя одно за другим значения ξ слева и справа от $M(\xi)$ в множество $\{M(\xi)\}$. При этом вероятности добавленных значений надо складывать, пока не получим число $\boldsymbol{p}$ или число больше него. Для большинства случайных величин решение такой задачи требует больших вычислений. Существует простой, но приближенный метод получения интервала вида ($M(\xi) - r$, $M(\xi) + r$), в который значения ξ попадают с вероятностью заведомо большей, чем $\boldsymbol{p}$. Этот метод не требует знания закона распределения, а только знание $M(\xi)$, $D(\xi)$ и $\boldsymbol{p}$.

Теорема 12.1 (неравенство Чебышева). Пусть случайная величина ξ имеет математическое ожидание $M(\xi)$ и дисперсию $D(\xi)$. Тогда для любого положительного числа r имеет место неравенство:

$$P_{\xi}((M(\xi)-r, M(\xi)+r)) \geq 1-\frac{D(\xi)}{r^2}$$

Это неравенство означает, что значения случайной величины ξ попадают в интервал с центром в точке $M(\xi)$ и любым заданным радиусом r с вероятностью, которая больше или равна $1-\frac{D(\xi)}{r^2}$.

Доказательство теоремы опускаем. Заметим, что она верна не только для дискретных, но и для абсолютно непрерывных случайных величин.

Для приближенного определения радиуса окрестности математического ожидания, в которую значения случайной величины попадают с вероятностью больше, чем $\boldsymbol{p}$, надо правую часть неравенства Чебышева приравнять числу $\boldsymbol{p}$.

Следствие 12.1. Если в неравенстве Чебышева вместо r подставить $3\sigma_{\mathbf{x}}$, то соответствующая вероятность будет не меньше, чем 8/9. Этот факт называют **«правилом трех сигм»**.

Задача 12.1. Допустим, нам необходимо позвонить в некоторое учреждение. Мы будем набирать номер раз за разом, пока не дозвонимся. Вероятность того, что мы дозвонимся в каждом определенном случае, равна 1/3. Составим закон распределения дискретной случайной величины, описывающей число наших звонков, вычислим математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Решение. Пусть событие A_1 состоит в том, что мы дозвонились с первого раза, событие A_2 – в том, что мы дозвонились со второго раза, и так далее.

Очевидно, $P(A_1) = 1/3$, $P(A_2) = P(\bar{A}_1 \cdot A_2) = (1-1/3) \cdot (1/3)$, $P(A_3) = P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3) = (1-1/3)^2 \cdot 1/3 = (2/3)^2 \cdot 1/3$, и т.д.

$$P(A_n) = P\left(\overline{A_1} \cdot \ldots \cdot \overline{A_{n-1}} \cdot A_n\right) = (1-1/3)^{n-1} \cdot 1/3 = (2/3)^{n-1} \cdot (1/3).$$

Таблица, описывающая данную случайную величину, будет бесконечной.

ξ	1	2	3	4	...
p	1/3	$2/3\times1/3$	$(2/3)^2\times1/3$	$(2/3)^3\times1/3$	...

Используя формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии $a\sum_{i=1}^{\infty} q^i = \dfrac{a}{1-q}$, проверим, что и в этом примере сумма вероятностей равна единице. В нашем примере $a = 1/3$, $q = 2/3$, следовательно,

$$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots = 1/3 \cdot (1 + 2/3 + (2/3)^2 + (2/3)^3 + \ldots) = \frac{1/3}{1-2/3} = 1.$$

Математическое ожидание $M(\xi) = 3$. Результат довольно предсказуемый – вероятность того, что мы дозвонимся в каждом определенном случае, равна 1/3, следовательно, вероятнее всего, нам придется сделать 3 попытки. Найдем дисперсию и среднее квадратическое отклонение: $D(\xi) = 6$. Среднее квадратическое отклонение $\sigma = \sqrt{D(\xi)} = \sqrt{6} \approx 2{,}4495$, т.е. при проведении конкретных испытаний число звонков в среднем будет отклоняться от ожидаемого примерно на 2,45, т.е. вероятнее всего, прежде чем дозвонимся, мы сделаем от 1 до 6 попыток.

Задача 12.2. Две игральные кости одновременно бросают 2 раза. Написать закон распределения дискретной случайной величины ξ – числа выпадений четного числа очков на двух игральных костях. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины.

Решение. Каждая игральная кость имеет три варианта четных очков – 2, 4 и 6 из шести возможных, таким образом, вероятность выпадения четного числа очков на одной кости равна 0,5. Вероятность одновременного выпадения четных очков на двух костях равна 0,25.

Вероятность того, что при двух испытаниях оба раза выпали четные очки на обеих костях, равна: $P_2(2) = $
$= \frac{2!}{0!\cdot 2!} 0,25^2 \cdot 0,75^0 = 0,0625$.

Вероятность того, что при двух испытаниях один раз выпали четные очки на обеих костях: $P_2(1) = \frac{2!}{1!\cdot 1!} 0,25^1 \cdot 0,75^1 = 0,375$.

Вероятность того, что при двух испытаниях ни одного раза не выпадет четного числа очков на обеих костях: $P_2(0) = $
$= \frac{2!}{0!\cdot 2!} 0,25^0 \cdot 0,75^2 = 0,5625$.

Закон распределения случайной величины имеет вид:

ξ	0	1	2
p	0,5625	0,375	0,0625

Математическое ожидание случайной величины равно: $M(\xi) = 0 \cdot 0,5625 + 1 \cdot 0,375 + 2 \cdot 0,0625 = 0,5$.

Дисперсияравна: $D(\xi) = 0,25 \cdot 0,5625 + 0,25 \cdot 0,375 + 2,25 \cdot 0,0625 =$
$= 0,375$.

Однако, на практике подобный способ вычисления дисперсии неудобен, т.к. приводит при большом количестве значений случайной величины к громоздким вычислениям. Поэтому применяется другой способ.

ξ^2	0	1	4
ξ	0	1	2
p	0,5625	0,375	0,0625

Добавим в таблицу строчку с ξ^2. Вычислим математическое ожидание от ξ^2:

$$M(\xi^2) = 0 \cdot 0{,}5625 + 1 \cdot 0{,}375 + 4 \cdot 0{,}0625 = 0{,}625 \text{ ,}$$

теперь воспользуемся формулами 12.3, 12.4 и вычислим дисперсию и среднее квадратическое отклонение: $D(\xi) = 0{,}625 - [0{,}5]^2 = 0{,}375$, $\sigma(\xi) = \sqrt{0{,}375} \approx 0{,}6$. Следовательно, мы можем ожидать, что число выпадений четного числа очков на двух игральных костях при двух бросках равно 1,5. При подбрасывании число выпадений четного числа очков на двух игральных костях в среднем будет отклоняться от ожидаемого на 0,6, т.е. вероятнее всего увидеть четное число очков на двух игральных костях при двух бросках 1 или 2 раза.

Задача 12.3. Охотник дважды стреляет по цели. Вероятность попадания стрелка при одном выстреле равна 0,8. Составить таблицу распределения числа попаданий, вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Решение. Дважды выстрелив по цели, охотник может попасть 0 или 1 или 2 раза. Обозначим события: А – «охотник попал при первом выстреле», В – «охотник попал при втором выстреле». Очевидно, что события A и B совместны и независимы, поэтому $P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}64$, т.е. два раза охотник попадет с вероятностью 0,64. Аналогично, охотник не попадет ни разу с вероятностью $P(\overline{A} \cdot \overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}04$. Отсюда следует, что один раз он попадет с вероятностью $1 - 0{,}64 - 0{,}04 = 0{,}32$. Запишем результаты в виде таблицы:

ξ^2	0	1	4
ξ	0	1	2
p	0,04	0,32	0,64

Вычислим математическое ожидание случайной величины: $M(\xi) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 = 0 \cdot 0{,}04 + 1 \cdot 0{,}32 + 2 \cdot 0{,}64 = 1{,}6$. Следовательно, в среднем охотник, делая два выстрела, попадает 1,6 раза (или из 20 выстрелов в среднем попадает 16). Найдем дисперсию и среднее квадратическое отклонение: $D(\xi)= M(\xi^2)-(M(\xi))^2 = 0^2\cdot 0,04+1^2\cdot 0,32+2^2\cdot 0,64-(1,6)^2=0,32$; $\sigma=\sqrt{D(\xi)}\approx 0,5657$. Последний результат может быть интерпретирован следующим образом: при проведении конкретных испытаний число попаданий в среднем будет отклоняться от ожидаемого на 0,56, т.е. охотник, делая два выстрела, попадает вероятнее всего 1 или 2 раза.

Мы могли ранее заметить, что имеем дело с биномиальным законом распределения случайной величины. Тогда проще было воспользоваться имеющимися формулами для вычисления математического ожидания и дисперсии: $M(\xi)=n\cdot p=2\cdot 0,8=1,6$; $D(\xi)=n\cdot p\cdot\left(1-p\right)=2\cdot 0,8\cdot 0,2=0,32$.

Задача 12.4. Испытывается устройство, состоящее из четырех независимо работающих приборов. Вероятности отказа каждого из приборов равны соответственно p_1 = 0,3; p_2 = 0,4; p_3 = 0,5; p_4 = 0,6. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение числа отказавших приборов.

Решение. Принимая за случайную величину число отказавших приборов, видим, что эта случайная величина может принимать значения 0, 1, 2, 3 или 4. Для составления закона распределения этой случайной величины необходимо определить соответствующие вероятности. Примем $q_i = 1-p_i$.

Не отказал ни один прибор: $P(0)=q_1q_2q_3q_4=0,7\cdot 0,4\cdot 0,5\cdot 0,4=$ $=0,084$

Отказал один из приборов:

$$P(1)=p_1q_2q_3q_4+q_1p_2q_3q_4+q_1q_2p_3q_4+q_1q_2q_3p_4=0,302.$$

Отказали два прибора:

$$P(2)=p_1p_2q_3q_4+p_1q_2p_3q_4+p_1q_2q_3p_4+$$
$$+q_1p_2p_3q_4+q_1p_2q_3p_4+q_1q_2p_3p_4=0,38.$$

Отказали три прибора: $P(3) = p_1 p_2 p_3 q_4 + p_1 p_2 q_3 p_4 + p_1 q_2 p_3 p_4 + q_1 p_2 p_3 p_4 = 0,198.$

Отказали все приборы: $P(4) = p_1 p_2 p_3 p_4 = 0,036.$

Получаем закон распределения:

ξ^2	0	1	4	9	16
ξ	0	1	2	3	4
p	0,084	0,302	0,38	0,198	0,036

Математическое ожидание:

$$M(X) = 0,302 + 2 \cdot 0,38 + 3 \cdot 0,198 + 4 \cdot 0,036 = 1,8$$

$$M(X^2) = 0,302 + 4 \cdot 0,38 + 9 \cdot 0,198 + 16 \cdot 0,036 = 4,18$$

Дисперсия: $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 4,18 - 3,24 = 0,94$

Среднее квадратическое отклонение: $\sigma = \sqrt{D(\xi)} \approx 0,97$.

Задача 12.5. Дискретная случайная величина ξ может принимать только два значения x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Математическое ожидание $M(x) = 3,7$ и дисперсия $D(x) = 0,21$, $p_1 = 0,3$. Найти закон распределения случайной величины.

Решение. Т.к. по условию случайная величина может принимать только два значения, то $p_2 = 1 - p_1 = 0,7$.

Представим закон распределения в виде таблицы:

ξ	x_1	x_2
p	0,3	0,7

Так как математическое ожидание: $M(\xi) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2$, а дисперсия $D(\xi) = M(\xi^2) - \left[M(\xi)\right]^2 = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 - \left[M(\xi)\right]^2$, то получаем систему: $\begin{cases} 0,3 \cdot x_1 + 0,7 \cdot x_2 = 3,7 \\ 0,3 \cdot x_1^2 + 0,7 \cdot x_2^2 = 13,9. \end{cases}$

Из первого уравнения выразим x_1 и подставим во второе уравнение, получим: $0,3\cdot\frac{(3,7-0,7x_2)^2}{0,3^2}+0,7\cdot x_2^2=13,9$. Преобразуем полученное выражение: $13,69-5,18x_2+0,49\cdot x_2^2+0,21\cdot x_2^2=4,17$.

Решим квадратный трехчлен: $0,7\cdot x_2^2-5,18x_2+9,52=0$,

$$D=26,8324-26,656=0,1764=0,42^2$$

1. $x_2=\frac{5,18+0,42}{1,4}=4$;
2. $x_2=\frac{5,18-0,42}{1,4}=3,4$.

Подставим $x_2=4$ в первое уравнение системы и найдем $x_1=3$.

Подставим $x_2=3,4$ в первое уравнение системы и найдем $x_1=4,4$. Нам это решение не подходит, не выполняется условие $x_1<x_2$.

Т.к. по условию $x_1 < x_2$, получаем закон распределения дискретной случайной величины:

ξ	3	4
p	0,3	0,7

Задача 12.6. Завод выпускает 96% изделий первого сорта и 4% изделий второго сорта. Наугад выбирают 1000 изделий. Пусть ξ – число изделий первого сорта в данной выборке. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ.

Решение. Выбор каждого из 1000 изделий можно считать независимым испытанием, в котором вероятность появления изделия первого сорта одинакова и равна $p = 0,96$. Таким образом, закон распределения может считаться биноминальным и математическое ожидание и дисперсию можно вычислить по формулам:

$$M(\xi) = p \cdot n = 1000 \cdot 0,96 = 960;$$

$$D(\xi) = n \cdot p \cdot q = 1000 \cdot 0,96 \cdot 0,04 = 38,4 .$$

Задача 12.7. Найти дисперсию дискретной случайной величины ξ – числа появлений события А в двух независимых испытаниях, если вероятности появления этого события в каждом испытании равны и известно, что M(x) = 0,9.

Решение. Т.к. случайная величина ξ распределена по биномиальному закону, то $M(\xi) = n \cdot p = 2p = 0,9; \quad \Rightarrow \quad p = 0,45;$

$$D(\xi) = n \cdot p \cdot q = 2p(1-p) = 2 \cdot 0,45 \cdot 0,55 = 0,495.$$

Задача 12.8. Производятся независимые испытания с одинаковой вероятностью появления события А в каждом испытании. Найти вероятность появления события А, если дисперсия числа появлений события в трех независимых испытаниях равна 0,63.

Решение. По формуле дисперсии биноминального закона получаем: $D(\xi) = n \cdot p \cdot q = 3p(1-p) = 0,63$. Преобразуем выражение:

$$3p^2 - 3p + 0,63 = 0$$

$$p^2 - p + 0,21 = 0;$$

$$p_1 = 0,7; \quad p_2 = 0,3.$$

13. Функция распределения вероятностей

Определение 13.1. Функцией распределения вероятностей случайной величины ξ называется функция F, определенная равенством

$$F(\xi) = P(\xi < x) . \qquad (13.1)$$

Функция распределения F случайной величины ξ в точке x равна вероятности того, что ξ принимает значение, меньшее x. $F(\xi)$

определена для любых случайных величин при х $\in (-\infty, +\infty)$, возрастает с ростом x и полностью описывает случайную величину.

Для дискретной случайной величины ξ, которая принимает значения x_1, x_2, ..., x_n с вероятностями p_1, p_2, ..., p_n, функция распределения определяется формулой $F(\xi) = \sum\limits_{x_i < x} p_i$. Эта функция является разрывной и возрастает скачками при тех значениях x, которые являются возможными значениями величины ξ.

Из определения функции распределения вытекают ее свойства:

1. $0 \leqslant F(\xi) \leqslant 1$
2. $F(\xi)$ – неубывающая функция

Пусть ξ – дискретная случайная величина, заданная своим законом распределения:

ξ	x_1	x_2	x_3	...	x_{n-1}	x_n
p	p_1	p_2	p_3	...	p_{n-1}	p_n

Аналитически дискретная функция распределения может быть записана так:

$$F(\xi) = \begin{cases} 0, \xi \le x_1 \\ p_1, x_1 < \xi \le x_2 \\ p_1 + p_2, x_2 < \xi \le x_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1}, x_{n-1} < \xi \le x_n \\ 1, \xi > x_n \end{cases} \qquad (13.2)$$

Построим график такой функции. Из свойств 1 и 2 вытекает, что график функции распределения расположен в полосе от 0 до 1. Более того, при переходе через значение $\boldsymbol{x_k}$ функция резко, «скачком», меняет свое значение.

График функции распределения дискретной величины будет иметь вид:

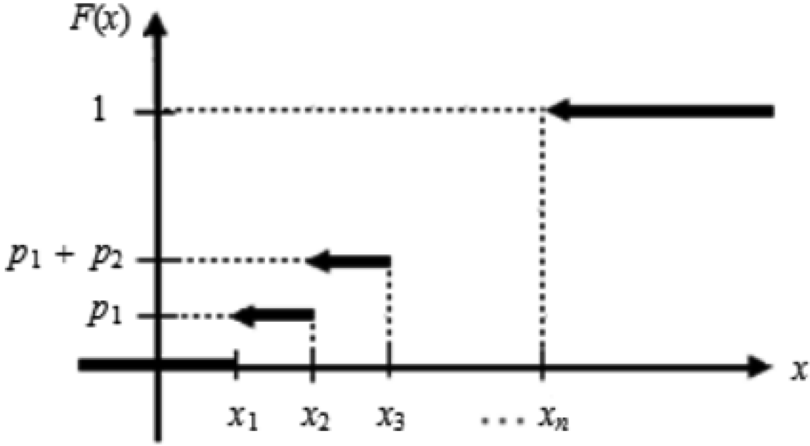


Рис. 13.1

Задача 13.1. В условии задачи 11.1 найти функцию распределения и построить ее график.

Решение. Для случайного числа очков, выпавших при одном бросании игральной кости функция распределения и график функции распределения имеют вид:

$$F(\xi)=\begin{cases} 0, \xi \le 1 \\ \frac{1}{6}, 1<\xi\le 2 \\ \frac{1}{6}+\frac{1}{6}, 2<\xi\le 3 \\ \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}, 3<\xi\le 4 \\ \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}, 4<\xi\le 5 \\ \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}, 5<\xi\le 6 \\ 1, \xi>6 \end{cases}$$

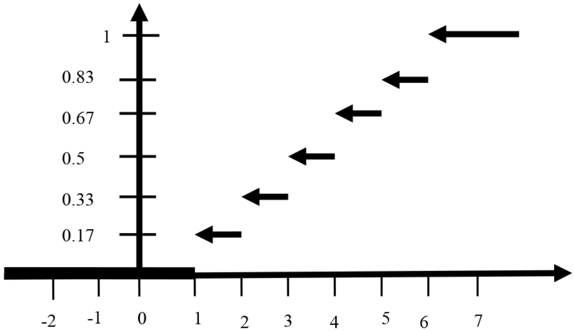


Рис. 13.2

Задача 13.2. Производится последовательное бросание двух игральных костей. При выпадении на одной игральной кости одного, трех или пяти очков игрок лишается 5 рублей. При выпадении двух или четырех очков игрок получает 7 рублей. При выпадении шести очков игрок лишается 12 рублей. Случайная величина x есть выигрыш игрока при двух бросаниях костей. Найти закон распределения ξ, математическое ожидание, дисперсию среднее квадратическое отклонение, построить график функции распределения.

Решение. Рассмотрим сначала, чему равен выигрыш игрока при одном бросании кубика. Пусть событие A состоит в том, что выпало 1, 3 или 5 очков. Тогда $P(A)=\frac{1}{2}$, а выигрыш составит -5 рублей. Пусть событие B состоит в том, что выпало 2 или 4 очка. Тогда $P(B)=\frac{1}{3}$, а выигрыш составит 7 рублей. Наконец, пусть событие C означает выпадение 6 очков. Тогда $P(C)=\frac{1}{6}$ и выигрыш равен -12 рублей.

Теперь рассмотрим все возможные комбинации событий A, B и C при двух бросаниях кости, и определим значения выигрыша ξ при каждой такой комбинации.

Если произошло событие $A_1 \cdot A_2$, то $\xi = -5 - 5 = -10$, при этом $P(A_1 A_2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

Если произошло событие $A_1 \cdot B_2$, то $\xi = -5 + 7 = 2$, при этом $P(A_1B_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

Если произошло событие $A_1 \cdot C_2$, то $\xi = -5 - 12 = -17$, при этом $P(A_1C_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$.

Аналогично, при B_1A_2 получаем $\xi = 7 - 5 = 2$, $P(B_1A_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

При B_1B_2 $\xi = 7 + 7 = 14$, $P(B_1B_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

При B_1C_2 $\xi = 7 - 12 = -5$, $P(B_1C_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$.

При C_1A_2 $\xi = -12 - 5 = -17$, $P(C_1A_2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$.

При C_1B_2 $\xi = 7 - 12 = -5$, $P(C_1B_2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$.

При C_1C_2 $\xi = -12 - 12 = -24$, $P(C_1C_2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

Все найденные состояния ξ и суммарные вероятности этих состояний записываем в таблицу:

ξ	-24	-17	-10	-5	2	14
p	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

Найдем математическое ожидание ξ:

$$M(\xi) = -24 \cdot \frac{1}{36} - 17 \cdot \frac{1}{6} - 10 \cdot \frac{1}{4} - 5 \cdot \frac{1}{9} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 14 \cdot \frac{1}{9} =$$
$$\frac{-24 - 102 - 90 - 20 + 24 + 56}{36} = -\frac{156}{36} = -\frac{13}{3}.$$

Найдем дисперсию:

$$D(\xi)=(-24)^2\cdot\frac{1}{36}+(-17)^2\cdot\frac{1}{6}+(-10)^2\cdot\frac{1}{4}+(-5)^2\cdot\frac{1}{9}+$$
$$+2^2\cdot\frac{1}{3}+14^2\cdot\frac{1}{9}-\left(-\frac{13}{3}\right)^2=\frac{2071}{18}-\frac{169}{9}=\frac{1733}{18}.$$

Найдем среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(\xi)=\sqrt{D(\xi)}=\sqrt{\frac{1733}{18}}\approx 9,81$$

Построим график функции распределения случайной величины ξ.

14. Непрерывные случайные величины

Если случайная величина X может принимать несчетное множество значений, которые сплошь заполняют некоторые промежутки числовой оси, то такую величину невозможно описать

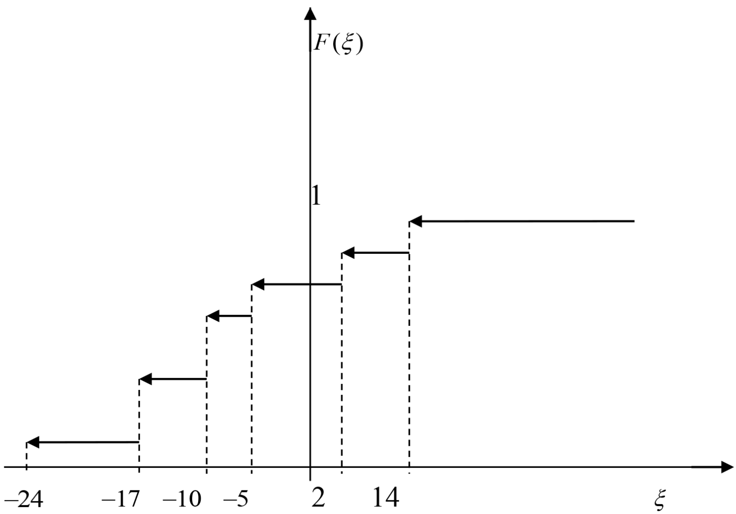


Рис. 13.3

таблицей. Ее принято задавать с помощью специальной функции – **функции распределения**, которая дает полную информацию о поведении случайной величины.

Определение 14.1. Если для случайной величины X существует неотрицательная функция $f(x)$, удовлетворяющая при любых x равенству

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt\,, \tag{14.1}$$

то X называется **непрерывной случайной величиной**, а функция $f(x)$ называется **плотностью распределения вероятностей**.

Свойства функции распределения и плотности распределения

1. $0 \le F(x) \le 1$ для любого $x \in (-\infty, +\infty)$, кроме того,

$$F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0\,,\ F(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1\,.$$

Функция распределения определяется как вероятность некоторого события, и выполнение неравенства $X < -\infty$ невозможно, а выполнение неравенства $X < +\infty$ – достоверно для любой случайной величины.

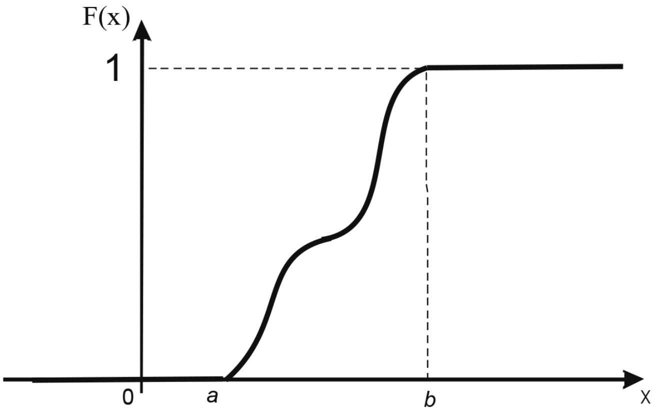


Рис. 14.1

Пусть теперь непрерывная случайная величина принимает значения из интервала (a,b). Тогда ее график выглядит так:

Как и у дискретной случайной величины график функции распределения расположен в полосе от 0 до 1. Когда случайная величина меняется от *a* до *b*, значения функции распределения возрастают от 0 до 1. При $x \le a$ ординаты графика равны 0. При $x \ge b$ функция становится постоянной, равной 1. Однако в отличие от дискретной случайной величины график функции распределения в данном случае есть непрерывная кривая.

2. Если функция $F(x)$ непрерывна и дифференцируема, то ее производная и будет плотностью распределения:

$$f(x) = F'(x). \qquad (14.2)$$

Отсюда вытекает, что функция распределения является первообразной для плотности вероятности. Функция распределения может быть представлена через плотность распределения: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

3. Интеграл от плотности распределения по промежутку от $-\infty$ до $+\infty$ равен единице:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1. \qquad (14.3)$$

4. Вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение, заключенное в промежутке [α,b), равна приращению функции распределения на этом промежутке и равна интегралу от α до β от плотности распределения:

$$P(\alpha \le X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx. \qquad (14.4)$$

5. Вероятность того, что непрерывная случайная величина примет одно определенное значение, например α, равна нулю:

$$P(X = \alpha) = F(\alpha) - F(\alpha) = 0.$$

Зная функцию распределения непрерывной случайной величины X или ее плотность, мы всегда можем найти вероятность того, что X принимает значения в промежутке от α до β. Кроме того, по функции распределения X однозначно определяется ее плотность и наоборот.

Задача 14.1. Дана функция распределения непрерывной случайной величины X: $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \sin 2x, & 0<x\le\dfrac{\pi}{4}\\ 1, & x>\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$. Найдите плотность распределения этой величины и вычислите вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(\pi/6,\pi/4)$.

Решение. Согласно формуле (14.2):

$$f(x)=\begin{cases}(0)'=0, & x\le 0\\ (\sin 2x)'=2\cos 2x, & 0<x\le\dfrac{\pi}{4}\\ (1)'=0, & x>\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$$

и окончательно

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 2\cos 2x, & 0<x\le\dfrac{\pi}{4}\\ 0, & x>\dfrac{\pi}{4}\end{cases}.$$

По формуле (14.4) имеем:

$P(\pi/6<\xi<\pi/4)=F(\pi/4)-F(\pi/6) = \sin(\pi/2)-\sin(\pi/3)=1-$

$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\approx 0{,}1340$.

Задача 14.2. Пусть задана плотность распределения непрерывной случайной величины *X*: $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ x-a, & 1<x\le 2\\ 0, & x>2\end{cases}$. Найдите функцию распределения этой величины, предварительно определив параметр *a*, и вычислите вероятность того, что *X* примет значение от 1 до 3/2.

Решение. Определим параметр *a* из условия (14.3):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt=\int_{-\infty}^{1}0dt+\int_{1}^{2}(t-a)dt+\int_{2}^{+\infty}0dt=\left(t^2/2-at\right)\Big|_1^2=3/2-a=1.$$

Следовательно, $a=1/2$. Найдем теперь функцию распределения.

По формуле (14.1) имеем: при $x\le 1$ $F(x)=\int_{-\infty}^{x}0dt=0$; если $1<x\le 2$, то $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{1}0dt+\int_{1}^{x}(t-1/2)dt=\left(t^2/2-t/2\right)\Big|_1^x=$ $=(x^2-x)/2$; если же $x>2$, то $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{1}0dt+$ $+\int_{1}^{2}(t-1/2)dt+\int_{2}^{x}0dt=\left(t^2/2-t/2\right)\Big|_1^2=1$.

Значит, $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ \dfrac{x^2-x}{2}, & 1<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$.

И, согласно формуле (14.4), $P(1<\xi<3/2)=F(3/2)-F(1)=3/8$.

Задача 14.3. Плотность распределения непрерывной случайной величины задана формулой: $f(x)=\dfrac{C}{1+x^2}, -\infty<x<+\infty$. Найдите: а) значение константы *C*; б) вид функции распределения; в) $p(-1<x<1)$.

Решение. а) значение константы C найдем из 14.3:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{C}{1+x^2}dx = Carctgx\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} = C\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = C\pi = 1, \text{ откуда } C = \frac{1}{\pi}.$$

б) $F(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{1}{\pi}arctg\ t\Bigg|_{-\infty}^{x} = \frac{1}{\pi}\left(arctgx+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi}arctgx+\frac{1}{2}.$

в) $p(-1 < x < 1) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{1}{\pi}arctgx\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) = 0{,}5.$

Задача 14.4. Функция распределения непрерывной случайной величины имеет вид: $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2 \\ \dfrac{x-2}{2}, & 2 < x \le 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$. Найдите плотность распределения.

Решение. По свойству 2 плотности распределения и функции распределения $f(x) = F'(x)$, отсюда:

$$f(x) = \begin{cases} 0', & x \le 2 \\ \left(\dfrac{x-2}{2}\right)', & 2 < x \le 4 \\ 1', & x > 4 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x \le 2 \\ 0{,}5, & 2 < x \le 4 \\ 0, & x > 4 \end{cases}.$$

15. Числовые характеристики непрерывных случайных величин

Определение 15.1. Математическое ожидание непрерывной случайной величины, имеющей функцию плотности распределения вероятностей $f(x)$, вычисляется по формуле:

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx\,. \quad (15.1)$$

Определение 15.2. Дисперсия непрерывной случайной величины определяется равенством

$$D(X) = M\left(\left(X - M\left(X\right)\right)^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 f(x)dx\,. \quad (15.2)$$

Определение 15.3. Среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma = \sqrt{D(X)}\,. \quad (15.3)$$

Как и в дискретном случае, математическое ожидание характеризует среднее значение случайной величины (ожидаемое значение), а дисперсия характеризует отклонение случайной величины X от математического ожидания, т.е. разброс случайной величины относительно ее среднего значения.

На практике дисперсию (как и в случае дискретной случайной величины) удобно вычислять по формуле:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - M^2(X)\,. \quad (15.4)$$

Задача 15.1. Вычислим математическое ожидание и дисперсию непрерывной случайной величины X заданной в задаче 14.2.

Решение. Известна плотность распределения этой величины: $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ x - \dfrac{1}{2}, & 1 < x \le 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$. Согласно формуле (15.1) вычислим среднее ожидаемое значение случайной величины X:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx = \int_1^2 x\left(x - 1/2\right)dx = \int_1^2 (x^2 - \frac{x}{2})dx =$$

$$\left.\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{4}\right)\right|_1^2 = \frac{19}{12} \approx 1{,}583\,.$$

Вычислим дисперсию по формуле (15.4):

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx-M^2(X) =$$

$$=\int_1^2 x^2\left(x-\frac{1}{2}\right)dx-M^2(X)\int_1^2\left(x^3-\frac{x^2}{2}\right)dx- -M^2(X) =$$

$$=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_1^2-(1,583)^2\approx 0,076 .$$

Среднее квадратическое отклонение по формуле (15.3): $\sigma=\sqrt{D(\xi)}\approx\sqrt{0,076}\approx 0,276$.

Задача 15.2. Для случайной величины, распределенной по закону косинуса с плотностью $f(x)=\begin{cases}0, & x<-\frac{3\pi}{2}\\ C\cdot\cos\frac{x}{3}, & -\frac{3\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}\\ 0, & x>\frac{3\pi}{2}\end{cases}$ найти константу *C*, вероятность попадания в интервал $\left(-\frac{3}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi\right)$, а также математическое ожидание и дисперсию.

Решение. Определим параметр *C* воспользовавшись справедливостью 14.3, получаем:

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=\int_{-3\pi/2}^{3\pi/2}C\cos\frac{x}{3}dx=$$

$$=C\cdot 3\sin\frac{x}{3}\Bigg|_{-3\pi/2}^{3\pi/2}=3C(\sin\frac{\pi}{2}-\sin(-\frac{\pi}{2}))=6C=1,$$

следовательно, $C=\frac{1}{6}$.

Вероятность попадания в интервал есть интеграл от функции плотности по этому интегралу,

$$P(-\frac{3\pi}{2} < X < \frac{\pi}{2}) = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{6}\cos\frac{x}{3}dx = \frac{1}{2}\sin\frac{x}{3}\Bigg|_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}(\sin\frac{\pi}{6} - \sin(-\frac{\pi}{2})) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{3}{4}.$$

Математическое ожидание равно:

$$M\left(X\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx = \frac{1}{6}\int_{-3\pi/2}^{3\pi/2} x\cos\frac{x}{3}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-3\pi/2}^{3\pi/2} x\, d\left(\sin\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{2}x\sin\frac{x}{3}\Bigg|_{-3\pi/2}^{3\pi/2} -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-3\pi/2}^{3\pi/2} \sin\frac{x}{3}\,dx = \frac{3\pi}{4}\sin\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{3\pi}{4}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) +$$

$$+\frac{2}{3}\cos\frac{x}{3}\Bigg|_{-3\pi/2}^{3\pi/2} = 0 + \frac{2}{3}(\cos\frac{\pi}{2} - \cos(-\frac{\pi}{2})) = 0\,.$$

Впрочем, это было очевидно с самого начала, поскольку мы интегрируем нечетную функцию по симметричной относительно начала координат области.

Дисперсия равна:

$$D\left(X\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - M^2\left(X\right) = \frac{1}{6}\int_{-3\pi/2}^{3\pi/2} x^2\cos\frac{x}{3}dx =$$

$$\frac{1}{3}\int_{0}^{3\pi/2} x^2\cos\frac{x}{3}dx = \int_{0}^{3\pi/2} x^2\, d\left(\sin\frac{x}{3}\right) =$$

$$= x^2\sin\frac{x}{3}\Bigg|_{0}^{3\pi/2} - \int_{0}^{3\pi/2} \sin\frac{x}{3}\,dx^2 = \frac{9\pi^2}{4}\sin\frac{\pi}{2} -$$

$$-\int_0^{3\pi/2} 2x\sin\frac{x}{3}\,dx=\frac{9\pi^2}{4}+\int_0^{3\pi/2} 6x d\cos\frac{x}{3}=$$

$$=\frac{9\pi^2}{4}+6x\cos\frac{x}{3}\Big|_0^{3\pi/2}-\int_0^{3\pi/2} 6\cos\frac{x}{3}\,dx=$$

$$=\frac{9\pi^2}{4}+6\cdot\frac{3\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}-18\sin\frac{x}{3}\Big|_0^{3\pi/2}=\frac{9\pi^2}{4}-18\sin\frac{\pi}{2}=\frac{9\pi^2}{4}-18\approx 4.21.$$

Задача 15.3. Случайная величина X задана функцией распределения $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 2\sin x, & 0<x\le\frac{\pi}{6}\\ 1, & x>\frac{\pi}{6}\end{cases}$. Найти плотность распределения вероятностей, математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

Решение. $f\left(x\right)=F'(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 2\cos x, & 0<x\le\frac{\pi}{6}\\ 0, & x>\frac{\pi}{6}\end{cases}$.

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx=2\int_0^{\pi/6} x\cos x\,dx=\begin{bmatrix} u=x & dv=\cos xdx\\ du=dx & v=\sin x\end{bmatrix}=$$

$$=2x\sin x\Big|_0^{\pi/6}-2\int_0^{\pi/6}\sin x\,dx=\frac{\pi}{6}+2\cos x\Big|_0^{\pi/6}=\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}-2\approx 0,2557\,.$$

$$M\left(X^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx=2\int_0^{\pi/6} x^2\cos x\,dx=\begin{bmatrix} u=x^2 & dv=\cos xdx\\ du=2xdx & v=\sin x\end{bmatrix}=$$

$$= 2x^2 \sin x\Big|_0^{\pi/6} - 4\int\limits_0^{\pi/6} x \cdot \sin x\, dx = \begin{bmatrix} u = x & dv = \sin x dx \\ du = dx & v = -\cos x \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{\pi^2}{36} + 4x\cos x\Big|_0^{\pi/6} - 4\int\limits_0^{\pi/6} \cos x\, dx = \frac{1}{2} + \frac{\pi\sqrt{3}}{3} -$$

$$-4\sin x\Big|_0^{\pi/6} = \frac{\pi^2}{36} + 3\sqrt{3} - 2 \approx 0{,}08796\,.$$

$$D(X) =$$

$$M\left(X^2\right) - M^2(X) = 0{,}08796 - 0{,}2557^2 = 0{,}08796 - 0{,}06538 = 0{,}022578\,.$$

Рассмотрим теперь основные (наиболее распространенные) законы распределения непрерывных случайных величин.

16. Равномерное, нормальное и показательное распределения непрерывных случайных величин

Равномерное распределение. Случайная величина непрерывного типа называется **распределенной равномерно на отрезке** $[a,b]$, если ее плотность распределения постоянна на этом отрезке и равна нулю вне отрезка

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & x > b. \end{cases} \tag{16.1}$$

Функция распределения будет иметь вид:

$$F\left(x\right) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b \\ 1, & x > b. \end{cases} \tag{16.2}$$

Графики функций $f(x)$ и $F\left(x\right)$ имеют вид:

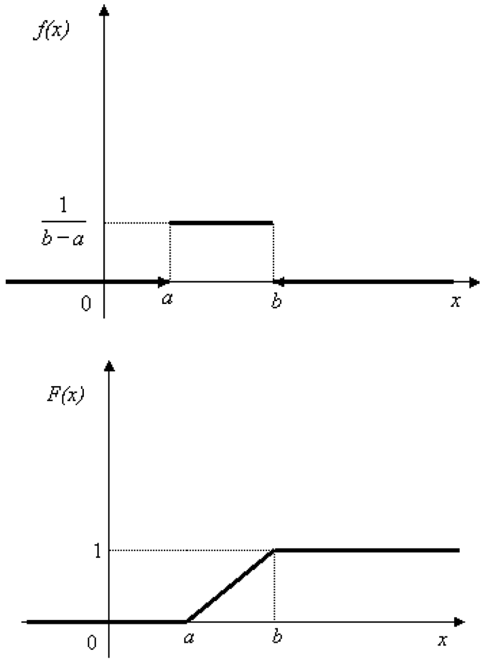


Рис. 16.1

Равномерное распределение используется при решении практических задач, в которых заранее известно, что возможные значения случайной величины лежат в некотором интервале, и все значения в пределах этого интервала одинаково вероятны.

Задача 16.1. Автобусы идут с интервалом 10 минут. Время ожидания автобуса пассажиром – случайная величина *X*, распределенная равномерно на указанном интервале. Найдем среднее время ожидания и дисперсию времени ожидания.

Решение. Из условия задачи ясно, что $f(x)=\frac{1}{10}$ при $x\in[1,10]$, и $f(x)=0$ при $x\notin[1,10]$. Согласно формуле (15.1): $M(X)=\frac{1}{10}\int\limits_0^{10} xdx=\frac{1}{20}x^2\Big|_0^{10}=5$, т.е. среднее время ожидания – 5 минут. По формуле (15.2) вычисляем дисперсию: $D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)dx - M^2(X) = \frac{1}{10}\int_{0}^{+10} x^2 dx - 5^2 = \frac{1}{30}x^3\Big|_0^{10} - 25 \approx 8,333$.

Среднее квадратическое отклонение $\sigma = \sqrt{D(\xi)} \approx 2,887$.

Нормальное распределение. Случайная величина *X* называется **распределенной по нормальному (Гауссовскому) закону** с параметрами $M(X) = a$ и σ $(\sigma > 0)$, если плотность распределения вероятностей имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \tag{16.3}$$

где $x \in (-\infty, +\infty)$.

Функция распределения $F(x)$ в рассматриваемом случае принимает вид:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt. \tag{16.4}$$

Величина, распределенная по нормальному закону, всегда имеет бесчисленное множество возможных значений, поэтому ее удобно изображать графически, с помощью графика плотности распределения. Согласно формуле (14.4), вероятность того, что случайная величина примет значение из интервала (α, β), равна площади под графиком функции $f(x)$ на этом интервале (геометрический смысл определенного интеграла).

Рассмотрим свойства функции $f(x)$.

1. Областью определения функции $f(x)$ является вся числовая ось.

2. Функция $f(x)$ может принимать только положительные значения, т.е. $f(x) > 0$.

3. Предел функции $f(x)$ при неограниченном возрастании $|x|$ равен нулю, т. е. ось Ox является горизонтальной асимптотой графика функции.

4. Функция $f(x)$ имеет в точке $x = a$ максимум, равный $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

5. График функции $f(x)$ симметричен относительно прямой $x = a$.

6. Нормальная кривая в точках $x = a \pm \sigma$ имеет перегиб, $f\left(a \pm \sigma\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}$.

График плотности нормального распределения $f(x)$ выглядит следующим образом:

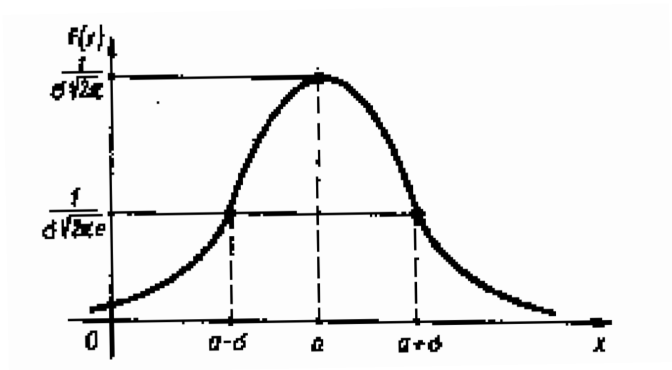


Рис. 16.2

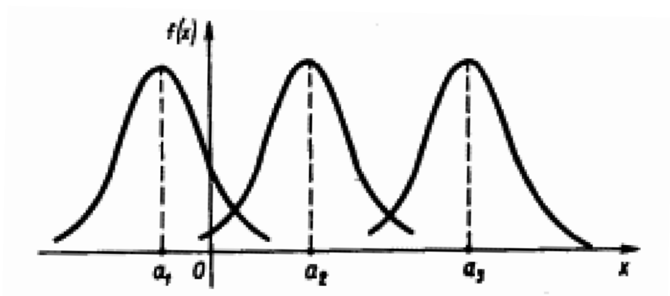


Рис. 16.3

Как видно из рисунка, нормальная кривая имеет колоколообразную форму. Эта форма является отличительной чертой нормального распределения. Иногда нормальную кривую называют **кривой Гаусса.**

При изменении параметра a форма нормальной кривой не изменяется. В этом случае, если математическое ожидание (параметр a) уменьшилось или увеличилось, график нормальной кривой сдвигается влево или вправо.

При изменении параметра σ изменяется форма нормальной кривой. Если этот параметр увеличивается, то максимальное значение функции $f(x)$ убывает, и наоборот. Так как площадь, ограниченная кривой распределения и осью Ox, должна быть постоянной и равной 1, то с увеличением параметра σ кривая приближается к оси Ox и растягивается вдоль нее, а с уменьшением σ кривая стягивается к прямой $x = a$.

Использование формул $f(x)$ и $F(x)$ для практических расчетов затруднительно. Но решение задач по этим формулам можно упростить, если от нормального распределения с произвольными параметрами a и σ перейти к нормальному распределению с параметрами $a = 0$, $\sigma = 1$.

Теоретические исследования показали, что большинство встречающихся на практике случайных величин имеет нормальный закон распределения. По этому закону распределяется ско-

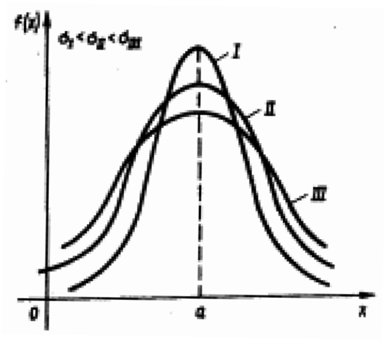


Рис. 16.4

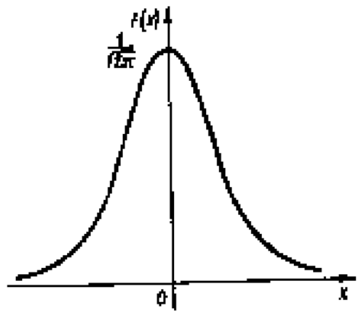


Рис. 16.5

рость газовых молекул, вес новорожденных, размер одежды и обуви населения страны и много других случайных событий физической и биологической природы. Впервые эту закономерность заметил и теоретически обосновал А. Муавр.

Функция плотности нормального распределения $f(x)$ с параметрами $a = 0$, $\sigma = 1$ называется плотностью **стандартной нормальной случайной величины** и ее график имеет вид:

Функция плотности и функция распределения **стандартной нормальной случайной величины** будут иметь вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \tag{16.5}$$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \tag{16.6}$$

Можно отметить, что при $a = 0$, $\sigma = 1$ функция $f(x)$совпадает с функцией $\varphi(x)$, о которой уже шла речь в локальной предельной теореме Муавра–Лапласа. Для функции $\varphi(x)$ составлены таблицы (см. приложение 1). Плотность вероятности нормального распределения $f(x)$ легко выражается через $\varphi(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) \tag{16.7}$$

Функцией распределения для стандартной нормальной случайной величины является **функция Лапласа**. Мы также уже встречались с этой функцией. Для нее составлены таблицы (см. приложение 2). Функция Лапласа не зависит от конкретных параметров a и σ.

Для случайной величины, распределенной по нормальному закону с параметрами a и σ, математическое ожидание и дисперсия вычисляются по формулам: $M(X) = a$, $D(X) = \sigma^2$. Среднее квадратическое отклонение равно σ.

Вероятность того, что нормально распределенная величина примет значение из интервала (α, β), равна

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right), \qquad (16.8)$$

где $O(x)$ есть функция Лапласа, введенная в интегральной предельной теореме.

Задача 16.2. Из орудия ведется стрельба по цели. Дальность полета снаряда есть случайная величина, распределенная по нормальному закону. Средняя дальность полета снаряда равна 1200 м., среднее квадратическое отклонение равно 40 м. Вычислим, какой процент снарядов упадет на расстоянии от 1260 до 1280 м от орудия.

Решение. Дальность полета снаряда распределена по нормальному закону. По условию задачи $a = 1200$, $\sigma = 40$. Требуется найти вероятность того, что случайная величина принимает значения из промежутка (1260, 1280). Воспользуемся формулой (16.8):

$$P(1260 < X < 1280) = \Phi\left(\frac{1280 - 1200}{40}\right) - \Phi\left(\frac{1260 - 1200}{40}\right) = \Phi(2) - \Phi(1{,}5).$$

Из таблицы приложения 2 находим: $\Phi(2) = 0{,}4772$, $\Phi(1{,}5) = 0{,}4332$. Следовательно, $P(1260 < X < 1280) = 0{,}4772 - 0{,}4332 = 0{,}044$, и на указанном расстоянии упадет около 4,4% снарядов.

Часто в задачах требуется вычислить вероятность того, что отклонение нормально распределенной случайной величины X от своего математического ожидания по абсолютной величине не превосходит некоторого значения γ, т.е. вычислить вероятность $P\left(\left|X - a\right| < \gamma\right)$. Применяя формулу (16.8), имеем:

$$P\left(\left|X - a\right| < \gamma\right) = P(a - \gamma < X < a + \gamma) = \Phi\left(\frac{\gamma}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\gamma}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\gamma}{\sigma}\right). \qquad (16.9)$$

Задача 16.3. Случайная величина X распределена нормально. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение X соответственно равны 20 и 10. Найти вероятность того, что отклонение по абсолютной величине будет меньше трех.

Решение. Воспользуемся формулой (16.9). По условию $\gamma = 3$, $a = 20$, $\sigma = 10$, тогда $P\left(\left|X - 20\right| < 3\right) = 2\Phi\left(\frac{3}{10}\right) = 2 \cdot 0{,}1179 = 0{,}2358$.

Приведем одно важное следствие из формулы (16.9). Положим в этой формуле $\gamma = 3\sigma$. Тогда $P\left(\left|\xi - a\right| < \right) \ \Phi(\ ) =$, т.е. вероятность того, что абсолютная величина отклонения X от своего математического ожидания не превысит 3σ, равна 99,73%. Практически такое событие можно считать достоверным. В этом и состоит сущность правила трех сигм.

Правило трех сигм. Если случайная величина распределена нормально, то абсолютная величина ее отклонения от математического ожидания практически не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения.

Показательное распределение. Если функция плотности распределения случайной величины имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0\,, & x < 0 \\ \mu e^{-\mu x}\,, & x \geq 0 \end{cases} \qquad (16.10)$$

где число μ – положительный параметр, то соответствующее распределение называется **показательным или экспоненциальным распределением**.

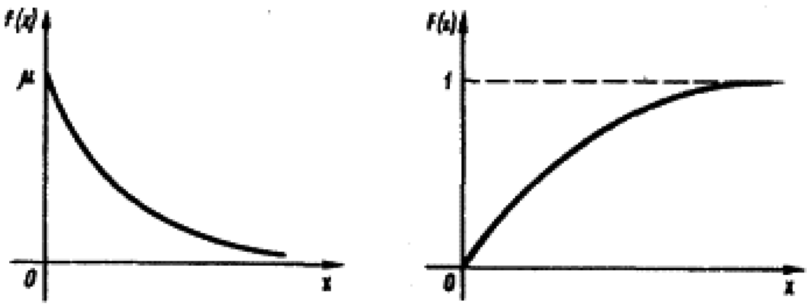


Рис. 16.6

Проинтегрировав функцию плотности (16.10) на промежутке $(-\infty, x)$, получим аналитическое выражение для функции экспоненциального распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0\,, x<0\\ 1-e^{-\mu x},\ x\geq 0\end{cases} \qquad (16.11)$$

Графики дифференциальной и интегральной функций показательного распределения имеют вид:

Используя формулы для вычисления математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения нетрудно убедится, что для показательного распределения

$$M(X)=\frac{1}{\mu},\ D(X)=\frac{1}{\mu^2},\ \sigma(X)=\frac{1}{\mu}. \qquad (16.12)$$

Таким образом, для показательного распределения характерно, что среднее квадратическое отклонение численно равно математическому ожиданию.

Найдем вероятность попадания случайной величины в интервал (a,b):

$$P(a,b)=F(b)-F(a)=e^{-\mu b}-e^{-\mu a}. \qquad (16.13)$$

Показательное распределение часто встречается в теории массового обслуживания и в теории надежности. Величина X, распределенная по показательному закону, хорошо описывает время ожидания при техническом обслуживании и длительность телефонных разговоров, регистрируемых на телефонной станции, и срок службы радиоэлектронной или другой аппаратуры.

Функция надежности

Пусть некоторое устройство начинает работать в момент времени $t_0 = 0$, а по истечении времени длительностью t происходит отказ. Обозначим через T непрерывную случайную величину – длительность времени безотказной работы устройства. Если устройство проработало безотказно время меньшее t, то, следовательно, за время длительностью t наступит отказ. Тогда функция распределения

$$F(t) = P(T < t) = 1 - e^{-\mu t} \quad (16.14)$$

определяет вероятность отказа устройства за время t.

Найдем вероятность противоположного события – безотказной работы за время t:

$$P(T > t) = 1 - F(t) = e^{-\mu t} = R(t). \quad (16.15)$$

Функция $R(t)$ называется **функцией надежности**.

Выясним смысл числовых характеристик и параметра распределения μ: математическое ожидание – это среднее время между двумя ближайшими отказами устройства, а величина обратная математическому ожиданию (параметр распределения μ) – интенсивность отказов, т.е. количество отказов в единицу времени.

Задача 16.4. Срок «службы» китайских кроссовок — случайная величина, имеющая экспоненциальный закон распределения. Известно, что средний срок службы составляет один год. Найти параметр μ и вычислить вероятность того, что кроссовки прослужат не менее двух лет.

Решение. Как говорилось выше, $\frac{1}{\mu}$ — это средний срок службы кроссовок, следовательно, у нас μ = 1. Для вычисления вероятности события $X \geq 2$ воспользуемся формулой (16.11):

$$P([2, +\infty)) = F(+\infty) - F(2) = 1 - (1 - e^{-2}) = e^{-2} \approx 0{,}14.$$

Таким образом, вероятность того, что кроссовки прослужат не менее двух лет всего 14%.

Задача 16.5. Время безотказной работы устройства распределено по закону $h(t) = 0{,}02e^{-0{,}02t}, \quad t \geq 0$. Найдите среднее время безотказной работы устройства, вероятность того, что устройство не откажет за среднее время безотказной работы. Найдите вероятность отказа за время $t = 100$ часов.

Решение. По условию интенсивность отказов $\mu = 0,02$. Тогда среднее время между двумя отказами, т.е. математическое ожидание $M(X) = \frac{1}{0,02} = 50$ часов. Вероятность безотказной работы за этот промежуток времени вычислим по функции надежности: $R(50) = e^{-0,02\cdot 50} = e^{-1} \approx 0,37$. По формуле 16.14 вычислим вероятностьотказазавремяt=100часов: $F(100) = 1 - e^{-0,02\cdot 100} = 1 - e^{-2} \approx 0,86$. Итак, среднее время безотказной работы устройства – 50 часов, вероятность того, что устройство не откажет за среднее время безотказной работы всего 37%, вероятность отказа за время $t = 100$ часов довольно большая, около 86 %.

Стандартные абсолютно непрерывные случайные величины имеют следующие значения математического ожидания и дисперсии:

Равномерный закон: $M(X) = \frac{a+b}{2}$, $D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Нормальный закон: $M(X) = a$, $D(X) = \sigma^2$.

Экспоненциальный закон: $M(X) = \frac{1}{\mu}$, $D(X) = \frac{1}{\mu^2}$.

Задача 16.6. Определите закон распределения случайной величины X, если ее плотность распределения вероятностей задана функцией $f(x) = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{72}}$. Найдите математическое ожидание, дисперсию и функцию распределения случайной величины X.

Решение. Сравнивая данную функцию $f(x)$ с функцией плотности вероятности для случайной величины, распределенной по нормальному закону, заключаем, что случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами $a = 1$ и $\sigma = 6$.

Тогда $M(X) = 1$, $D(X) = 36$. Функция распределения случайной величины X имеет вид: $F(x) = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-1)^2}{72}} dt$.

Задача 16.7. Текущая цена акции может быть смоделирована с помощью нормального закона распределения с математическим ожиданием 15 ден. ед. и средним квадратическим отклонением 0,2 ден. ед. Найдите вероятность того, что цена акции: а) не выше 15,3 ден. ед.; б) не ниже 15,4 ден. ед.; в) от 14,9 до 15,3 ден. ед. С помощью «правила трех сигм» найти границы, в которых будет находиться текущая цена акции.

Решение. Так как $a = 15$ и $\sigma = 0,2$, то пользуясь формулой 16.8 и таблицей приложения 2 получаем:

$$P\left(0 \le X \le 15,3\right) = \Phi\left(\frac{15,3-15}{0,2}\right) -$$

$$-\Phi\left(\frac{0-15}{0,2}\right) = \frac{1}{2} + \Phi\left(1,5\right) = 0,5 + 0,4332 = 0,9332;$$

$$P\left(X \ge 15,4\right) = \Phi\left(+\infty\right) - \Phi\left(\frac{15,4-15}{0,2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} - \Phi\left(2\right) = 0,5 - 0,4772 = 0,0228;$$

$$P\left(14,9 \le X \le 15,3\right) = \Phi\left(\frac{15,3-15}{0,2}\right) -$$

$$-\Phi\left(\frac{14,9-15}{0,2}\right) = \Phi\left(1,5\right) + \Phi\left(0,5\right) =$$

$$= 0,4332 + 0,1915 = 0,6247.$$

По «правилу трех сигм» $P\left(\left|X-15\right| \le 0,6\right) = 0,9973$ и, следовательно, $15-0,6 \le X \le 15+0,6$. Окончательно $14,4 \le X \le 15,6$.

Задача 16.8. Автомат изготавливает детали, которые считаются годными, если отклонение X от контрольного размера по модулю не превышает 0,8 мм. Каково наиболее вероятное число годных деталей из 150, если случайная величина X распределена нормально с $\sigma = 0{,}4$ мм?

Решение. Найдем по формуле 16.9 вероятность отклонения при $\sigma = 0{,}4$ и $\gamma = 0{,}8$: $P\left(\left|X-a\right| \le 0{,}8\right) = 2\Phi\left(\dfrac{0{,}8}{0{,}4}\right) = 2\Phi(2) = 0{,}9545$.

Считая приближенно $p = 0{,}95$ и $q = 0{,}05$ в соответствии с формулой 8.2 $np + q \le m_0 \le np + p$, где m_0 — наивероятнейшее число, находим при $n = 150$ наиболее вероятное число годных деталей: $150 \cdot 0{,}95 - 0{,}05 \le m_0 \le 150 \cdot 0{,}95 + 0{,}95$. После вычислений получили: $m_0 = 143$.

Задача 16.9. Размер диаметра втулок, изготовленных заводом, можно считать нормально распределенной случайной величиной с математическим ожиданием $a = 2{,}5$ см. и средним квадратическим отклонением $\sigma = 0{,}01$ см. В каких границах можно практически гарантировать размер диаметра втулки, если за вероятность практической достоверности принимается 0,9973?

Решение. По «правилу трех сигм» $P\left(\left|X-2{,}5\right| \le 3 \cdot 0{,}01\right) = 0{,}9973$. Отсюда $2{,}5 - 0{,}03 \le X \le 2{,}5 + 0{,}03$, т. е. $2{,}47 \le X \le 2{,}53$.

Задача 16.10. Рост взрослых мужчин является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Пусть математическое ожидание ее равно 175 см, а среднее квадратическое отклонение — 6 см. Определить вероятность того, что хотя бы один из наудачу выбранных пяти мужчин будет иметь рост от 170 до 180 см.

Решение. Найдем вероятность того, что рост мужчины будет принадлежать интервалу $(170,180)$:

$$P(170 \le X \le 180) = \Phi\left(\frac{180-175}{6}\right) -$$

$$- \Phi\left(\frac{170-175}{6}\right) = \Phi(0{,}83) + \Phi(0{,}83) = 0{,}5935 \approx 0{,}6.$$

Тогда вероятность того, что рост мужчины не будет принадлежать интервалу (170; 180): $q = 1 - 0,6 = 0,4$.

Вероятность того, что хотя бы один из 5 мужчин будет иметь рост от 170 до 180 см по формуле 6.6 равна: $P(A) = 1 - q^5 = 1 - 0,4^5 = 0,9898.$

Задача 16.11. Браковка шариков для подшипников производится следующим образом: если шарик не проходит через отверстие диаметром d_1, но проходит через отверстие диаметром $d_2 > d_1$, то его размер считается приемлемым. Если какое-нибудь из этих условий не выполняется, то шарик бракуется. Известно, что диаметр шарика d есть случайная величина с характеристиками $M(X) = \dfrac{d_2 + d_1}{2}$ и $\sigma(X) = \dfrac{d_2 - d_1}{4}$. Определить вероятность того, что шарик будет забракован.

Решение.

$$P(A) = 1 - P(d_1 < d < d_2) = 1 - \left(\Phi\left(\frac{d_2 - M(X)}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{d_1 - M(X)}{\sigma}\right)\right) =$$

$$= 1 - \left(\Phi\left(\frac{d_2 - d_1}{2\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{d_1 - d_2}{2\sigma}\right)\right) = 1 - 2\Phi\left(\frac{d_2 - d_1}{2\sigma}\right) \approx 0,0455.$$

Задача 16.12. Установлено, что время ремонта телевизора есть случайная величина X, распределенная по показательному закону. Определить вероятность того, что на ремонт телевизора потребуется не менее 20 дней, если среднее время ремонта телевизоров составляет 15. Найдите плотность вероятности, функцию распределения и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

Решение. По условию математическое ожидание $M(X) = \dfrac{1}{\lambda} = 15$**,** откуда параметр $\lambda = \dfrac{1}{15}$ и по формулам 16.10, 16.11 плотность вероятности и функция вероятности имеют вид:

$$f(x)=\begin{cases}0\,,\ x<0\\ \frac{1}{15}e^{-\frac{1}{15}x}\,,\ x\geq 0,\end{cases}\qquad F(x)=\begin{cases}0\,,x<0\\ 1-e^{-\frac{1}{15}x}\,,\ x\geq 0.\end{cases}$$

Среднее квадратическое отклонение равно математическому ожиданию: $\sigma(X)=\frac{1}{\mu}=15$.

По формуле 16.13: $P(X\geq 20)=1-P(X<20)=1-\left(1-e^{-\frac{20}{15}}\right)=$

$=e^{-\frac{20}{15}}=0,264$.

Контрольная работа №1.

Вариант 1	Вариант 2
1. В партии из 20 изделий имеется 4 бракованных. Из этой партии наудачу отбирается 7 изделий. Найти вероятность того, что среди них окажется равно 2 бракованных.	1. В партии из 18 изделий имеется 3 бракованных. Из этой партии наудачу отбирается 6 изделий. Найти вероятность того, что среди них окажется равно 1 бракованное.
2. Студент забыл последнюю цифру телефона своего товарища и набирает ее наудачу. Найти вероятность того, что для правильного набора номера студенту придется звонить не более 3 раз.	2. Студент забыл последнюю цифру телефона своего товарища и набирает ее наудачу. Найти вероятность того, что для правильного набора номера студенту придется звонить не более 3 раз, если известно, что последняя цифра четная.
3. В группе спортсменов имеются 10, стреляющих отлично, 8 – хорошо, 5 – удовлетворительно и 2 – плохо. Вероятности попадания в мишень при одном выстреле для них соответственно равны 0,95, 0,85, 0,7 и 0,5. Дан выстрел, в результате которого мишень оказалась пораженной. Найти вероятность того, что его произвел спортсмен, стреляющий отлично.	3. В группе спортсменов имеются 10, стреляющих отлично, 8 – хорошо, 5 – удовлетворительно и 2 – плохо. Вероятности попадания в мишень при одном выстреле для них соответственно равны 0,95, 0,85, 0,7 и 0,5. Дан выстрел, в результате которого мишень оказалась пораженной. Найти вероятность того, что его произвел спортсмен, стреляющий хорошо.
4. По каналу связи передается 1000 знаков. Каждый знак может быть искажен независимо от остальных с вероятностью 0,005. Найти вероятность того, что будет искажено не более 3 знаков.	4. Вероятность изготовления бракованной детали равна 0,01. Изготовлено 200 деталей. Найти вероятность того, что среди них бракованных будет не больше 3.

Вариант 3	Вариант 4
1. В ящике 7 белых и 3 красных шара. Наудачу выбираются 2 шара. Найти вероятность того, что: а) оба шара красные; б) хотя бы один шар белый.	1. В ящике 5 белых, 1 черный и 3 красных шара. Наудачу выбираются 3 шара. Найти вероятность того, что: а) все три шара черные; б) хотя бы один шар белый.
2. Испытываются 4 двигателя, вероятность отказа двигателя равна 0,08. Найти вероятность того, что откажет хотя бы один двигатель.	2. Номер телефона состоит из 5 цифр. Найти вероятность того, что все цифры различны.
3. В команде 5 спортсменов, стреляющих отлично, 4 – хорошо и 2 – удовлетворительно. Вероятности попадания в мишень при одном выстреле для отличного стрелка равна 0,95, для хорошего – 0,85, для удовлетворительного – 0,7. Наудачу вызывается 1 спортсмен, который производит 1 выстрел. Найти вероятность попадания в мишень.	3. На спортивной площадке играют 10 мальчиков, забрасывая мяч в кольцо. Для 5 из них вероятность попадания в кольцо равна 0,6, для 3 других – 0,5 и для остальных – 0,3. Мяч, брошенный одним из мальчиков, попал в кольцо. Какова вероятность того, что мяч брошен мальчиком из первой группы?
4. Вероятность того, что лампочка окажется бракованной, равна 0,0025. Проверяется 1000 лампочек. Найти вероятность того, что бракованных окажется 3.	4. Вероятность изготовления бракованной детали равна 0,001. Найти вероятность того, что среди 5000 изготовленных изделий не содержится брака.

Вариант 5	Вариант 6
1. В квадрат $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ наудачу ставится точка. Найти вероятность того, что точка окажется под кривой $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$.	1. В прямоугольник $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 1$ наудачу ставится точка. Найти вероятность попадания точки в область выше кривой $y = \frac{x^2}{4}$.

2. В ящике 10 деталей, из которых 4 окрашены. Наудачу извлекаются 3 детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из взятых деталей окрашена.	2. В ящике 3 синих и 8 красных кубиков. Из ящика извлекают 2 кубика. Найти вероятность того, что оба кубика разного цвета.
3. На трех линиях изготавливаются однотипные детали. 1-ая линия дает 70%, вторая – 20% и третья – 10% всей продукции. Вероятность получения брака на каждой линии соответственно равна 0,02, 0,01 и 0,05 Взятая наудачу деталь оказалась бракованной. Найти вероятность того, что эта деталь изготовлена на 1-ой линии.	3. Электрические приборы поставляются в магазин тремя заводами. Первый завод поставляет 50%, второй – 20% и третий – 30% всей продукции. Вероятность изготовления прибора высшего качества каждым заводом соответственно равна 0,92, 0,85, 0,8. Найти вероятность того, что купленный в магазине прибор окажется высшего качества.
4. Производятся испытания двигателей. Вероятность того, что двигатель выдержит испытание, равна 0,9. Найти вероятность того, что из 100 проверяемых не выдержит испытания 1 двигатель.	4. Производятся испытания двигателей. Вероятность того, что двигатель выдержит испытание, равна 0,9. Найти вероятность того, что из 100 проверяемых не выдержит испытания не более 5 двигателей.

Вариант 7.	Вариант 8
1. В круг радиуса $R_1 = 30$ см. наудачу ставится точка. В круге проведены две концентрические окружности с радиусами $R_2 = 20$ см. и $R_3 = 10$ см. Найти вероятность попадания точки в кольцо с внутренним радиусом R_3 и внешним R_2.	1. В круг радиуса $R_1 =$ 30 см. наудачу ставится точка. В круге проведены две концентрические окружности с радиусами $R_2 = 20$ см. и $R_3 = 10$ см. Найти вероятность того, что точка упадет вне кольца с внутренним радиусом R_3 и внешним R_2.

2. В ящике 3 синих и 8 красных кубиков. Из ящика извлекают 2 кубика. Найти вероятность того, что оба кубика синие.	2. В ящике 3 синих и 8 красных кубиков. Из ящика извлекают 2 кубика. Найти вероятность того, что оба кубика красные.
3. Для участия в КВН выбрали с факультета БЖ — 4 студента, факультета социологии — 6 человек, с факультета физики — 5 человек. Вероятности того, что студент факультета БЖ, социологии, физики попадет в сборную университета, соответственно равны 0,9; 0,7; 0,8. Наудачу выбранный студент в итоге попал в сборную. К какому факультету вероятнее всего принадлежал этот студент?	3. В клинику поступают в среднем 50% больных с заболеванием K, 30% — с заболеванием L, 20% — с заболеванием M. Вероятность полного излечения болезни K равна 0,7; для болезней L и M эти вероятности соответственно равны 0,8 и 0,9. Больной, поступивший в клинику, через некоторое время был выписан здоровым. Какова вероятность того, что этот больной страдал заболеванием K?
4. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна 0,75. Найти приближенно вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена не менее 70 и не более 80 раз.	4. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна 0,75. Найти приближенно вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена не более 70 раз.

Контрольная работа №2

<table>
<tr><td>Вариант 1</td><td>Вариант 2</td></tr>
<tr><td>1. Найти математическое ожидание a) M(X), b) дисперсию D(X), c) среднее квадратическое отклонение σ(X) дискретной случайной величины X по заданному закону распределения.
<table><tr><td>X</td><td>1</td><td>2</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>p</td><td>0,4</td><td>0,3</td><td>0,1</td><td>0,2</td></tr></table></td><td>1. Найти математическое ожидание a) M(X), b) дисперсию D(X), c) среднее квадратическое отклонение σ(X) дискретной случайной величины X по заданному закону распределения.
<table><tr><td>X</td><td>-3</td><td>-2</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>p</td><td>0,1</td><td>0,2</td><td>0,5</td><td>0,2</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>2. В урне 9 белых и 7 красных шаров. Наугад вынимают 8 шаров. Найти математическое ожидание и дисперсию числа вынутых белых шаров.</td><td>2. В урне 10 белых и 5 красных шаров. Наугад вынимают 6 шаров. Найти математическое ожидание и дисперсию числа вынутых белых шаров.</td></tr>
<tr><td>3. Случайная величина X задана функцией распределения F(x).
Найдите:
а) функцию плотности распределения f(x);
б) математическое ожидание M(X);
в) дисперсию D(X) и среднее квадратическое отклонение σ(X);
г) постройте графики функций F(x) и f(x).
$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{x^2}{9}, & 0<x\le 3\\ 1, & x>3\end{cases}$$</td><td>3. Случайная величина X задана функцией распределения F(x).
Найдите:
а) функцию плотности распределения f(x);
б) математическое ожидание M(X);
в) дисперсию D(X) и среднее квадратическое отклонение σ(X);
г) постройте графики функций F(x) и f(x).
$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{x^2}{16}, & 0<x\le 4\\ 1, & x>4\end{cases}$$</td></tr>
</table>

4. Для случайной величины X, распределенной равномерно на отрезке [a,b], написать функцию распределения F(x), плотность вероятности f(x). Найти математическое ожидание M(X), дисперсию D(X) и среднее квадратическое отклонение σ(X), если задан отрезок: [4,9].	4. Для случайной величины X, распределенной равномерно на отрезке [a,b], написать функцию распределения F(x), плотность вероятности f(x). Найти математическое ожидание M(X), дисперсию D(X) и среднее квадратическое отклонение σ(X), если задан отрезок: [3,13].
5. Для случайной величины X, распределенной по нормальному закону, известны математическое ожидание M(X) и дисперсия D(X). Записать плотность вероятности f(x) и найти вероятность попадания случайной величины X в интервал (α,β):M(X) = 3, D(X) = 16, (1,5).	5. Для случайной величины X, распределенной по нормальному закону, известны математическое ожидание M(X) и дисперсия D(X). Записать плотность вероятности f(x) и найти вероятность попадания случайной величины X в интервал (α,β):M(X) = 4, D(X) = 9, (2,7).
6. Случайная величина X распределена по показательному закону плотностью вероятности $f(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x<0\\ \lambda e^{-\lambda x}, \text{ если } x\geq 0\end{cases}$ Написать плотность вероятности f(x), функцию распределения F(x). Найти математическое ожидание M(x), дисперсию D(x) и среднее квадратическое отклонение σ(x), если: λ = 0,5.	6. Случайная величина X распределена по показательному закону плотностью вероятности $f(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x<0\\ \lambda e^{-\lambda x}, \text{ если } x\geq 0\end{cases}$ Написать плотность вероятности f(x), функцию распределения F(x). Найти математическое ожидание M(x), дисперсию D(x) и среднее квадратическое отклонение σ(x), если: λ = 0,25.

<table>
<tr><td>Вариант 3</td><td>Вариант 4</td></tr>
<tr><td>1.Найти математическое ожидание a) M(X), b) дисперсию D(X), c) среднее квадратическое отклонение σ(X) дискретной случайной величины X по заданному закону распределения.

X | 2 | 5 | 6 | 8
p | 0,1 | 0,6 | 0,1 | 0,2</td><td>1. Найти математическое ожидание a) M(X), b) дисперсию D(X), c) среднее квадратическое отклонение σ(X) дискретной случайной величины X по заданному закону распределения.

X | -4 | -2 | 0 | 5
p | 0,4 | 0,2 | 0,1 | 0,3</td></tr>
<tr><td>2. В урне 5 белых и 6 красных шаров. Наугад вынимают 7 шаров. Найти математическое ожидание и дисперсию числа вынутых белых шаров.</td><td>2. В урне 8 белых и 10 красных шаров. Наугад вынимают 7 шаров. Найти математическое ожидание и дисперсию числа вынутых белых шаров.</td></tr>
<tr><td>3. Случайная величина X задана функцией распределения F(x). Найдите:
а) функцию плотности распределения f(x);
б) математическое ожидание M(X);
в) дисперсию D(X) и среднее квадратическое отклонение σ(X);
г) постройте графики функций F(x) и f(x).

$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{x^2}{25}, & 0<x\le 5\\ 1, & x>5\end{cases}$</td><td>3. Случайная величина X задана функцией распределения F(x). Найдите:
а) функцию плотности распределения f(x);
б) математическое ожидание M(X);
в) дисперсию D(X) и среднее квадратическое отклонение σ(X);
г) постройте графики функций F(x) и f(x).

$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{x^2}{36}, & 0<x\le 6\\ 1, & x>6\end{cases}$</td></tr>
</table>

4. Для случайной величины X, распределенной равномерно на отрезке [a,b], написать функцию распределения F(x), плотность вероятности f(x). Найти математическое ожидание M(X), дисперсию D(X) и среднее квадратическое отклонение σ(X), если задан отрезок: [9,11].	4. Для случайной величины X, распределенной равномерно на отрезке [a,b], написать функцию распределения F(x), плотность вероятности f(x). Найти математическое ожидание M(X), дисперсию D(X) и среднее квадратическое отклонение σ(X), если задан отрезок: [8,10].
5. Для случайной величины X, распределенной по нормальному закону, известны математическое ожидание M(X) и дисперсия D(X). Записать плотность вероятности f(x) и найти вероятность попадания случайной величины X в интервал (α,β): M(X) = 1, D(X) = 1, (2,4).	5. Для случайной величины X, распределенной по нормальному закону, известны математическое ожидание M(X) и дисперсия D(X). Записать плотность вероятности f(x) и найти вероятность попадания случайной величины X в интервал (α,β): M(X) = 3, D(X) = 4, (2,6).
6. Случайная величина X распределена по показательному закону плотностью вероятности $f(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x<0\\ \lambda e^{-\lambda x}, \text{ если } x\ge 0\end{cases}$ Написать плотность вероятности f(x), функцию распределения F(x). Найти математическое ожидание M(x), дисперсию D(x) и среднее квадратическое отклонение σ(x), если: λ = 8.	6. Случайная величина X распределена по показательному закону плотностью вероятности $f(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x<0\\ \lambda e^{-\lambda x}, \text{ если } x\ge 0\end{cases}$ Написать плотность вероятности f(x), функцию распределения F(x). Найти математическое ожидание M(x), дисперсию D(x) и среднее квадратическое отклонение σ(x), если: λ = 10.

<table>
<tr><td>Вариант 5</td><td>Вариант 6</td></tr>
<tr><td>1.Найти математическое ожидание a) M(X), b) дисперсию D(X), c) среднее квадратическое отклонение σ(X) дискретной случайной величины X по заданному закону распределения.

X: 1 | 3 | 5 | 6
p: 0,5 | 0,1 | 0,1 | 0,3</td><td>1.Найти математическое ожидание a) M(X), b) дисперсию D(X), c) среднее квадратическое отклонение σ(X) дискретной случайной величины X по заданному закону распределения.

X: 2 | 3 | 6 | 8
p: 0,1 | 0,4 | 0,3 | 0,2</td></tr>
<tr><td>2. В урне 6 белых и 11 красных шаров. Наугад вынимают 7 шаров. Найти математическое ожидание и дисперсию числа вынутых белых шаров.</td><td>2. В урне 8 белых и 9 красных шаров. Наугад вынимают 7 шаров. Найти математическое ожидание и дисперсию числа вынутых белых шаров.</td></tr>
<tr><td>3. Случайная величина X задана функцией распределения F(x). Найдите:
а) функцию плотности распределения f(x);
б) математическое ожидание M(X);
в) дисперсию D(X) и среднее квадратическое отклонение σ(X);
г) постройте графики функций F(x) и f(x).
$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{x^2}{49}, & 0<x\le 7\\ 1, & x>7\end{cases}$$</td><td>3. Случайная величина X задана функцией распределения F(x). Найдите:
а) функцию плотности распределения f(x);
б) математическое ожидание M(X);
в) дисперсию D(X) и среднее квадратическое отклонение σ(X);
г) постройте графики функций F(x) и f(x).
$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{x^2}{64}, & 0<x\le 8\\ 1, & x>8\end{cases}$$</td></tr>
</table>

4. Для случайной величины X, распределенной равномерно на отрезке [a,b], написать функцию распределения F(x), плотность вероятности f(x). Найти математическое ожидание M(X), дисперсию D(X) и среднее квадратическое отклонение σ(X), если задан отрезок: [4,8].	4. Для случайной величины X, распределенной равномерно на отрезке [a,b], написать функцию распределения F(x), плотность вероятности f(x). Найти математическое ожидание M(X), дисперсию D(X) и среднее квадратическое отклонение σ(X), если задан отрезок: [0,5].
5. Для случайной величины X, распределенной по нормальному закону, известны математическое ожидание M(X) и дисперсия D(X). Записать плотность вероятности f(x) и найти вероятность попадания случайной величины X в интервал (α,β):M(X) = 5, D(X) = 4, (3,7).	5. Для случайной величины X, распределенной по нормальному закону, известны математическое ожидание M(X) и дисперсия D(X). Записать плотность вероятности f(x) и найти вероятность попадания случайной величины X в интервал (α,β): M(X) = 1, D(X) = 4, (0,3).
6. Случайная величина X распределена по показательному закону плотностью вероятности $f(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x<0\\ \lambda e^{-\lambda x}, \text{ если } x\ge 0\end{cases}$ Написать плотность вероятности f(x), функцию распределения F(x). Найти математическое ожидание M(x), дисперсию D(x) и среднее квадратическое отклонение σ(x), если: λ = 4.	6. Случайная величина X распределена по показательному закону плотностью вероятности $f(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x<0\\ \lambda e^{-\lambda x}, \text{ если } x\ge 0\end{cases}$ Написать плотность вероятности f(x), функцию распределения F(x). Найти математическое ожидание M(x), дисперсию D(x) и среднее квадратическое отклонение σ(x), если: λ = 5.

Вариант 7	Вариант 8
1.Найти математическое ожидание a) M(X), b) дисперсию D(X), c) среднее квадратическое отклонение σ(X) дискретной случайной величины X по заданному закону распределения. X: -3, 0, 1, 3 p: 0,1, 0,2, 0,4, 0,3	1.Найти математическое ожидание a) M(X), b) дисперсию D(X), c) среднее квадратическое отклонение σ(X) дискретной случайной величины X по заданному закону распределения. X: 1, 3, 4, 7 p: 0,1, 0,5, 0,2, 0,2
2. В урне 7 белых и 10 красных шаров. Наугад вынимают 8 шаров. Найти математическое ожидание и дисперсию числа вынутых белых шаров.	2. В урне 8 белых и 12 красных шаров. Наугад вынимают 9 шаров. Найти математическое ожидание и дисперсию числа вынутых белых шаров.
3. Случайная величина X задана функцией распределения F(x). Найдите: а) функцию плотности распределения f(x); б) математическое ожидание M(X); в) дисперсию D(X) и среднее квадратическое отклонение σ(X); г) постройте графики функций F(x) и f(x). $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{x^2}{81}, & 0<x\le 9\\ 1, & x>9\end{cases}$	3. Случайная величина X задана функцией распределения F(x). Найдите: а) функцию плотности распределения f(x); б) математическое ожидание M(X); в) дисперсию D(X) и среднее квадратическое отклонение σ(X); г) постройте графики функций F(x) и f(x). $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{x^2}{100}, & 0<x\le 10\\ 1, & x>10\end{cases}$

4. Для случайной величины X, распределенной равномерно на отрезке [a,b], написать функцию распределения F(x), плотность вероятности f(x). Найти математическое ожидание M(X), дисперсию D(X) и среднее квадратическое отклонение σ(X), если задан отрезок: [1,5].	4. Для случайной величины X, распределенной равномерно на отрезке [a,b], написать функцию распределения F(x), плотность вероятности f(x). Найти математическое ожидание M(X), дисперсию D(X) и среднее квадратическое отклонение σ(X), если задан отрезок: [2,6].
5. Для случайной величины X, распределенной по нормальному закону, известны математическое ожидание M(X) и дисперсия D(X). Записать плотность вероятности f(x) и найти вероятность попадания случайной величины X в интервал (α,β): 2,6]; е ожидание равно ью ю вероятностей Атоян, Г.Г. Хамов. нкцию распределения и построить ее график..я:ном выстреле pM(X) = 8, D(X) = 4, (5,10).	5. Для случайной величины X, распределенной по нормальному закону, известны математическое ожидание M(X) и дисперсия D(X). Записать плотность вероятности f(x) и найти вероятность попадания случайной величины X в интервал (α,β):M(X) = 2, D(X) = 4, (1,5).
6. Случайная величина X распределена по показательному закону плотностью вероятности $f(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x<0\\ \lambda e^{-\lambda x}, \text{ если } x\ge 0\end{cases}$ Написать плотность вероятности f(x), функцию распределения F(x). Найти математическое ожидание M(x), дисперсию D(x) и среднее квадратическое отклонение σ(x), если: λ = 1.	6. Случайная величина X распределена по показательному закону плотностью вероятности $f(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x<0\\ \lambda e^{-\lambda x}, \text{ если } x\ge 0\end{cases}$ Написать плотность вероятности f(x), функцию распределения F(x). Найти математическое ожидание M(x), дисперсию D(x) и среднее квадратическое отклонение σ(x), если: λ = 2.

Список литературы

1. Аркин П.А. Исследование операций: учебное пособие / П.А. Аркин, К.А. Соловейчик, К.Г. Аркина. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2016.

2. Бородин А.Н. Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики / А.Н. Бородин. – СПб: Издательство «Лань», 2011.

3. Виленкин Н.Я. Комбинаторика / Н.Я. Виленкин, А.Н. Виленкин, П.А. Виленкин. – М: ФИМА, МЦНМО, 2006.

4. Венцель Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Венцель – М: ФМЛ, 1962.

5. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман. – М: Высшая Школа, 2002.

6. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В.Е. Гмурман. – М: Высшая Школа, 2002.

7. Звягинцева Т.Е. Введение в теорию вероятностей: Учебное пособие / Т.Е. Звягинцева. – СПб: Изд-во Высшей Административной школы, 2003.

8. Чурилова М.Ю. Математика. Часть 3: Теория вероятностей: Учебное пособие / под редакцией Г.Г. Хамова / М.Ю.Чурилова, Т.А.Семенова, Е.Г. Копосова, Г.А. Атоян, Г.Г. Хамов. – СПб: Изд-во РГПУ им. А.И.Герцена, 2011.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3726	0,3712	0,3698
0,4	0,3683	0,3668	0,3652	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0395	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0353	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107

2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,00	0,0000	**0,50**	0,1915	**1,00**	0,3413	**1,50**	0,4332	**2,00**	0,4772	**3,00**	0,49865
0,01	0,0040	**0,51**	0,1950	**1,01**	0,3438	**1,51**	0,4345	**2,02**	0,4783	**3,20**	0,49931
0,02	0,0080	**0,52**	0,1985	**1,02**	0,3461	**1,52**	0,4357	**2,04**	0,4793	**3,40**	0,49966
0,03	0,0120	**0,53**	0,2019	**1,03**	0,3485	**1,53**	0,4370	**2,06**	0,4803	**3,60**	0,499841
0,04	0,0160	**0,54**	0,2054	**1,04**	0,3508	**1,54**	0,4382	**2,08**	0,4812	**3,80**	0,499928
0,05	0,0199	**0,55**	0,2088	**1,05**	0,3531	**1,55**	0,4394	**2,10**	0,4821	**4,00**	0,499968
0,06	0,0239	**0,56**	0,2123	**1,06**	0,3554	**1,56**	0,4406	**2,12**	0,4830	**4,50**	0,499997
0,07	0,0279	**0,57**	0,2157	**1,07**	0,3577	**1,57**	0,4418	**2,14**	0,4838	**5,00**	0,499997
0,08	0,0319	**0,58**	0,2190	**1,08**	0,3599	**1,58**	0,4429	**2,16**	0,4846		
0,09	0,0359	**0,59**	0,2224	**1,09**	0,3621	**1,59**	0,4441	**2,18**	0,4854		
0,10	0,0398	**0,60**	0,2257	**1,10**	0,3643	**1,60**	0,4452	**2,20**	0,4861		
0,11	0,0438	**0,61**	0,2291	**1,11**	0,3665	**1,61**	0,4463	**2,22**	0,4868		
0,12	0,0478	**0,62**	0,2324	**1,12**	0,3686	**1,62**	0,4474	**2,24**	0,4875		
0,13	0,0517	**0,63**	0,2357	**1,13**	0,3708	**1,63**	0,4484	**2,26**	0,4881		
0,14	0,0557	**0,64**	0,2389	**1,14**	0,3729	**1,64**	0,4495	**2,28**	0,4887		
0,15	0,0596	**0,65**	0,2422	**1,15**	0,3749	**1,65**	0,4505	**2,30**	0,4893		
0,16	0,0636	**0,66**	0,2454	**1,16**	0,3770	**1,66**	0,4515	**2,32**	0,4898		
0,17	0,0675	**0,67**	0,2486	**1,17**	0,3790	**1,67**	0,4525	**2,34**	0,4904		
0,18	0,0714	**0,68**	0,2517	**1,18**	0,3810	**1,68**	0,4535	**2,36**	0,4909		
0,19	0,0753	**0,69**	0,2549	**1,19**	0,3830	**1,69**	0,4545	**2,38**	0,4913		
0,20	0,0793	**0,70**	0,2580	**1,20**	0,3849	**1,70**	0,4554	**2,40**	0,4918		
0,21	0,0832	**0,71**	0,2611	**1,21**	0,3869	**1,71**	0,4564	**2,42**	0,4922		
0,22	0,0871	**0,72**	0,2642	**1,22**	0,3883	**1,72**	0,4573	**2,44**	0,4927		
0,23	0,0910	**0,73**	0,2673	**1,23**	0,3907	**1,73**	0,4582	**2,46**	0,4931		
0,24	0,0948	**0,74**	0,2703	**1,24**	0,3925	**1,74**	0,4591	**2,48**	0,4934		
0,25	0,0987	**0,75**	0,2734	**1,25**	0,3944	**1,75**	0,4599	**2,50**	0,4938		
0,26	0,1026	**0,76**	0,2764	**1,26**	0,3962	**1,76**	0,4608	**2,52**	0,4941		
0,27	0,1064	**0,77**	0,2794	**1,27**	0,3980	**1,77**	0,4616	**2,54**	0,4945		
0,28	0,1103	**0,78**	0,2823	**1,28**	0,3997	**1,78**	0,4625	**2,56**	0,4948		
0,29	0,1141	**0,79**	0,2852	**1,29**	0,4015	**1,79**	0,4633	**2,58**	0,4951		
0,30	0,1179	**0,80**	0,2881	**1,30**	0,4032	**1,80**	0,4641	**2,60**	0,4953		
0,31	0,1217	**0,81**	0,2910	**1,31**	0,4049	**1,81**	0,4649	**2,62**	0,4956		
0,32	0,1255	**0,82**	0,2939	**1,32**	0,4066	**1,82**	0,4656	**2,64**	0,4959		

0,33	0,1293	**0,83**	0,2967	**1,33**	0,4082	**1,83**	0,4664	**2,66**	0,4961		
0,34	0,1331	**0,84**	0,2995	**1,34**	0,4099	**1,84**	0,4671	**2,68**	0,4963		
0,35	0,1368	**0,85**	0,3023	**1,35**	0,4115	**1,85**	0,4678	**2,70**	0,4965		
0,36	0,1406	**0,86**	0,3051	**1,36**	0,4131	**1,86**	0,4686	**2,72**	0,4967		
0,37	0,1443	**0,87**	0,3078	**1,37**	0,4147	**1,87**	0,4693	**2,74**	0,4969		
0,38	0,1480	**0,88**	0,3106	**1,38**	0,4162	**1,88**	0,4699	**2,76**	0,4971		
0,39	0,1517	**0,89**	0,3133	**1,39**	0,4177	**1,89**	0,4706	**2,78**	0,4973		
0,40	0,1554	**0,90**	0,3159	**1,40**	0,4192	**1,90**	0,4713	**2,80**	0,4974		
0,41	0,1591	**0,91**	0,3186	**1,41**	0,4207	**1,91**	0,4719	**2,82**	0,4976		
0,42	0,1628	**0,92**	0,3212	**1,42**	0,4222	**1,92**	0,4726	**2,84**	0,4977		
0,43	0,1664	**0,93**	0,3238	**1,43**	0,4236	**1,93**	0,4732	**2,86**	0,4979		
0,44	0,1700	**0,94**	0,3264	**1,44**	0,4251	**1,94**	0,4738	**2,88**	0,4980		
0,45	0,1736	**0,95**	0,3289	**1,45**	0,4265	**1,95**	0,4744	**2,90**	0,4981		
0,46	0,1772	**0,96**	0,3315	**1,46**	0,4279	**1,96**	0,4750	**2,92**	0,4982		
0,47	0,1808	**0,97**	0,3340	**1,47**	0,4292	**1,97**	0,4756	**2,94**	0,4984		
0,48	0,1844	**0,98**	0,3365	**1,48**	0,4306	**1,98**	0,4761	**2,96**	0,4985		
0,49	0,1879	**0,99**	0,3389	**1,49**	0,4319	**1,99**	0,4767	**2,98**	0,4986		

Аркин Павел Александрович
Соловейчик Кирилл Александрович
Салкуцан Сергей Владимирович
Щеголев Владимир Владимирович
Лавров Андрей Станиславович
Аркина Ксения Георгиевна

ЭКОНОМИКА ФИРМЫ: ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебное пособие

Компьютерная верстка *С. В. Горячевой*

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, т. 2; 95 3005 – учебная литература

Подписано в печать 12.04.2019. Формат 60×84/16. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 8,75. Тираж 60. Заказ 17613b.

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре
Политехнического университета.
195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29.
Тел. : (812) 552-77-17; 550-40-14.