Глава 4. Теория игр.

4.1. Игровые модели

Теория игр – раздел исследования операций, в котором изучаются процессы принятия решений в условиях конфликта. Другими словами, теория игр дает математический прогноз конфликтной ситуации. Для возможности проведения анализа конфликта, необходимо построить её абстрактную модель, которую будем называть **игрой**. Стороны, участвующие в конфликте, называются **игроками**, а исход конфликта — **выигрышем**.

Платежная матрица (матрица эффективности, матрица игры) включает все значения выигрышей (в конечной игре). Пусть игрок 1 имеет m стратегий A_i, а игрок 2 - n стратегий B_j, $(i=1,...,m, \quad j=1,...,n)$. Игра может быть названа игрой $m \times n$. Представим матрицу эффективности игры двух лиц с нулевой суммой, сопроводив ее необходимыми обозначениями (табл. 4.1.1).

Таблица 4.1.1

Игрок 1 \ Игрок 2	B_1	B_2	……	B_n	α_i
A_1	a_{11}	a_{12}	……	a_{1n}	α_1
A_2	a_{21}	a_{22}	……	a_{2n}	α_2
…………………………	……	……	……	……	……
A_m	a_{m1}	a_{m2}	……	a_{mn}	α_m
β_j	β_1	β_2	…….	β_n	

В данной матрице элементы a_{ij} – значения выигрышей игрока 1 – могут означать и математическое ожидание выигрыша (среднее значение), если выигрыш является случайной величиной. Величины α_i,– соответственно минимальные значения элементов a_{ij} по строкам и β_j - максимальные по столбцам. Их содержательный смысл будет отражен в следующих параграфах.

Целью каждого участника игры является получение возможного большего выигрыша.

Для каждой формализованной игры вводятся **правила**, т.е. система условий, определяющая: варианты действий игроков; объем информации каждого игрока о поведении партнеров; выигрыш, к которому приводит каждая совокупность действий.

Выигрыш (или проигрыш) может быть задан количественно; например, можно оценить проигрыш - нулем, выигрыш - единицей, а ничью - $1/2$.

Выбор и осуществление одного из предусмотренных правилами действий называется **ходом** игрока. Ходы могут быть личными и случайными. **Личный ход** — это сознательный выбор игроком одного из возможных действий (например, ход в шахматной игре). **Случайный ход** — это случайно выбранное действие (например, выбор карты из перетасованной колоды). В дальнейшем мы будем рассматривать только личные ходы игроков.

Стратегией игрока называется совокупность правил, определяющих выбор его действия при каждом личном ходе в зависимости от сложившейся ситуации. Обычно в процессе игры при каждом личном ходе игрок делает выбор в зависимости от конкретной ситуации. Однако в принципе, возможно, что все решения приняты игроком заранее (в ответ на любую сложившуюся ситуацию). Это означает, что игрок выбрал определенную стратегию, которая может быть задана в виде списка правил или программы. (Так можно осуществить игру с помощью ЭВМ).

Для того чтобы решить игру, или найти решение игры, следует для каждого игрока выбрать стратегию, которая удовлетворяет условию **оптимальности**, т.е. один из игроков должен получать **максимальный выигрыш**, когда второй придерживается своей стратегии. В то же время второй игрок должен иметь **минимальный проигрыш**, если первый придерживается своей стратегии. Такие **стратегии** называются **оптимальными**. Оптимальные стратегии должны также удовлетворять **условию устойчивости**, т.е. любому из игроков должно быть невыгодно отказаться от своей стратегии в этой игре.

Если **игра повторяется достаточно много раз**, то игроков может интересовать не выигрыш и проигрыш в каждой конкретной партии, а **средний выигрыш (проигрыш) во всех партиях**.

Цель теории игр: определение оптимальной стратегии для каждого игрока. При выборе оптимальной стратегии естественно предполагать, что оба игрока ведут себя разумно с точки зрения своих интересов.

Важнейшее ограничение теории игр: единственность выигрыша как показателя эффективности, в то время как в большинстве реальных задач имеется более одного показателя эффективности. Кроме того, как правило, возникают задачи, в которых интересы партнеров не обязательно антагонистические. Однако конфликты приводят к разным исходам, а значит, и к различным видам игр, для каждой из которых есть свой метод решения.

Игры классифицируются по целому списку направлений:

1. **По количеству игроков:** парные игры и игры n игроков.

Игра называется парной, если в ней участвуют два игрока, и множественной, если число игроков больше двух.

2. **По количеству стратегий:** конечные и бесконечные.

В конечной игре каждый из игроков имеет конечное число возможных стратегий. Если хотя бы один из игроков имеет бесконечное число возможных стратегий, игра является бесконечной.

3. **По характеру взаимоотношений:** бескоалиционные, коалиционные и кооперативные.

Если игроки не имеют право вступать в соглашения, образовывать коалиции, то такая игра относится к бескоалиционным; если игроки могут вступать в соглашения, создавать коалиции - коалиционной. Кооперативная игра - это игра, в которой заранее определены коалиции.

4. **По характеру выигрышей:** игры с нулевой суммой (антагонистические) и игры с ненулевой суммой (неантагонистические).

Игра с нулевой суммой предусматривает условие: «сумма выигрышей всех игроков в каждой партии равна нулю». Игры двух игроков с нулевой суммой относят к классу антагонистических. Естественно, выигрыш одного игрока при этом равен проигрышу другого. Игра, в которой нужно вносить взнос за право участия в ней, является игрой с ненулевой суммой. Конечная игра с ненулевой суммой называется биматричной игрой. Доказано, что игру n лиц с ненулевой суммой всегда можно преобразовать в игру $n+1$ лиц с нулевой суммой путем добавления “фиктивного игрока”.

5. **По количеству ходов:** одношаговые и многошаговые.

Одношаговые игры заканчиваются после одного хода каждого игрока. Так, в матричной игре после одного хода каждого из игроков происходит распределение выигрышей.

Многошаговые игры бывают позиционными, стохастическими, дифференциальными и др.

6. **В зависимости от состояния информации:** игры с полной и неполной информацией.

Если каждый игрок на каждом ходу игры знает все ранее примененные другими игроками на предыдущих ходах стратегии, такая игра определяется как игра с полной информацией.

Если игроку не все стратегии предыдущих ходов других игроков известны, то игра классифицируется как игра с неполной информацией.

Мы далее убедимся, что игра с полной информацией имеет решение. Решением будет седловая точка при чистых стратегиях.

Степень неполноты информации. По этому критерию игры подразделяются на статистические (в условиях частичной неопределенности) и стратегические (в условиях полной неопределенности (см. пункт 4.7)). Игры с природой часто относят к статистическим играм. В статистической игре имеется возможность получения информации на основе статистического эксперимента, при котором вычисляется или оценивается распределение вероятностей состояний (стратегий) природы. С теорией статистических игр тесно связана теория принятия экономических решений.

7. **По виду выигрыша:** матричные, биматричные и непрерывные.

Матричная игра - конечная игра двух игроков с нулевой суммой. В общем случае ее платежная матрица является прямоугольной (см. таблицу 4.1.1). Номер строки матрицы соответствует номеру стратегии, применяемой игроком 1. Номер столбца соответствует номеру стратегии игрока 2. Выигрыш игрока 1 является элементом матрицы. Выигрыш игрока 2 равен проигрышу игрока 1. Матричные игры всегда имеют решения в смешанных стратегиях. Они могут быть решены методами линейного программирования.

Биматричная игра - конечная игра двух игроков с ненулевой суммой. Выигрыши каждого игрока задаются своей матрицей, в которой строка соответствует стратегии игрока 1, а столбец — стратегии игрока 2. Однако элемент первой матрицы показывает выигрыш игрока 1, а элемент второй матрицы - выигрыш игрока 2. Для биматричных игр так же, как и для матричных, разработана теория оптимального поведения игроков.

Если функция выигрышей каждого игрока в зависимости от стратегий является непрерывной, игра считается непрерывной.

4.2. Нижняя и верхняя цена игры. Чистые стратегии. Седловая точка

Рассмотрим матричную игру, представленную матрицей выигрышей $m \times n$, где число строк $i = 1,...,m$, а число столбцов $j = 1,...,n$ (см. табл. 4.1.1).

Применим принцип получения максимального гарантированного результата при наихудших условиях. Игрок 1 стремится принять такую стратегию, которая должна обеспечить максимальный проигрыш игрока 2. Соответственно игрок 2 стремится принять стратегию, обеспечивающую минимальный выигрыш игрока 1. Рассмотрим оба этих подхода.

Подход игрока 1. Он должен получить максимальный гарантированный результат при наихудших условиях. Значит, при выборе отвечающей этим условиям своей чистой стратегии он должен выбрать гарантированный результат в наихудших условиях, т.е. наименьшее значение своего выигрыша, которое обозначим

$$\alpha_i = \min_j a_{ij} \tag{4.2.1}$$

Чтобы этот гарантированный эффект в наихудших условиях был максимальным, нужно из всех α_i, выбрать наибольшее значение. Обозначим его α и назовем **чистой нижней ценой игры** («**максимин**»):

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_{ij} \tag{4.2.2}$$

Таким образом, максиминной стратегии отвечает строка матрицы, которой соответствует элемент α_i. Какие бы стратегии ни применял игрок 2, игрок 1 максиминной чистой стратегией гарантировал себе выигрыш, не меньший, чем α_i. Таково оптимальное поведение игрока 1.

Подход игрока 2. Своими оптимальными стратегиями он стремится уменьшить выигрыш игрока 1, поэтому при каждой j-й чистой стратегии он отыскивает величину своего максимального проигрыша

$$\beta_j = \max_i a_{ij} \tag{4.2.3}$$

в каждом j-м столбце, т.е. определяет максимальный выигрыш игрока 1, если игрок 2 применит j-ю чистую стратегию. Из всех своих n j-х чистых стратегий он отыскивает такую, при которой игрок 1 получит минимальный выигрыш, т.е. определяет **чистую верхнюю цену игры** («**минимакс**»):

$$\beta = \min_j \beta_j = \min_j \max_i a_{ij} \tag{4.2.4}$$

Чистая верхняя цена игры показывает, какой максимальный выигрыш может гарантировать игрок 1, применяя свои чистые стратегии, - выигрыш, не меньший, чем α. Игрок 2 за счет указанного выше выбора своих чистых стратегий не допустит, чтобы игрок 1 мог получить выигрыш, больший, чем β. Таким образом, минимаксная стратегия отображается столбцом платежной матрицы, в котором находится элемент β (см. табл. 4.1.1). Она является оптимальной чистой гарантирующей стратегией игрока 2, если он ничего не знает о действиях игрока 1.

Принцип, диктующий игрокам выбор наиболее "осторожных" минимаксной и максиминной стратегий, называется **принципом минимакса**.

Чистая цена игры v - цена данной игры, если нижняя и верхняя ее цены совпадают:

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = v \tag{4.2.5}$$

В этом случае игра называется **игрой с седловой точкой.**

Задача 4.2.1. Определить верхнюю и нижнюю цены при заданной матрице игры и указать максиминную и минимаксную стратегии. Представим матрицу игры с обозначениями стратегий β_j, α_i.

Таблица 4.2.1

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	1	2	3	1
A_2	4	5	6	4
β_j	4	5	6	

Решение. Определим нижнюю цену игры:

$\alpha_1 = 1$; $\alpha_2 = 4$, $\alpha = 4$ (см. столбец α_i).

Определим верхнюю цену игры:

$\beta_1 = 4$; $\beta_2 = 5$, $\beta_3 = 6$; $\beta = 4$ (см. строку β_j).

Таким образом, $\alpha = \beta = 4$, т.е.

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = \nu = 4.$$

Значит, $\nu = 4$ - чистая цена игры при стратегиях A_2 и B_1. Следовательно, имеем игру с седловой точкой.

Задача 4.2.2. Определим максиминную и минимаксную стратегии при заданной матрице эффективности.

Таблица 4.2.2

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	2	7	6	10	2
A_2	8	4	9	5	4
β_j	8	7	9	10	

Решение. Определим максиминную стратегию:

$\alpha_1 = 2$; $\alpha_2 = 4$, $\alpha = 4$ (см. столбец α_i).

Максиминная стратегиях - строка A_2.

Определим минимаксную стратегию:

$\beta_1 = 1$; $\beta_2 = 7$, $\beta_3 = 9$; $\beta_4 = 10$; $\beta = 7$ (см. столбец β_j).

Максиминная стратегия – столбец B_2.

Здесь $\alpha < \beta$, следовательно, Седловой точки нет.

Если матрица игры содержит элемент, минимальный в своей строке и максимальный в своем столбце, то он, как уже сказано выше, является седловой точкой. В этом случае мы имеем игру с седловой точкой.

Пусть в игре с седловой точкой один игрок придерживается седловой точки, тогда другой получит лучший результат, если также будет придерживаться этой точки. Лучшее поведение игрока не должно повлечь уменьшение его выигрыша. Зато худшее поведение может привести к этому.

В данном случае решением игры являются:

• чистая стратегия игрока 1;

• чистая стратегия игрока 2;

• седловой элемент.

Оптимальные чистые стратегии — это чистые стратегии, образующие седловую точку.

В игре без седловой точки, если игрок 1 информирован о стратегии, принятой игроком 2, он сможет принять оптимальную стратегию, которая не совпадает с максиминной.

Задача 4.2.3. Дана матрица игры

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 & 6 & 11 \\ 8 & 4 & 12 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

Допустим, игроку 1 стало известно, что игрок 2 принял минимаксную стратегию. Игрок 1 должен выбрать оптимальную стратегию при условии, что B_2 – стратегия игрока 2 ($\beta=5$).

Решение. Определим максиминную стратегию игрока 1:

$\alpha_1=3$; $\alpha_2=4$, $\alpha=4$.

Стратегия игрока 1 - A_2 - максиминная.

Выберем оптимальную стратегию для игрока 1. Ею будет не максиминная A_2, дающая игроку 1 выигрыш $\alpha=4$, а та стратегия, которая соответствует $\max\limits_i a_{ij}$. В этом случае его максимальный гарантированный выигрыш будет равен верхней цене игры $\beta=5$, поэтому он выберет свою оптимальную стратегию A_1, зная, что игрок 2 выбрал свою стратегию B_2.

Таким образом, рассмотренная задача дает результат, отличный от результата при игре с седловой точкой.

Стратегия является **оптимальной**, если ее применение обеспечит игроку наибольший гарантированный выигрыш при любых возможных стратегиях другого игрока.

В задаче 4.2.3 показано, что бывают ситуации, когда игрок 1 может получить выигрыш, превосходящий максиминный, если ему известны намерения игрока 2.

При многократном повторении игры в сходных условиях можно добиться гарантированного среднего выигрыша, превосходящего для игрока 1 максиминный.

4.3. Смешанные стратегии

Если в матричной игре отсутствует седловая точка в чистых стратегиях, то находят верхнюю и нижнюю цены игры. Они показывают, что игрок 1 не получит выигрыша, превосходящего верхнюю цену игры, и что игроку 1 гарантирован выигрыш, не меньший нижней цены игры. В примере 4.2.3 игрок 1 получил по своей оптимальной стратегии A_1, отличной от максиминной, выигрыш, равный верхней цене игры. Такова плата за информированность о стратегии игрока 2. Это крайний случай. Не улучшится ли результат игрока 1, если информация о действиях противной стороны будет отсутствовать, но игрок будет многократно применять чистые стратегии случайным образом с определенной вероятностью?

В такой ситуации, оказывается, можно получать выигрыши, в среднем большие нижней цены игры, но меньшие верхней.

Смешанная стратегия игрока - это полный набор применения его чистых стратегий при многократном повторении игры в одних и тех же условиях с заданными вероятностями.

Подведем итоги сказанного и перечислим условия применения смешанных стратегий:

- игра без седловой точки;
- игроки используют случайную смесь чистых стратегий с заданными вероятностями;
- игра многократно повторяется в сходных условиях;
- при каждом из ходов ни один игрок не информирован о выборе стратегии другим игроком;
- допускается осреднение результатов игр.

Применяются следующие обозначения смешанных стратегий:

Для игрока 1 смешанная стратегия, заключающаяся в применении чистых стратегий A_1, A_2,..., A_m с соответствующими вероятностями p_1, p_2,..., p_m,

$$S_1 = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix}, \qquad (4.3.1)$$

где $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1,\ p_i \geq 0$.

Для игрока 2

$$S_2 = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_m \\ q_1 & q_2 & \dots & q_m \end{pmatrix}, \qquad (4.3.2)$$

где $\sum_{j=1}^{m} q_j = 1, q_j \geq 0$, q_j – вероятность применения чистой стратегии B_j.

В случае, когда $p_i = 1$, для игрока 1 имеем чистую стратегию:

$$S_1 = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & ,\dots, & A_i & ,\dots, & A_m \\ 0 & 0 & ,\dots, & 1 & ,\dots, & 0 \end{pmatrix}. \qquad (4.3.3)$$

Чистые стратегии игрока являются единственно возможными несовместными событиями. В матричной игре, зная матрицу A (она относится и к игроку 1, и к игроку 2), можно определить при заданных векторах $\vec{p}$ и $\vec{q}$ средний выигрыш (математическое ожидание эффекта) игрока 1:

$$M\left(A, \vec{p}, \vec{q}\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} p_i q_j\ , \qquad (4.3.4)$$

где $\vec{p}$ и $\vec{q}$ - векторы; p_i и q_j - компоненты векторов.

Путем применения своих смешанных стратегий игрок 1 стремится максимально увеличить свой средний выигрыш, а игрок 2 - довести этот эффект до минимально возможного значения.

Игрок 1 стремится достигнуть

$$\beta = \min_{\vec{q}} \max_{\vec{p}} M\left(A, \vec{p}, \vec{q}\right). \qquad (4.3.5)$$

Игрок 2 добивается того, чтобы выполнялось условие

$$\alpha = \max_{\vec{p}} \min_{\vec{q}} M\left(A, \vec{p}, \vec{q}\right). \qquad (4.3.6)$$

Обозначим $\vec{p}_0$ и $\vec{q}_0$ векторы, соответствующие оптимальным смешанным стратегиям игроков 1 и 2, т.е. такие векторы $\vec{p}_0$ и $\vec{q}_0$, при которых будет выполнено равенство

$$\min_{\vec{q}} \max_{\vec{p}} M\left(A, \vec{p}, \vec{q}\right) = \max_{\vec{p}} \min_{\vec{q}} M\left(A, \vec{p}, \vec{q}\right) = M\left(A, \vec{p}_0, \vec{q}_0\right). \quad (4.3.7)$$

Цена игры γ – средний выигрыш игрока 1 при использовании обоими игроками смешанных стратегий.

Следовательно, решением матричной игры являются:

1) $\vec{p}_0$ - оптимальная смешанная стратегия игрока 1;

2) $\vec{q}_0$ - оптимальная смешанная стратегия игрока 2;

3) γ - цена игры.

Смешанные стратегии будут оптимальными ($\vec{p}_0$ и $\vec{q}_0$), если они образуют седловую точку для функции $M\left(A, \vec{p}, \vec{q}\right)$, т.е.

$$M\left(A, \vec{p}, \vec{q}_0\right) \le M\left(A, \vec{p}_0, \vec{q}_0\right) \le M\left(A, \vec{p}_0, \vec{q}\right). \quad (4.3.8)$$

Теорема 4.3.1. (основная теорема теории матричных игр). Для матричной игры с любой матрицей А величины $\alpha = \max_{\vec{p}} \min_{\vec{q}} M\left(A, \vec{p}, \vec{q}\right)$ и $\beta = \min_{\vec{q}} \max_{\vec{p}} M\left(A, \vec{p}, \vec{q}\right)$ существуют и равны между собой: $\alpha = \beta = \gamma$.

Из теоремы следует, что всякая матричная игра имеет цену; игрок в матричной игре всегда имеет оптимальную стратегию.

Следует отметить, что при выборе оптимальных стратегий игроку 1 всегда будет гарантирован средний выигрыш, не меньший, чем цена игры, при любой фиксированной стратегии игрока 2 (и, наоборот, для игрока 2). Активными стратегиями игроков 1 и 2 называют стратегии, входящие в состав оптимальных смешанных стратегий соответствующих игроков с вероятностями, отличными от нуля. Значит, в состав оптимальных смешанных стратегий игроков могут входить не все априори заданные их стратегии.

Теорема 4.3.2. (об активных стратегиях). Если один из игроков придерживается своей оптимальной смешанной стратегии, то выигрыш остается неизменным и равным цене игры γ, если второй игрок не выходит за пределы своих активных стратегий.

Эта теорема имеет большое практическое значение — она дает конкретные модели нахождения оптимальных стратегий при отсутствии седловой точки.

Решить игру - означает найти цену игры и оптимальные стратегии.

Рассмотрение методов нахождения оптимальных смешанных стратегий для матричных игр начнем с простейшей игры, описываемой матрицей 2x2.

Игры с седловой точкой специально рассматриваться не будут. Если получена седловая точка, то это означает, что имеются невыгодные стратегии, от которых следует отказываться. При отсутствии седловой точки можно получить две оптимальные смешанные стратегии. Как уже отмечалось, эти смешанные стратегии записываются так:

$$S_1^0 = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}, \tag{4.3.9}$$

$$S_2^0 = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix}. \tag{4.3.10}$$

Для того чтобы их найти, воспользуемся теоремой об активных стратегиях.

Если игрок 1 придерживается своей оптимальной стратегии S_1^0, то его средний выигрыш будет равен цене игры γ, какой бы активной стратегией ни пользовался игрок 2. Для игры 2×2 любая чистая стратегия противника является активной, если отсутствует седловая точка. Выигрыш игрока 1 (проигрыш игрока 2) — случайная величина, математическое ожидание (среднее значение) которой является ценой игры. Поэтому средний выигрыш игрока 1 (оптимальная стратегия) будет равен γ и для 1-й, и для 2-й стратегии противника.

Пусть игра задана платежной матрицей: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. (4.3.11)

Средний выигрыш игрока 1, если он использует оптимальную смешанную стратегию S_1^0, а игрок 2 — чистую стратегию B_1 (это соответствует 1-му столбцу платежной матрицы A), равен цене игры γ: $a_{11}p_1^0+a_{21}p_2^0=\gamma$. Тот же средний выигрыш получает игрок 1, если 2-й игрок применяет стратегию B_2, т.е. $a_{12}p_1^0+a_{22}p_2^0=\gamma$.

Учитывая, что $p_1^0+p_2^0=1$, получаем систему уравнений для определения оптимальной стратегии S_1^0 и цены игры γ:

$$\begin{cases} a_{11}p_1^0+a_{21}p_2^0=\gamma \\ a_{12}p_1^0+a_{22}p_2^0=\gamma \\ p_1^0+p_2^0=1 \end{cases} \qquad (4.3.12)$$

Решая эту систему, получим оптимальную стратегию p_1^0 и p_2^0:

$$\begin{aligned} p_1^0 &= \frac{a_{22}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}} \\ p_2^0 &= \frac{a_{11}-a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}. \end{aligned} \qquad (4.3.13)$$

Зная p_1^0 и p_2^0 находим γ:

$$\gamma=\frac{a_{22}a_{11}-a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}. \qquad (5.3.14)$$

Применяя теорему об активных стратегиях при отыскании S_2^0 оптимальной стратегии игрока 2, получаем, что при любой чистой стратегии игрока 1 (A_1 или A_2) средний проигрыш игрока 2 равен цене игры γ, т.е.

$$\begin{cases} a_{11}q_1^o + a_{12}q_2^o = \gamma \\ a_{21}q_1^0 + a_{22}q_2^o = \gamma \\ q_1^0 + q_2^0 = 1 \end{cases}. \qquad (4.3.15)$$

Тогда оптимальная стратегия определяется формулами:

$$q_1^0 = \frac{a_{22}-a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}$$
$$q_2^0 = \frac{a_{11}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}. \qquad (4.3.16)$$

Задача решена, так как найдены векторы $\vec{q}_0\left(q_1^0, q_2^0\right)$, $\vec{p}_0\left(p_1^0, p_2^0\right)$ и цена игры γ.

Имея матрицу платежей A, можно решить задачу графически. При этом методе алгоритм решения весьма прост (рис. 4.3.1):

1. По оси абсцисс откладывается отрезок единичной длины.
2. По оси ординат откладываются выигрыши при стратегии A_1.
3. На линии, параллельной оси ординат, в точке 1 откладываются выигрыши при стратегии A_2.
4. Концы отрезков обозначаются $a_{11}-b_{11}$, $a_{12}-b_{21}$, $a_{22}-b_{22}$, $a_{21}-b_{12}$ и проводятся две прямые линии $b_{11}b_{12}$ и $b_{21}b_{22}$
5. Определяется ордината точки пересечения c. Она равна γ.

Данный метод имеет достаточно широкую область приложения. Это основано на **общем свойстве игр** $m\times n$, состоящем в том, что в любой игре $m\times n$ каждый игрок имеет оптимальную смешанную стратегию, в которой число чистых стратегий не больше, чем $\min(m,n)$. Из этого свойства можно получить известное **следствие**: в любой игре $2\times n$ и $m\times 2$ каждая оптимальная стратегия S_1^0 и S_2^0 содержит не более двух активных стратегий.

Значит, любая игра $2\times n$ и $m\times 2$ может быть сведена к игре 2×2. Следовательно, игры $2\times n$ и $m\times 2$ можно решить графическим методом.

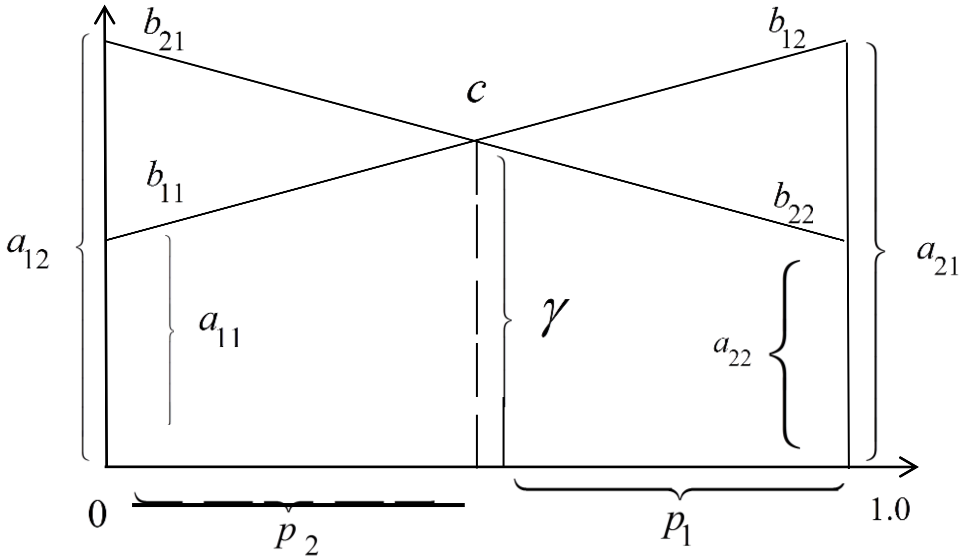

Рис. 4.3.1. Оптимальная смешанная стратегия

Рассмотрим некоторые практические задачи, в которых используются критерии игр для оценки наиболее эффективного поведения оперирующей стороны.

Задача 4.3.1. Выбрать оптимальный режим работы новой системы компьютеров, состоящей из компьютеров типов A_1 и A_2. Известны выигрыши от внедрения каждого типа компьютеров в зависимости от внешних условий, если сравнить со старой системой. При использовании компьютеров типов A_1 и A_2 в зависимости от характера решаемых задач B_1 и B_2 (долговременные и краткосрочные) будет разный эффект. Предполагается, что максимальный выигрыш соответствует наибольшему значению критерия эффекта от замены техники старого поколения на компьютеры типов A_1 и A_2.

Итак, дана матрица игры (таблица 4.3.1), где A_1, A_2 - стратегии руководителя; B_1, B_2 - стратегии, отражающие характер решаемых задач.

Таблица 4.3.1

Игрок 2 / Игрок 1	B_1	B_2	α_i
A_1	0.3	0.8	0.3
A_2	0.7	0.4	0.4
β_j	0.7	0.8	

Требуется найти оптимальную смешанную стратегию руководителя и гарантированный средний результат, т.е. определить, какую долю времени должны использоваться компьютеры типов A_1 и A_2.

Решение. Запишем условия в принятых индексах:

$a_{11}=0.3$, $a_{12}=0.8$, $a_{21}=0.7$, $a_{22}=0.4$.

Определим нижнюю и верхнюю цены игры:

$\alpha_1=0.3;\ \alpha_2=0.4,\ \alpha=0.4$.

$\beta_1=0.7;\ \beta_2=0.8,\ \beta=0.7$.

Получаем игру без седловой точки, так как

$$\max_i \min_j a_{ij} = a_{22} = 0.4,$$

$$\min_j \max_i a_{ij} = a_{21} = 0.7.$$

Максиминная стратегия руководителя компьютерного центра – A_2. Для этой стратегии гарантированный выигрыш равен = 0.4 (40 %) по сравнению со старой системой.

Решение для определения γ, p_1 и p_2 проведем графически (рис. 4.3.2).

Алгоритм решения.

1. По оси абсцисс отложим отрезок единичной длины.
2. По оси ординат отложим выигрыши при стратегии A_1.
3. На вертикали в точке 1 отложим выигрыши при стратегии A_2.
4. Проводим прямую $b_{11}b_{12}$, соединяющую точки $a_{11}a_{21}$.

5. Проводим прямую $b_{21}b_{22}$, соединяющую точки $a_{12}b_{22}$.

6. Определяем ординату точки пересечения c линий $b_{11}b_{12}$ и $b_{21}b_{22}$. Она равна γ.

7. Определим абсциссу точки пересечения c. Она равна p_2, а $p_1 = 1 - p_2$.

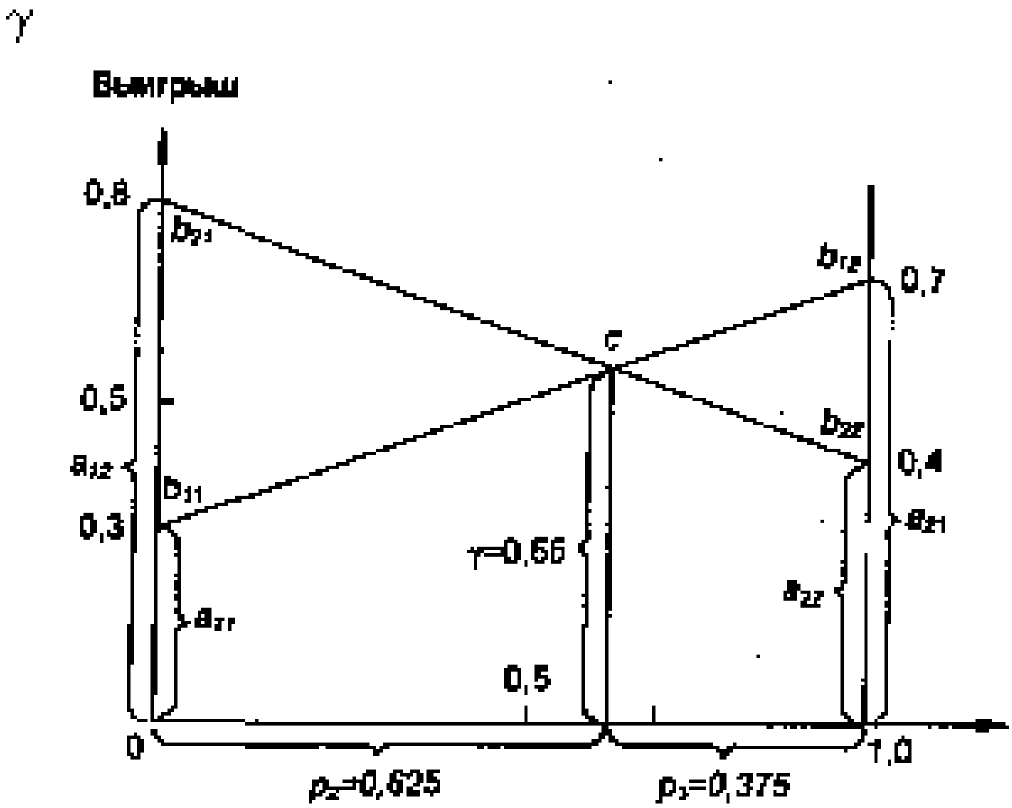

Рис. 4.3.2. Графическая интерпретация алгоритма решения

Выпишем решение и представим оптимальную стратегию игры:

$$p_1 = 0.3751; p_2 = 0.625; \gamma = 0.55; \quad S^o = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0.375 & 0.625 \end{pmatrix}.$$

Вывод. При установке компьютеров новой системы, если неизвестны условия решения задач заказчика, на работу компьютеров типа A_1 должно приходиться 37.5 % времени, а на работу компьютеров типа A_2 - 62.5 %. При этом выигрыш составит 55 % по сравнению с предыдущим поколением компьютеров.

4.4. Мажорирование стратегий по строкам и столбцам

Мажорирование представляет отношение между стратегиями, наличие которого во многих практических случаях дает возможность сократить размеры исходной платежной матрицы игры.

Рассмотрим это понятие на примере матрицы

$$\begin{pmatrix} -0.5 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Рассуждая с позиции игрока 2, можно обнаружить преимущество его третьей стратегии перед второй, поскольку при первой стратегии игрока 1 выигрыш игрока 2 равен (-3) (вторая стратегия) и 1 (третья стратегия), а при второй стратегии игрока 1 выигрыш игрока 2 равен (-2) (вторая стратегия) и (-0.5) (третья стратегия).

Таким образом, при любой стратегии игрока 1 игроку 2 выгоднее применять свою третью стратегию по сравнению со второй; при наличии третьей стратегии игрок 2, если он стремится играть оптимально, никогда не будет использовать свою вторую стратегию, поэтому ее можно исключить из игры, т.е. в исходной платежной матрице можно вычеркнуть 2-й столбец:

$$\begin{pmatrix} -0.5 & -1 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

С позиции игрока 1 его первая стратегия оказывается хуже второй, так как по первой стратегии он только проигрывает. Поэтому первую стратегию можно исключить, а матрицу игры преобразовать к виду:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Учитывая интересы игрока 2, следует оставить только его первую стратегию, поскольку, выбирая вторую стратегию, игрок 2 оказывается в проигрыше (0.5 - выигрыш игрока 1), и матрица игры принимает простейший вид: (0), т.е. имеется седловая точка.

Мажорирование можно распространить и на смешанные стратегии. Если элементы одной строки не все меньше (или равны) соответствующих элементов других строк, но все меньше (или равны) некоторых выпуклых линейных комбинаций соответствующих элементов других строк, то эту стратегию можно исключить, заменив ее смешанной стратегией с соответствующими частотами использования чистых стратегий.

В качестве иллюстрации к сказанному рассмотрим матрицу игры:

$$\begin{pmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 8 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Для первых двух чистых стратегий игрока 1 возьмем частоты их применения (вероятности) равными 0.25 и 0.75.

Третья стратегия игрока 1 мажорируется линейной выпуклой комбинацией первой и второй чистых стратегий, взятых с частотами 0.25 и 0,75 соответственно, т.е. смешанной стратегией

$$24 \cdot 0.25 + 0 \cdot 0.75 = 6 > 4;$$

$$0 \cdot 0.25 + 8 \cdot 0.75 = 6 > 5.$$

Поэтому третью стратегию игрока 1 можно исключить, используя вместо нее указанную выше смешанную стратегию.

Аналогично, если каждый элемент некоторого столбца больше или равен некоторой выпуклой линейной комбинации соответствующих элементов некоторых других столбцов, то этот столбец можно исключить из рассмотрения (вычеркнуть из матрицы).

Например, для матрицы $\begin{pmatrix} 10 & 0 & 6 \\ 0 & 10 & 7 \end{pmatrix}$ третья стратегия игрока 2 мажорируется смешанной стратегией из первой и второй его чистых стратегий, взятых с частотами 0.5 и 0.5:

$$10 \cdot 0.5 + 0 \cdot 0.5 = 5 < 6;$$

$$0 \cdot 0.5 + 10 \cdot 0.5 = 5 < 7.$$

Таким образом, исходная матрица игры эквивалентна матрице следующего вида: $\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$.

Как видно, возможности мажорирования смешанными стратегиями в отличие от чистых значительно менее прозрачны (нужно должным образом подобрать частоты применения чистых стратегий), но такие возможности есть, и ими полезно уметь пользоваться.

Рассмотрим экономическую задачу, сводящуюся к игровой модели.

Задача 4.4.1. Предприятие выпускает скоропортящуюся продукцию, которую может сразу отправить потребителю (стратегия A_1), отправить на склад для хранения (стратегия A_2) или подвергнуть дополнительной обработке (стратегия A_3) для длительного хранения. Потребитель может приобрести продукцию: немедленно (стратегия B_1), в течение небольшого времени (B_2), после длительного периода времени (B_3). В случае стратегий A_2 и A_3, предприятие несет дополнительные затраты на хранение и обработку продукции, которые не требуются для A_1, однако при A_2 следует учесть возможные убытки из-за порчи продукции, если потребитель выберет стратегии B_2 или B_3. Определить оптимальные пропорции продукции для применения стратегий A_1, A_2, A_3 руководствуясь "минимаксным критерием" (гарантированный средний уровень убытка) при матрице затрат, представленной табл. 4.4.1.

Таблица 4.4.1

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3
A_1	2	5	8
A_2	7	6	10
A_3	12	10	8

Решение. Получаем игру с платежной матрицей $P=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 7 & 6 & 10 \\ 12 & 10 & 8 \end{pmatrix}$. В этой матрице первую строку можно отбросить как невыгодную (ее элементы меньше соответствующих элементов второй строки). Матрица примет вид $P=\begin{pmatrix} 7 & 6 & 10 \\ 12 & 10 & 8 \end{pmatrix}$. Элементы первого столбца больше соответствующих элементов второго столбца, поэтому его можно отбросить.

Игра упростилась: $P=\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$.

По формулам (4.3.13) и (4.3.14) находим: $p_2^0=\dfrac{8-10}{6+8-10-10}=\dfrac{1}{3}$, $p_3^0=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$, $\gamma=\dfrac{6\cdot 1}{3}+\dfrac{10\cdot 2}{3}=\dfrac{26}{3}=8\dfrac{2}{3}$.

Вывод. Оптимальная стратегия производителя продукции $S_A^0=\left(0;\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3}\right)$, т.е. стратегия A_1 не применяется, 1/3 продукции отправляется на склад (стратегия A_2), 2/3 продукции дополнительно обрабатывается (стратегия A_3), при этом цена игры $\gamma=8\dfrac{2}{3}$.

4.5. Приведение матричной игры к паре двойственных задач линейного программирования.

Игра $m \times n$ в общем случае не имеет наглядной геометрической интерпретации. Ее решение достаточно трудоемко при больших m и n, однако принципиальных трудностей не имеет, поскольку может быть сведено к решению задачи линейного программирования. Покажем это.

Пусть игра $m \times n$ задана платежной матрицей $p = (a_{ij})$, $i = 1,...,m$; $j = 1,...,n$. Игрок A обладает стратегиями A_1, A_2,..., A_m, игрок B - стратегиями B_1, $B_2,\ldots,B_n$. Необходимо определить оптимальные стратегии $S_A^0 = \left(p_1^0, p_2^0,...,p_m^0\right)$ и $S_B^0 = \left(q_1^0, q_2^0,...,q_n^0\right)$, где p_i^0, q_j^0 — вероятности применения соответствующих чистых стратегий A_i, B_j, $p_1^0 + p_2^0 + ... + p_m^0 = 1$, $q_1^0 + q_2^0 + ... + q_n^0 = 1$.

Оптимальная стратегия S_A^0 удовлетворяет следующему требованию. Она обеспечивает игроку A средний выигрыш, не меньший, чем цена игры v, при любой стратегии игрока B и выигрыш, равный цене игры v, при оптимальной стратегии игрока B. Без ограничения общности полагаем $v > 0$: этого можно добиться, сделав все элементы $a_{ij} \geq 0$. Если игрок A применяет смешанную стратегию $S_A^0 = \left(p_1^0, p_2^0,...,p_m^0\right)$ против любой чистой стратегии B_j игрока B, то он получает средний выигрыш, или математическое ожидание выигрыша $a_j = a_{1j}p_1 + a_{2j}p_2 + ... + a_{mj}p_m$, $j = 1,...,n$ (т.е. элементы j-го столбца платежной матрицы почленно умножаются на соответствующие вероятности стратегий A_1, A_2,..., A_m и результаты складываются).

Для оптимальной стратегии S_A^0 все средние выигрыши не меньше цены игры v, поэтому получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + ... + a_{m1}p_m \geq v \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + ... + a_{m2}p_m \geq v \\ .... \\ a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + ... + a_{mn}p_m \geq v. \end{cases} \tag{4.5.1}$$

Каждое из неравенств можно разделить на число $v > 0$. Введем новые переменные:

$$x_1 = \frac{p_1}{v},\ x_2 = \frac{p_2}{v}, ...,\ x_m = \frac{p_m}{v}. \tag{4.5.2}$$

Тогда система (5.5.1) примет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + ... + a_{m1}x_m \geq 1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{m2}x_m \geq 1 \\ .... \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + ... + a_{mn}x_m \geq 1. \end{cases} \tag{4.5.3}$$

Цель игрока A — максимизировать свой гарантированный выигрыш, т.е. цену игры v. Разделив на $v \neq 0$ равенство $p_1 + p_2 + ... + p_m = 1$, получаем, что переменные x_i ($i = 1, ..., m$) удовлетворяют условию: $x_1 + x_2 + ... + x_m = \frac{1}{v}$.

Максимизация цены игры v эквивалентна минимизации величины $\frac{1}{v}$.

Поэтому задача может быть сформулирована следующим образом: определить значения переменных $x_i \geq 0$, $i = 1, ..., m$ так, чтобы они удовлетворяли линейным ограничениям (4.5.3) и при этом линейная функция

$$Z = x_1 + x_2 + ... + x_m \tag{4.5.4}$$

обращалась в минимум. Это задача линейного программирования. Решая задачу (4.5.3)—(4.5.4), получаем оптимальное решение $\left(p_1^0, p_2^0, ..., p_m^0\right)$ и оптимальную стратегию S_A^0.

Для определения оптимальной стратегии $S_B^0=\left(q_1^0,q_2^0,...,q_n^0\right)$ следует учесть, что игрок B стремится минимизировать гарантированный выигрыш, т.е. найти $\max\frac{1}{x}$. Переменные $q_1,q_2,...,q_n$ удовлетворяют неравенствам:

$$\begin{cases} a_{11}q_1+a_{12}q_2+...+a_{1n}q_n\le v \\ a_{21}q_1+a_{22}q_2+...+a_{2n}q_n\le v \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}q_1+a_{m2}q_2+...+a_{mn}q_n\le v, \end{cases} \tag{4.5.5}$$

которые следуют из того, что средний проигрыш игрока B не превосходит цены игры, какую бы чистую стратегию не применял игрок A.

Если обозначить

$$y_1=\frac{q_1}{v},\ y_2=\frac{q_2}{v},...,\ y_n=\frac{q_n}{v}, \tag{4.5.6}$$

то получим систему неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}y_1+a_{12}y_2+...+a_{1n}y_n\le 1 \\ a_{21}y_1+a_{22}y_2+...+a_{2n}y_n\le 1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}y_1+a_{m2}y_2+...+a_{mn}y_n\le 1. \end{cases} \tag{4.5.7}$$

Переменные y_j $(j=1,...,n)$ удовлетворяют условию $y_1+y_2+...+y_n=\frac{1}{v}$.

Игра свелась к следующей задаче: определить значения переменных $y_j\ge 0$, $j=1,...,n$, которые удовлетворяют системе неравенств (4.5.7) и максимизируют линейную функцию

$$Z'=y_1+y_2+...+y_n. \tag{4.5.8}$$

Решение задачи линейного программирования (4.5.6), (4.5.7) определяет оптимальную стратегию $S_B^0=\left(q_1^0,q_2^0,...,q_n^0\right)$.

При этом цена игры

$$v = \frac{1}{\max Z'} = \frac{1}{\min Z}. \qquad (4.5.9)$$

Составив расширенные матрицы для задач (4.5.3), (4.5.4) и (5.5.7), (4.5.8), убеждаемся, что одна матрица получилась из другой транспонированием:

$$\begin{array}{c} \geq \\ \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} & 1 \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} & 1 \\ \hline 1 & 1 & \dots & 1 & \min Z \end{array}\right) \end{array} \leftrightarrow \begin{array}{c} \leq \\ \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 1 \\ \hline 1 & 1 & \dots & 1 & \max Z' \end{array}\right) \end{array}$$

Таким образом, задачи линейного программирования (4.5.3), (4.5.4) и (4.5.7), (4.5.8) являются взаимно-двойственными. Очевидно, при определении оптимальных стратегий в конкретных задачах следует выбрать ту из взаимно-двойственных задач, решение которой менее трудоемко, а решение другой задачи найти с помощью теорем двойственности. Приведем пример задачи, которая описывается игровыми моделями $m \times n$ и может быть решена методами линейного программирования.

Задача 4.5.1. Предприятие может выпускать три вида продукции (A_1, A_2 и A_3), получая при этом прибыль, зависящую от спроса, который может быть в одном из четырех состояний (B_1, B_2, B_3, B_4). Дана матрица (см. табл. 4.5.1), ее элементы a_{ij} характеризуют прибыль, которую получит предприятие при выпуске i-и продукции с j-м состоянием спроса. Определить оптимальные пропорции в выпускаемой продукции, гарантирующие среднюю величину прибыли при любом состоянии спроса, считая его неопределенным.

Решение. Задача сводится к игровой модели, в которой игра предприятия A против спроса B задана платежной матрицей (см. табл. 4.5.1).

Прежде чем решать задачу, можно попытаться упростить игру, проведя анализ платежной матрицы и отбросив стратегии, заведомо невыгодные или дублирующие.

Таблица 4.5.1

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	3	6	8
A_2	9	10	4	2
A_3	7	7	5	4

Так, вторая стратегия (второй столбец матрицы (см. табл. 4.5.1)) является явно невыгодной для игрока B по сравнению с первой (элементы второго столбца больше элементов первого столбца), так как цель игрока B — уменьшить выигрыш игрока A. Поэтому второй столбец можно отбросить.

Получим матрицу размера 3×3: $P = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 9 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Таблица 4.5.2

A_i \ B_j	B_1	B_3	B_4	α_i
A_1	3	6	8	3
A_2	9	4	2	2
A_3	7	5	4	4
β_j	9	6	8	6 \ 4

Определим нижнюю и верхнюю цены игры в таблице 4.5.2. Так как $\alpha \neq \beta$, то седловая точка отсутствует и оптимальное решение следует искать в смешанных стратегиях игроков: $S_A^0 = \left(p_1^0, p_2^0, p_3^0\right)$ и $S_B^0 = \left(q_1^0, q_2^0, q_3^0\right)$.

Обозначив $x_i = \dfrac{p_i}{v}$, $i = 1,2,3$ и $y_j = \dfrac{q_j}{v}$, $j = 1,2,3$ составим две взаимно-двойственные задачи линейного программирования (см. (5.5.2)-(5.5.3) и (5.5.6)-(5.5.7)).

1. $\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 + 7x_3 \geq 1 \\ 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 \geq 1 \\ 8x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 1 \end{cases}$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

$Z = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \min$

2. $\begin{cases} 3y_1 + 6y_2 + 8y_3 \leq 1 \\ 9y_1 + 4y_2 + 2y_3 \leq 1 \\ 7y_1 + 5y_2 + 4y_3 \leq 1 \end{cases}$

$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$

$Z' = y_1 + y_2 + y_3 \rightarrow \max$

Решаем 2 задачу симплексным методом, поскольку для нее первое базисное решение будет допустимым. Введем добавочные переменные и перейдем к уравнениям: $\begin{cases} 3y_1 + 6y_2 + 8y_3 + y_4 = 1 \\ 9y_1 + 4y_2 + 2y_3 + y_5 = 1 \\ 7y_1 + 5y_2 + 4y_3 + y_6 = 1. \end{cases}$

$y_j \geq 0,\ j = 1,2,\ldots,6$

I шаг. Основные переменные — y_4, y_5, y_6; неосновные переменные — y_1, y_2, y_3.

$$\begin{cases} \boxed{y_4 = 1 - 3y_1 - 6y_2 - 8y_3} \\ y_5 = 1 - 9y_1 - 4y_2 - 2y_3 \\ y_6 = 1 - 7y_1 - 5y_2 - 4y_3 \end{cases}$$

$Z' = y_1 + y_2 + y_3.$

Базисное решение $Y_1 = (0;0;0;1;1;1)$ допустимое; переводим y_2 в основные; переводим y_4 в неосновные переменные.

II шаг. Основные переменные — y_2, y_5, y_6; неосновные переменные — y_1, y_3, y_4.

Получим после преобразований: $$\begin{cases} y_2 = \frac{1}{6} - \frac{3}{6}y_1 - \frac{8}{6}y_3 - \frac{1}{6}y_4 \\ y_5 = \frac{1}{3} - 7y_1 + \frac{10}{3}y_3 + \frac{2}{3}y_4 \\ \boxed{y_6 = \frac{1}{6} - \frac{27}{6}y_1 - \frac{16}{6}y_3 + \frac{5}{6}y_4} \end{cases}$$

$$Z' = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}y_1 - \frac{2}{6}y_3 - \frac{1}{6}y_4.$$

Базисное решение: $Y_2 = \left(0; \frac{1}{6}; 0; 0; \frac{1}{3}; \frac{1}{6}\right)$. Переводим y_4 в основные; $y_1 = \min\left\{\frac{1}{3}; \frac{1}{21}; \frac{1}{27}\right\} = \frac{1}{27}$. Переводим y_6 в неосновные переменные.

III шаг. Основные переменные — y_1, y_2, y_5; неосновные переменные — y_1, y_3, y_4, y_6.

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{27} - \frac{16}{27}y_3 + \frac{5}{27}y_4 - \frac{6}{27}y_6 \\ y_2 = \frac{4}{27} - \frac{28}{27}y_3 - \frac{7}{27}y_4 + \frac{1}{9}y_6 \\ y_5 = \frac{2}{27} + \frac{202}{27}y_3 - \frac{17}{27}y_4 + \frac{14}{9}y_6 \end{cases}$$

$$Z' = \frac{5}{27} - \frac{17}{27}y_3 - \frac{2}{27}y_4 - \frac{1}{9}y_6.$$

Базисное решение: $Y_3 = \left(\frac{1}{27}; \frac{4}{27}; 0; 0; \frac{2}{27}; 0\right)$.

Так как отсутствуют положительные коэффициенты при неосновных переменных, то критерий оптимальности выполнен, $\max Z' = \frac{5}{27}$ и базисное решение $Y_3 = \left(\frac{1}{27}; \frac{4}{27}; 0; 0; \frac{2}{27}; 0\right)$ является оптимальным.

Установим соответствие между переменными взаимно-двойственных задач и определим оптимальное базисное решение задачи с помощью теорем двойственности:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_4 & y_5 & y_6 & y_1 & y_2 & y_3 \\ \frac{2}{27} & 0 & \frac{1}{9} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{17}{27}. \end{array}$$

Оптимальное базисное решение: $\left(\frac{2}{27}, 0, \frac{1}{9}, \frac{1}{2}, 0, \frac{17}{27}\right)$, причем $\min Z = \max Z' = \frac{5}{27}$. Из соотношений (5.5.9) находим цену игры $v = \frac{1}{\max Z'} = \frac{1}{\min Z} = \frac{27}{5} = 5.4$. Оптимальную стратегию $S_A^0 = \left(p_1^0, p_2^0, p_3^0\right)$ находим, используя (5.5.2): $p_i^0 = x_i \cdot v, \quad i = 1, 2, 3,$ т.е. $p_1^0 = 5.4 \cdot \frac{2}{27} = 0.4$, $p_2^0 = 5.4 \cdot 0 = 0$, $p_3^0 = 5.4 \cdot \frac{1}{9} = 0{,}6$, $S_A^0 = \left(0.4; 0; 0.6\right)$.

Следовательно, предприятие должно выпустить 40% продукции A_1 и 60% продукции A_3, а продукцию A_2 не выпускать. Оптимальная стратегия спроса S_B^0 определяется аналогично: $q_j^* = y_j \cdot v, \quad j = 1, 2, 3,$ т.е. $S_A^0 = \left(0.2; 0; 0.8; 0\right)$ (здесь учтено, что второй столбец исходной матрицы был отброшен как невыгодный). Таким образом, оптимальный спрос в 20% находится в состоянии B_1 и в 80% — в состоянии B_3.

При решении произвольной конечной игры размера $m \times n$ **рекомендуется придерживаться следующей схемы:**

1. Исключить из платежной матрицы заведомо невыгодные стратегии по сравнению с другими стратегиями. Такими стратегиями для игрока A (игрока B) являются те, которым соответствуют строки (столбцы) с

элементами, заведомо меньшими (большими) по сравнению с элементами других строк (столбцов).

2. Определить верхнюю и нижнюю цены игры и проверить, имеет ли игра седловую точку. Если седловая точка есть, то соответствующие ей стратегии игроков будут оптимальными, а цена совпадает с верхней (нижней) ценой.

3. Если седловая точка отсутствует, то решение следует искать в смешанных стратегиях. Для игр размера $m \times n$ рекомендуется симплексный метод, для игр размера 2×2, $2 \times n$, $n \times 2$ возможно геометрическое решение.

4.6. Биматричные игры. Основные понятия и ситуация равновесия

В матричной игре интересы двух игроков были прямо противоположны, то есть речь шла об антагонистической игре. Однако гораздо чаще случаются ситуации, в которых интересы игроков хотя и не совпадают, но не обязательно являются противоположными.

Рассмотрим конфликтную ситуацию, в которой каждый из двух участников имеет следующие возможности для выбора своей линии поведения:

игрок A – может выбрать любую из стратегий $A_1,\ A_2,...,\ A_m$,

игрок B – любую из стратегий $B_1,\ B_2,\ldots,B_n$.

При этом в ситуации $\left(A_i, B_j\right)$ выигрыш первого игрока будет равен a_{ij}, а выигрыш второго b_{ij}. Причем, вообще говоря $b_{ij} \neq a_{ij}$.

Тогда получаем две платежные матрицы размерности $m \times n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn} \end{pmatrix} \qquad (4.6.1)$$

Здесь A - платежная матрица первого игрока, B - платежная матрица второго игрока. В этом случае говорят, что речь идет о биматричной игре двух игроков с платежными матрицами (5.6.1).

Отметим, что при $b_{ij} = -a_{ij}$ получаем обычную матричную игру.

В общем случае биматричная игра – это **игра с ненулевой суммой**.

Класс биматричных игр значительно шире класса матричных (разнообразие новых моделируемых конфликтных ситуаций весьма заметно), а, значит, неизбежно увеличиваются и трудности, встающие на пути их успешного разрешения.

Рассмотрим один пример биматричной игры.

Задача 4.6.1. (Студент — Преподаватель). Студент (игрок A) готовится к зачету, который принимает Преподаватель (игрок B). Можно считать, что у Студента две стратегии – подготовиться к сдаче зачета (+) и не подготовиться (-). У Преподавателя также две стратегии – поставить зачет [+] и не поставить зачета [-]. В основу значений функций выигрыша игроков положим следующие соображения:

Выигрыш студента	Сдал зачет [+]	Не сдал зачет [-]
Готовился к зачету (+)	оценка заслужена	очень обидно
Не готовился к зачету (-)	удалось обмануть	оценка заслужена

Выигрыш преподавателя	Поставил зачет [+]	Не поставил зачет [-]
Готовился к зачету (+)	все нормально	был не прав
Не готовился к зачету (-)	дал себя обмануть	опять придет

Количественно это можно выразить, например, так

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

В приведенной задаче описана ситуация, в которой интересы игроков не совпадают. Встает вопрос о том, какие рекомендации необходимо дать игрокам для того, чтобы моделируемая конфликтная ситуация разрешилась.

Иными словами, что мы будем понимать под решением биматричной игры?

Попробуем ответить на это вопрос так: **вследствие того, что интересы игроков не совпадают, нам нужно построить такое (компромиссное) решение, которое бы в том или ином, но в одинаковом смысле удовлетворяло обоих игроков.**

Не пытаясь сразу выражать эту мысль совсем точно, скажем – попробуем найти некую **равновесную ситуацию**, явное отклонение от которой одного из игроков уменьшало бы его выигрыш.

Подобный вопрос мы ставили и при рассмотрении матричных игр. Напомним, что возникающее при разработке минимаксного подхода понятие равновесной ситуации приводило нас к поиску седловой точки, которая, существует не всегда – конечно, если ограничиваться только чистыми стратегиями игроков A и B, т.е. стратегиями $A_1,\ A_2,...,\ A_m, B_1,\ B_2,\dots,B_n$.

Однако при расширении матричной игры путем перехода к смешанным стратегиям, т. е. к такому поведению игроков, при котором они чередуют (чистые) стратегии с определенными частотами:

игрок A – стратегии $A_1,\ A_2,...,\ A_m$ с частотами $p_1, p_2,...p_m$, где $p_1 \ge 0, p_2 \ge 0,...p_m \ge 0,\ \ \sum_{i=1}^{m} p_i = 1,$

а игрок B – стратегии $B_1,\ B_2,\dots,B_n$ с частотами $q_1, q_2,...q_n$, где $q_1 \ge 0, q_2 \ge 0,...q_n \ge 0,\ \ \sum_{j=1}^{n} q_j = 1.$

Выяснилось, что в смешанных стратегиях равновесная ситуация всегда существует.

Иными словами, **любая матричная игра в смешанных стратегиях разрешима.**

Поэтому, рассматривая биматричные игры, перейдем к смешанным стратегиям игроков (этим мы предполагаем, что каждая игра может быть многократно повторена в неизменных обстоятельствах) и определим средние выигрыши игроков математическим ожиданием:

$$H_A(p,q) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j,\ H_B(p,q) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij} p_i q_j. \qquad (4.6.2)$$

Определение 4.6.1. Будем говорить, что пара векторов $p^0 = \left(p_1^0, p_2^0,..., p_m^0\right)$ и $q^0 = \left(q_1^0, q_2^0,..., q_n^0\right)$ определяют **равновесную ситуацию (равновесие по Нэшу)**, если при любых p и q, удовлетворяющих условиям $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1,\ \sum_{j=1}^{n} q_j = 1,\ 0 \le p_i \le 1,\ 0 \le q_j \le 1,$ справедливы неравенства:

$$H_A\left(p,q^0\right)\le H_A\left(p^0,q^0\right),\ H_B\left(p^0,q\right)\le H_B\left(p^0,q^0\right). \tag{4.6.3}$$

Неравенства (4.6.3) означают, что если игрок отклонится от равновесной ситуации $\left(p^0,q^0\right)$, то его выигрыш может только уменьшится.

Тем самым, получается, что если равновесная ситуация существует, то отклонение от нее невыгодно самому игроку.

На вопрос о существовании ситуации равновесия отвечает следующая теорема.

Теорема 4.6.1. (Дж. Нэш). Всякая биматричная игра имеет хотя бы одну равновесную ситуацию (точку равновесия) в смешанных стратегиях.

Итак, равновесная ситуация существует. Но как ее найти?

Если некоторая пара чисел $\left(p^0,q^0\right)$ претендует на то, чтобы определять ситуацию равновесия, то для того, чтобы убедиться в обоснованности этих претензий, или, наоборот, доказать их необоснованность, необходимо проверить справедливость неравенств (4.6.3) для любого p в пределах от 0 до 1 и для любого q в пределах от 0 до 1. В общем случае число таких проверок бесконечно. И, следовательно, действенный способ определения равновесной ситуации нужно искать где-то в ином месте.

Рассмотрим биматричную игру 2×2: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}$ с вероятностями $p_1=p$, $p_2=1-p$, $q_1=q$, $q_2=1-q$.

Вычислим средние выигрыши игроков

$$H_A\left(p,q\right)=a_{11}pq+a_{12}p\left(1-q\right)+a_{21}\left(1-p\right)q+a_{22}\left(1-p\right)\left(1-q\right), \tag{4.6.4}$$

$$H_B\left(p,q\right)=b_{11}pq+b_{12}p\left(1-q\right)+b_{21}\left(1-p\right)q+b_{22}\left(1-p\right)\left(1-q\right). \tag{4.6.4$'$}$$

Для таких игр оказывается справедливой следующая теорема, позволяющая находить смешанные стратегии.

Теорема 4.6.2. Выполнение неравенств (4.6.3):

$$H_A\left(p,q^0\right)\le H_A\left(p^0,q^0\right),\ H_B\left(p^0,q\right)\le H_B\left(p^0,q^0\right),$$

равносильно выполнению следующих неравенств:

$$\begin{cases} H_A\left(0,q^0\right)\le H_A\left(p^0,q^0\right) \\ H_A\left(1,q^0\right)\le H_A\left(p^0,q^0\right) \\ H_B\left(p^0,0\right)\le H_B\left(p^0,q^0\right) \\ H_B\left(p^0,1\right)\le H_B\left(p^0,q^0\right) \end{cases}, \qquad (4.6.5)$$

Другими словами, чтобы убедиться в том, что пара $\left(p^0,q^0\right)$ определяет равновесную ситуацию, достаточно проверить справедливость неравенств (4.6.3) не для всех $p\in\left[0,1\right]$ и $q\in\left[0,1\right]$, а только для двух чистых стратегий каждого игрока.

Перепишем формулу (4.6.4) в более удобном виде

$$H_A\left(p,q\right)=\left(a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22}\right)pq+\left(a_{12}-a_{22}\right)p+\left(a_{21}-a_{22}\right)q+a_{22}.$$

Положим здесь $p=0$ и $p=1$:

$$H_A\left(1,q\right)=\left(a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22}\right)q+a_{12}+\left(a_{21}-a_{22}\right)q,$$

$$H_A\left(0,q\right)=\left(a_{21}-a_{22}\right)q+a_{22}$$

и рассмотрим разности

$$H_A\left(p,q\right)-H_A\left(1,q\right)=\left(a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22}\right)pq+\left(a_{12}-a_{22}\right)p-$$
$$-\left(a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22}\right)q+a_{22}-a_{12},$$

$$H_A\left(p,q\right)-H_A\left(0,q\right)=\left(a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22}\right)pq+\left(a_{12}-a_{22}\right)p.$$

Полагая

$$\begin{cases} C=a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22} \\ \alpha=a_{22}-a_{12} \end{cases}, \qquad (4.6.6)$$

получим для них следующие выражения:

$$H_A(p,q)-H_A(1,q)=Cpq-\alpha p-Cq+\alpha=Cq(p-1)-\alpha(p-1)=$$
$$=(p-1)(Cq-\alpha),$$

$$H_A(p,q)-H_A(0,q)=Cpq-\alpha p=p(Cq-\alpha).$$

Так как в точке равновесия эти разности должны быть неотрицательными, то приходим к следующей системе неравенств:

$$\begin{cases}(p-1)(Cq-\alpha)\ge 0\\ p(Cq-\alpha)\ge 0.\end{cases}$$

Для $H_B(p,q)$, при обозначениях:

$$\begin{cases}D=b_{11}-b_{12}-b_{21}+b_{22}\\ \beta=b_{22}-b_{21}\end{cases}, \qquad (4.6.7)$$

Получаем аналогичным образом: $\begin{cases}(q-1)(Dp-\beta)\ge 0\\ q(Dp-\beta)\ge 0.\end{cases}$

Таким образом, для того, чтобы пара (p,q) определяла равновесную ситуацию в биматричной игре 2×2 необходимо и достаточно выполнение следующей системы:

$$\begin{cases}(p-1)(Cq-\alpha)\ge 0\\ p(Cq-\alpha)\ge 0\\ (q-1)(Dp-\beta)\ge 0\\ q(Dp-\beta)\ge 0\\ p\in[0,1],\quad q\in[0,1]\end{cases}, \qquad (4.6.8)$$

где C, D, α, β вычисляются по формулам (4.6.6)-(4.6.7).

Задача 4.6.2. Решить биматричную игру из задачи 4.6.1.

Решение. Вычислим параметры, входящие в систему (4.6.8):

$C=2-(-1)-1+0=2, \alpha=0+1=1,$

$D=1-(-3)-(-2)-1=5, \beta=-1-(-2)=1.$

Тогда получаем следующие системы неравенств:

$$\begin{cases}(p-1)(2q-1)\geq 0\\ p(2q-1)\geq 0\end{cases} \text{ и } \begin{cases}(q-1)(5p-1)\geq 0\\ q(5p-1)\geq 0\end{cases}.$$

Решим первую из систем:

1) $p=1,\ 2q-1\geq 0,\ q\geq\frac{1}{2};$

2) $p=0,\ 2q-1\leq 0,\ q\leq\frac{1}{2};$

3) $0<p<1,\ q=\frac{1}{2}.$

Перенесем эти результаты на чертеж в виде «зигзага»:

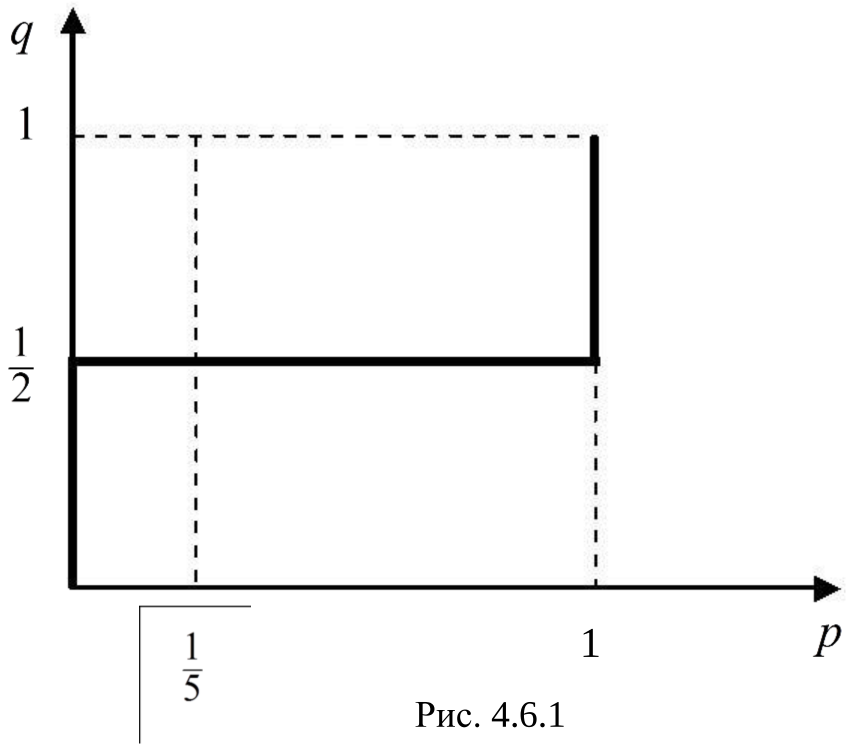

Рис. 4.6.1

Решим вторую систему:

1) $q=1,\ 5p-1\geq 0,\ p\geq\frac{1}{5};$

2) $q=0,\ 5p-1\leq 0,\ p\leq\frac{1}{5};$

3) $0<q<1,\ 5p-1=0,\ p=\frac{1}{5}.$

Перенесем эти результаты на чертеж в виде «зигзага»:

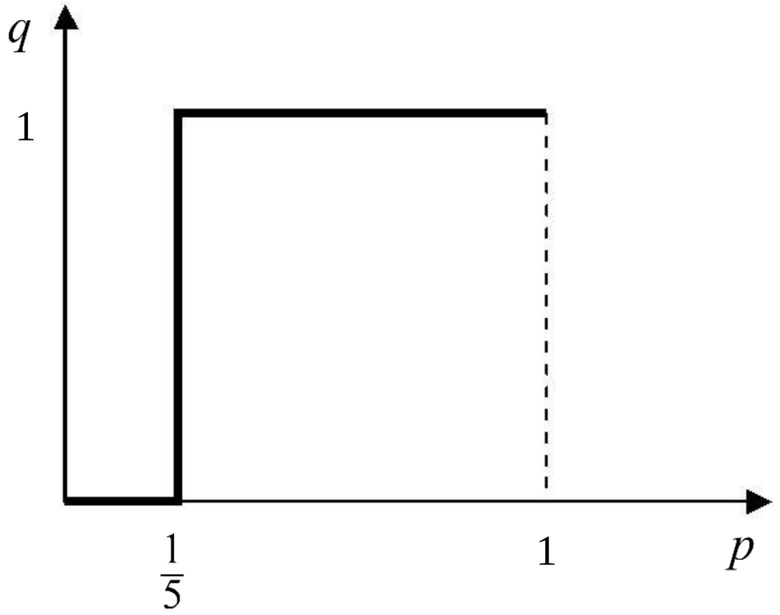

Рис. 4.6.2

Объединим эти рисунки.

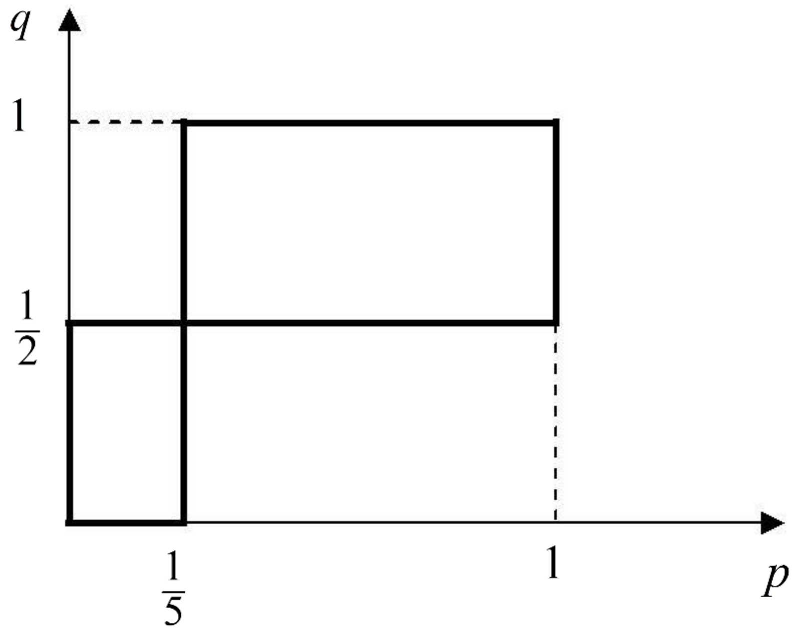

Рис. 4.6.3

Видим, что игра имеет три равновесные ситуации с соответствующими выигрышами:

1) $p=1,\ q=1,\ H_A(1,1)=2,\ H_B(1,1)=1;$

2) $p=0,\ q=0,\ H_A(0,0)=0,\ H_B(0,1)=-1;$

3) $p=\frac{1}{5},\ q=\frac{1}{2},\ H_A\left(\frac{1}{5},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2},\ H_B\left(\frac{1}{5},\frac{1}{2}\right)=-\frac{7}{5}.$

Вывод. Из этих трех смешанных стратегий лучшей является первая с $p=q=1$, то есть хорошо подготовиться к зачету и поставить зачет.

В этой задаче реализуется весьма редкая для биматричных игр ситуация. Функции выигрышей игроков достигают максимума одновременно.

Задача 4.6.3. (Борьба за рынки). Небольшая фирма A намерена сбыть партию товара на одном из двух рынков, монополизируемых другой, более крупной фирмой B. Для этого фирма A готова предпринять по одному из рынков соответствующие приготовления, например, развернуть рекламную кампанию. Фирма B может воспрепятствовать этому, предприняв по одному из рынков предупредительные меры. Если фирма A встречает противодействие, то терпит поражение, в противном случае – захватывает рынок. Будем считать, что проникновение фирмы A на первый рынок более выгодно для нее, чем на второй, но и поражение на первом рынке принесет фирме A большие потери, чем на втором рынке. Таким образом, фирмы имеют по две стратегии: A_1 и B_1 - выбор первого рынка; A_2 и B_2 - выбор второго рынка. Составьте и решите биматричную игру.

Решение. Составим платежные матрицы игроков в условных единицах, исходя из соответствующих качественных соображений:

$$A=\begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из этих матриц видно, что если обе фирмы выберут один рынок, то выигрывает фирма B, если разные – то фирма A.

Найдем равновесные ситуации, вычислив параметры системы (4.6.8):

$C=-10-2-1-1=-14, \alpha=-1-2=-3,\ D=5+2+1+1=9, \beta=1+1=2.$

Тогда получаем следующие системы неравенств:

$$\begin{cases}(p-1)(-14q+3)\geq 0\\ p(-14q+3)\geq 0\end{cases} \text{ и } \begin{cases}(q-1)(9p-2)\geq 0\\ q(9p-2)\geq 0\end{cases}.$$

Решим первую систему:

1) $p=1,\ -14q+3\geq 0,\ q\leq\frac{3}{14};$

2) $p=0,\ -14q+3\leq 0,\ q\geq\frac{3}{14};$

3) $0<p<1,\ -14q+3=0, q=\frac{3}{14}.$

Решим вторую систему:

1) $q=1,\ 9p-2\geq 0,\ p\geq\frac{2}{9};$

2) $q=0,\ 9p-2\leq 0,\ p\leq\frac{2}{9};$

3) $0<q<1,\ 9p-2=0,\ p=\frac{2}{9}.$

Изобразим эти решения на рисунке:

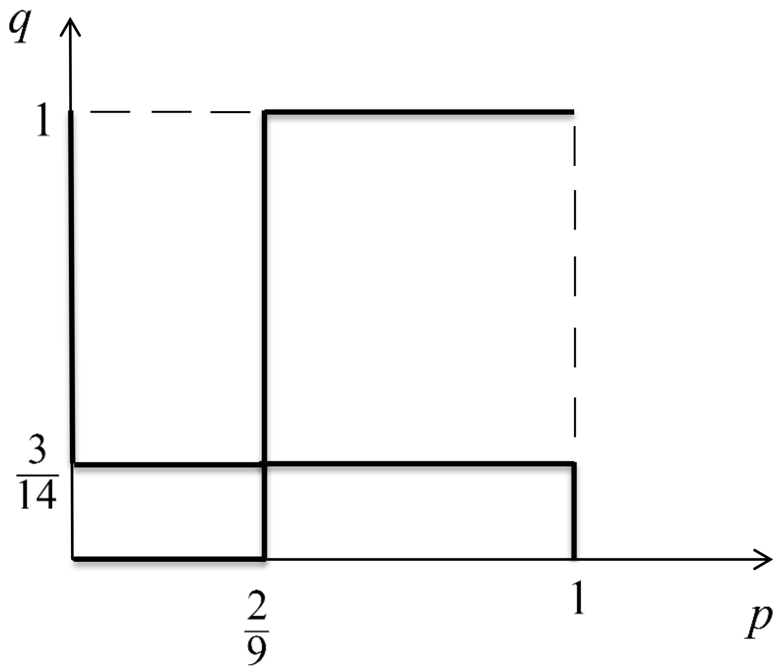

Рис. 4.6.4

Видно, что получилась одна точка равновесия $p=\frac{2}{9}$, $q=\frac{3}{14}$. Это дает нам следующие оптимальные смешанные стратегии игроков: $p^0=\left(\frac{2}{9},\frac{7}{9}\right)$, $q^0=\left(\frac{3}{14},\frac{11}{14}\right)$, которым соответствуют оптимальные (средние) выигрыши $H_A\left(p^0,q^0\right)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}p_i^0q_j^0=-\frac{4}{7}$, $H_B\left(p^0,q^0\right)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}p_i^0q_j^0=\frac{1}{3}$.

Вывод. Таким образом, если игра может быть повторена многократно в схожих условиях, то фирма A в 22.22% случаев должна осуществлять попытки проникновения на первый рынок, а в 77.78% - на второй рынок. При этом (в среднем) она не проиграет больше, чем $\frac{4}{7}$ у.е. Фирме B рекомендуется в 21.43% случаев оказывать противодействие на первом рынке, а в 78.57% - на втором. В этом случае ее средний выигрыш составит не менее $\frac{1}{3}$ у.е.

Отметим, что в этой задаче получилась одна равновесная точка, и $v_A \neq v_B$. В других биматричных играх можно получить несколько равновесных ситуаций, как, например, в примере «Студент - Преподаватель». В этом случае встает проблема выбора оптимальной в некотором смысле ситуации из нескольких равновесных. Эту задачу можно попытаться решить, исходя из содержательного смысла игры.

Из рассмотренных примеров видно, что точка равновесия определяется парой

$$p=\frac{\beta}{D},\ q=\frac{\alpha}{C}. \tag{4.6.9}$$

А это означает, что в равновесной ситуации выбор одного игрока полностью определяется платежной матрицей другого игрока и не зависит от собственной платежной матрицы. Иначе говоря, равновесная ситуация определяется не столько стремлением увеличить свой выигрыш, сколько желанием держать под контролем выигрыш другого игрока.

Проиллюстрируем это, пользуясь условием примера 4.6.3. Для этого разобьем биматричную игру на две матричные игры с матрицами

$$A=\begin{pmatrix}-10 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

и решим их:

$$v_A=-\frac{4}{7},\ \ p^0=\left(\frac{1}{7},\frac{6}{7}\right),\ q^0=\left(\frac{3}{14},\frac{11}{14}\right),$$

$$v_B=\frac{1}{3},\ p^0=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right),\ q^0=\left(\frac{2}{9},\frac{7}{9}\right).$$

То есть, если каждый игрок будет применять свои стратегии в биматричной игре, исходя только из собственной матрицы выигрышей, то он найдет свой оптимальный выигрыш и оптимальную стратегию другого игрока.

Таким образом, в биматричной игре вновь встречаемся с антагонизмом. А что же будет, если игроки попробуют договориться? Возможен ли больший выигрыш в этой ситуации? Оказывается, в биматричной игре кооперации может улучшить положение обоих игроков. Рассмотрим эту ситуацию на следующем примере.

Задача 4.6.4. Имеются два продавца, продающие определенный товар на рынке. Оба из них знают, что чем выше цена, тем меньше общий объем продаж. Для простоты предположим, что каждый из них может продать либо 400 единиц некоторого товара, либо 100 единиц. Известно, что при продаже 800 единиц на рынке складывается цена равная 100 фунтам, при 500 единицах - 200 фунтов, а при объеме продаж 200 единиц - 500 фунтов.

Решение. Матрицы выигрышей продавцов следующие:

Выигрыш 1 продавца.		Стратегии 2 продавца	
		400 ед.	100 ед.
Стратегии 1 продавца	400 ед.	40000 фунтов	80000 фунтов
	100 ед.	20000 фунтов	50000 фунтов

Выигрыш 2 продавца.		Стратегии 1 продавца	
		400 ед.	100 ед.
Стратегии 2 продавца	400 ед.	40000 фунтов	20000 фунтов
	100 ед.	80000 фунтов	50000 фунтов

Если бы игроки имели возможность и желание согласовывать свои действия, то они решили бы продать по 100 единиц и получить прибыль по 50000 единиц каждый.

Предположим теперь, что по каким-либо причинам они принимают решения независимо друг от друга.

Каковы оптимальные стратегии для игроков в этом случае?

Пара стратегий (400,100) не является ситуацией равновесия, так как в этом случае второму игроку выгодно изменить свою стратегию на 400 и тем самым увеличить свой выигрыш с 20000 до 40000.

Если рассмотреть пару стратегий (100,100), то она также не является ситуацией равновесия, поскольку каждому отдельному игроку выгодно поменять свою стратегию на 100 и получить вместо 50000 выигрыш в 80000.

Если же мы рассмотрим пару стратегий (400,400), то, как легко заметить, отклонение каждого отдельного игрока является для него невыгодным. Такую ситуацию называют ситуацией равновесия (**равновесия по Нэшу**) или некооперативного равновесия.

Напротив, когда возможность достигать определенные договоренности между игроками существует, игроки стараются найти такую пару стратегий, для которой не существует другой пары, одновременно улучшающей выигрыши обоих игроков. Такая пара стратегий называется ситуацией кооперативного ***(оптимальность по Парето)*** равновесия. Таковой является пара стратегий (100,100).

Таким образом, очевиден выигрыш от кооперации. Работать – меньше, а прибыль – больше.

Подчеркнем различие ситуации равновесия по Нэшу от ситуации, оптимальной по Парето: в первой ни один игрок, действуя в одиночку, не может увеличить свой собственный выигрыш; во второй – все игроки, действуя совместно, не могут (даже нестрого) увеличить выигрыш каждого.

Итак, в биматричных играх существует несколько критериев оптимальности. Важнейшими из них являются ситуация равновесия по Нэшу и критерий оптимальности по Парето.

Отметим, что в биматричных играх (в отличие от матричных) при наличии нескольких ситуаций равновесия средний выигрыш игрока в разных равновесных ситуациях различен (напомним, что в матричной игре выигрыш игрока один и тот же вне зависимости от количества точек равновесия).

Наконец, еще одно, не менее интересное обстоятельство. Достаточно сложной является и проблема перехода от качественных оценок ситуации к количественным оценкам. То есть, если, например, в примере «Студент-Преподаватель» принять другие количественные оценки выигрышей, то можно получить и другие ситуации равновесия. Однако если эти изменения будут не слишком значительными – элементы платежной матрицы "пошевельнутся" слегка – то слегка "пошевельнутся" и зигзаги, не изменяя ни своей общей формы, ни взаимного расположения, а значит, число равновесных ситуаций не изменится. Впрочем, сказанное относится лишь к случаю, когда множество ситуаций равновесия конечно и состоит из нечетного числа точек (одной или трех). Как принято говорить в подобных случаях, это число «устойчиво относительно малых шевелений».

Конечно, в некоторых биматричных играх равновесные ситуации случаются и в чистых стратегиях. Но, как показывают разобранные примеры, во-первых, чистой ситуации равновесия может вовсе не быть, и, во-вторых, даже при ее наличии не исключено существование равновесных ситуаций в смешанных стратегиях. И, чтобы найти их все, неизбежно приходится обращаться к описанному выше подходу.

4.7. Игра двух лиц, в которой одним из игроков является "природа"

Ситуации, описываемые рассмотренными выше моделями в виде игр, на практике могут не в полной мере оказаться адекватными действительности, поскольку реализация модели предполагает многократность повторения действий (решений), предпринимаемых в похожих условиях. В реальности количество принимаемых решений в неизменных условиях жестко ограничено. Нередко ситуация является уникальной, и решение в условиях неопределенности должно приниматься однократно. Это порождает необходимость развития методов моделирования принятия решений в условиях неопределенности и риска.

Традиционно следующим этапом такого развития являются игры с природой. Формально изучение игр с природой должно начинаться с построения платежной матрицы, что является, по существу, наиболее трудоемким этапом подготовки принятия решения.

Ошибки в платежной матрице не могут быть компенсированы никакими вычислительными методами и приведут к неверному итоговому результату.

Отличительная особенность игры с природой состоит в том, что в ней сознательно действует только один из участников, в большинстве случаев называемый игроком 1. Игрок 2 (природа) сознательно против игрока 1 не действует, а выступает как не имеющий конкретной цели и случайным образом выбирающий очередные «ходы» партнер по игре. Поэтому термин «природа» характеризует некую объективную действительность, которую не следует понимать буквально, хотя вполне могут встретиться ситуации, в которых «игроком» 2 действительно может быть природа (например, обстоятельства, связанные с погодными условиями или с природными стихийными силами).

Мажорирование стратегий (см. пункт 4.4) в игре с природой имеет определенную специфику: исключать из рассмотрения можно лишь доминируемые стратегии игрока 1: если для всех $j = 1,...,n$ $a_{kj} \le a_{lj}$, $k,l = 1,...,m$, то k-ю стратегию принимающего решения игрока 1 можно не рассматривать и вычеркнуть из матрицы игры. Столбцы, отвечающие стратегиям природы, вычеркивать из матрицы игры (исключать из рассмотрения) недопустимо, поскольку природа не стремится к выигрышу в «игре» с человеком, для нее нет целенаправленно выигрышных или проигрышных стратегий, она действует неосознанно[1].

На первый взгляд отсутствие обдуманного противодействия упрощает игроку задачу выбора решения. Однако, хотя ЛПР никто не мешает, ему труднее обосновать свой выбор, поскольку в этом случае гарантированный результат не известен.

Методы принятия решений в играх с природой зависят от характера неопределенности, точнее от того, известны или нет вероятности состояний (стратегий) природы, т.е. имеет ли место **ситуация риска** или **ситуация неопределенности**.

Собственно разница между риском и неопределённостью касается того, знает ли принимающий решение что-либо о вероятности наступления определённых событий. **Риск** присутствует тогда, когда вероятности, связанные с различными последствиями принятия решения, могут оцениваться на основе данных предшествующего периода (имеется статистическая информация о подобных ранее принимаемых решениях, о подобных изучаемой ситуациях и т.п.). **Неопределённость** существует тогда, когда эти вероятности приходится определять субъективно, т.к. нет данных предшествующего периода (нет соответствующей статистики).

[1] Впрочем, в матричных представлениях игр с природой значения выигрышей принимающего решения игрока не всегда располагаются по строкам. Это допустимо делать и по столбцам, принимая ЛПР как игрока 2, понимая, однако, что мажорировать можно только стратегии принимающего решения игрока.

Задача выбора решения в условиях неопределённости сводится к следующему.

Пусть задан некоторый **вектор** $S=(S_1,S_2,...,S_n)$, описывающий n **состояний внешней среды**, и **вектор** $X=(X_1,X_2,...,X_m)$, описывающий m **допустимых решений**. Требуется найти такой вектор $X^*=(0,0,...,0,X_i,0,...,0)$, который бы обеспечивал **оптимум** некоторой **функции полезности** $W=(X,S)$ по некоторому **критерию** K.

Значение оптимума функции $W=(X,S)$ раскрывается, исходя из постановки конкретной задачи (к примеру, если обсуждается получение прибыли, то значение функции стремятся максимизировать, если себестоимость – минимизировать).

Информацию об указанной функции полезности (по сути исходные данные задачи такого типа) представляют **матрицей размерности** $m\times n$ с элементами $W_{ij}=F(X_i,S_j)$, где F - **решающее правило** (определяемое из постановки конкретной задачи).

Формирование решающего правила во многом предопределяет конечный результат расчетов (в случае его неточности даже правильный выбор критерия оптимальности и соответствующие расчеты не дают основания считать принятое решение наилучшим).

При достаточно четкой экономической постановке задачи практически не возникает проблем с формированием матрицы $\{W_{ij}\}$.

Критерий принятия решения в ситуации риска.

Предположим, что в нашем распоряжении имеются статистические данные, позволяющие оценить вероятность того или иного состояния внешней среды, и этот опыт может быть использован для оценки будущего. При известных вероятностях P_j для возникновения состояния S_j можно найти математическое ожидание $W=\left(X,S,P\right)$ и определить вектор X^*, обеспечивающий

$$W=\max_{i=1,\dots,m}\sum_{j=1}^{n}W_{ij}P_j. \qquad (4.7.1)$$

Критерии принятия решения в ситуации неопределённости.

Неопределенность, связанную с отсутствием информации о вероятностях состоянии среды (природы), называют «безнадежной» или «дурной». В таких случаях для определения наилучших решении используются следующие критерии: Лапласа, Вальда, Сэвиджа, Гурвица.

1. **Критерий Лапласа.**

По принципу недостаточного основания в условиях, когда невозможно выяснить вероятности для возникновения того или иного состояния внешней среды, им сопоставляют равные вероятности, находят средний эффект для каждого из рассматриваемых вариантов решения и выбирается тот из них, где средний эффект максимален:

$$W=\max_{i=1,\dots,m}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}W_{ij} \qquad (4.7.2)$$

2. **Критерий Вальда** (критерий наибольшей осторожности/ пессимиста).

Для каждого из рассматриваемых вариантов решения X_i выбирается самая худшая ситуация (наименьшее из W_{ij}) и среди них отыскивается гарантированный максимальный эффект:

$$W=\max_{i=1,\dots,m}\min_{j=1,\dots,n}W_{ij} \qquad (4.7.3)$$

3. **Критерий Гурвица.**

Ориентация на самый худший исход является своеобразной перестраховкой, однако опрометчиво выбирать и излишне оптимистичную политику. Критерий Гурвица предлагает некоторый компромисс:

$$W = \max_{i=1,\dots,m}\left[\alpha \max_{j=1,\dots,n} W_{ij} + (1-\alpha)\min_{j=1,\dots,n} W_{ij}\right], \qquad (4.7.4)$$

где параметр α принимает значение от 0 до 1 и выступает как коэффициент оптимизма. К примеру, при $\alpha = 0$ (полный пессимизм) критерий Гурвица превращается в критерий Вальда, при $\alpha = 0.5$ мы расцениваем равновероятно шансы на успех и неудачу, при $\alpha = 0.2$ мы более осторожны и вероятность успеха считаем меньшей (0.2), чем возможную неудачу.

4. **Критерий Сэвиджа.**

Суть его - нахождение минимального риска. При выборе решения по этому критерию:

- матрице функции полезности (эффективности) сопоставляется новая матрица - матрица сожалений

$$D_{ij} = W_{ij} - \max_{i} W_{ij}, \qquad (4.7.5)$$

элементы которой отражают убытки от ошибочного действия, т.е. выгоду, упущенную в результате принятия i-го решения в j-м состоянии;

- по матрице D выбирается решение по пессимистическому критерию Вальда, дающее наименьшее значение максимального сожаления

$$W = \max_{i=1,\dots,m} \min_{j=1,\dots,n} D_{ij}. \qquad (4.7.6)$$

Вполне логично, что **различные критерии приводят к различным выводам относительно наилучшего решения**. Вместе с тем возможность выбора критерия дает свободу лицам, принимающим экономические решения (если они, конечно, располагают достаточными средствами для постановки подобной задачи). **Любой критерий должен согласовываться с намерениями решающего задачу и соответствовать его характеру, знаниям и убеждениям.**

Задача 4.7.1. В приморском городе решено открыть яхт-клуб. Сколько следует закупить яхт (из расчета: одна яхта на 5 человек), если предполагаемое число членов клуба колеблется от 10 до 25 человек. Годовой абонемент стоит 100 денежных единиц. Цена яхты - 170 денежных единиц. Аренда помещения и хранение яхт обходится в 730 денежных единиц в год.

Решение. Несомненно, что имеет смысл рассматривать количество приобретаемых яхт в диапазоне от двух до пяти (4 варианта) и количество потенциальных яхтсменов от 10 до 25. Однако объем перебора будет великоват и потому ограничимся вариантами 10, 15, 20, 25 (если полученные выводы для смежных вариантов будут существенно разниться, проведем дополнительный, уточняющий расчет).

Итак: $X=\left\{X_i\right\}=\{2,3,4,5\}$ – количество яхт ($i=1,2,3,4$); $S=\left\{S_j\right\}=\{10,15,20,25\}$ – количество членов яхт-клуба ($j=1,2,3,4$).

Для того чтобы начать поиск решения, построим матрицу полезности, элементы которой показывают прибыль при принятии i - го решения при j - ом количестве членов яхт-клуба:

$$W_{ij}=100\cdot\min\left(5X_i;S_j\right)-170X_i-730,$$

т.е. решающее правило в нашей задаче формулируется как «доход – затраты».

Выполнив несложные расчеты, заполним матрицу полезности $\left\{W_{ij}\right\}$:

Таблица 4.7.1

	$S_1=2$	$S_2=15$	$S_3=20$	$S_4=25$
$X_1=2$	-70	-70	-70	-70
$X_2=3$	-240	260	260	260
$X_3=4$	-410	90	590	590
$X_4=5$	-580	-80	420	920

Например, $W_{11}=100\cdot\min(5\cdot 2;10)-170\cdot 2-730=-70$

$$W_{12}=100\cdot\min(5\cdot 2;15)-170\cdot 2-730=-70$$

$W_{13}=W_{14}=-70$ (спрос на яхты останется неудовлетворенным).

Отрицательные значения показывают, что при этих соотношениях спроса на яхты и их наличия яхт-клуб несет убытки.

Критерий принятия решения в ситуации риска.

Предположим, что есть статистические данные, позволяющие оценить вероятность того или иного спроса на членство в яхт-клубе: $P=(0.1;\,0.2;\,0.4;\,0.3)$. Тогда математическое ожидание величины прибыли для каждого из рассматриваемых вариантов решения (предложение яхт в яхт-клубе):

$W_1=(-70\cdot)0.1+(-70)\cdot 0.2+(-70)\cdot 0.4+(-70)\cdot 0.3=-70$;

$W_2=(-240)\cdot 0.1+(260)\cdot 0.2+(260)\cdot 0.4+(260)\cdot 0.3=210$;

$W_3=390$; $W_4=370$.

***Вывод*:** в условиях рассматриваемой ситуации наиболее целесообразно закупить 4 яхты (в этом случае максимальная ожидаемая прибыль яхт-клуба составит 390 денежных единиц).

Принятие решения в ситуации неопределенности.

1. Для применения **критерия Лапласа** находим:

$W_1=((-70)+(-70)+(-70)+(-70))/4=-70$;

$W_2=((-240)+(260)+(260)+(260))/4=135$;

$W_3=215$; $W_4=170$.

***Вывод*:** в условиях равновероятности возникновения той или иной величины спроса на членство в яхт-клубе следует закупить 4 яхты и при этом можно рассчитывать на прибыль в размере 215 д.е.

2. **Критерий Вальда** (выбор осторожной, пессимистической стратегии) - для каждой альтернативы (количество яхт в клубе) выбирается самая худшая ситуация (наименьшее значение величины прибыли) и среди них отыскивается гарантированный максимальный эффект:

$$W = \max\{-70; -240; -410; -580\} = -70$$

***Вывод*:** принимая решение по критерию Вальда, яхт-клубу следует закупить 2 яхты и максимум ожидаемого убытка не превысит 70 д.е.

3. **Критерий Гурвица** (компромиссное решение между самым худшим исходом и излишне оптимистическим). Рассмотрим изменение решения нашей задачи в зависимости от значений коэффициента оптимизма (в таблице выделены значения, удовлетворяющие критерию Гурвица при различных α):

Таблица 4.7.2

	α = 0.2	α = 0.5	α = 0.8
$X_1 = 2$	-70	-70	-70
$X_2 = 3$	-140	10	160
$X_3 = 4$	-210	90	390
$X_4 = 5$	-380	170	620

***Вывод*:** при $\alpha \geq 0{,}5$ следует закупить 5 яхт и ожидать прибыль порядка, не меньшую 170 д.е. (надеемся на широкую популярность нашего клуба и определенную финансовую состоятельность любителей), при $\alpha = 0,2$ не следует закупать более 2 яхт (мы более осторожны в своих прогнозах и, скорее всего, предпочтем отказаться от создания клуба).

4. **Критерий Сэвиджа** (нахождение минимального риска). При выборе решения по этому критерию сначала матрице полезности сопоставляется матрица сожалений D - для нашего примера, вычитанием (-70) из первого

столбца матрицы полезности, 260 из второго столбца, 590 и 920 из третьего и четвертого столбцов соответственно.

Таблица 4.7.3

	$S_1 = 2$	$S_2 = 15$	$S_3 = 20$	$S_4 = 25$
$X_1 = 2$	0	-330	-660	-990
$X_2 = 3$	-170	0	-330	-660
$X_3 = 4$	-340	-170	0	-330
$X_4 = 5$	-510	-340	-170	0

Наибольшее значение среди минимальных элементов строк (выделенные в таблице значения) равно:

$$\max\{-990; -660; -340; -510\} = -340$$

***Вывод*:** покупая 4 яхты для открываемого яхт-клуба, мы уверены, что в худшем случае убытки клуба не превысят 340 д.е.

Общий вывод. Рассмотренные критерии приводят к различным решениям и дают тем самым информацию к размышлению (принятое решение здесь будет существенно зависеть от психологии и интуиции субъекта решения).

Список литературы.

1. *Акулич И.Л.* Математическое моделирование в примерах и задачах / И.Л. Акулич. - М.: Высшая школа, 1986.

2. *Аллен Р.* Математическая экономика/ Р. Аллен. – М.: Ил, 1963.

3. *Ашманов С.А.* Введение в математическую экономику / С.А. Ашманов. – М.: Наука, 1984.

4. *Бигель Дж.* Управление производством / Дж. Бигель. – М.: Мир, 1973.

5. *Вагнер Г.* Основы исследования операций. Тома I-III / Г. Вагнер. – М.: Мир, 1972-1973 гг.

6. Высшая математика для экономистов / под ред. Н.Ш. Кремера. - М.: ЮНИТИ, 1997.

7. *Гейл Д.* Теория линейных экономических моделей / Д. Гейл. – М.: Ил, 1963.

8. *Гермейер Ю.Б.* Игры с непротивоположными интересами / Ю.Б. Гермейер. - М.: Наука, 1976.

9. *Данилов Н.Н.* Исследование операций и математическое программирование / Н.Н. Данилов. - Кемерово: КемГУ, 1995.

10. *Данилов Н.Н.* Курс математической экономики / Н.Н. Данилов. - М.: Высшая школа, 2006.

11. *Дюбин Г.Н.* Введение в прикладную теорию игр / Г.Н. Дюбин, В.Г. Суздаль. - М.: Наука, 1981.

12. *Замков О.О.* Математические методы в экономике / О.О. Замков, А.В. Толстопятенко, Ю.Н. Черемных. – М.: ДИС, 1997.

13. *Иванилов Ю. П.* Математические модели в экономике / Ю. П. Иванилов, А. В. Лотов. – М.: Наука, 1979.

14. *Интриллигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория / М. Интриллигатор. – М.: Прогресс, 1975.

15. Исследование операций. Том I, том II. / под. ред. Дж.Моудера, С. Элмаграби. – М.: Мир, 1981.

16. Исследование операций в экономике / под ред. Н.Ш. Кремера.- М.: ЮНИТИ, 1997.

17. *Карасев А.И.* Математические методы и модели в планировании / А.И. Карасев, Н.Ш. Кремер, Т.И. Савельева. – М.: Экономика, 1987.

18. *Крушевский А.В.* Теория игр / А.В. Крушевский. - Киев: Вища школа, 1977.

19. *Кузнецов Ю.Н.* Математическое программирование / Ю.Н. Кузнецов и др.. - М.: Высшая школа, 1986.

20. *Ланкастер К.* Математическая экономика / К. Ланкастер. – М.: Советское радио, 1972.

21. *Левин М.И.* Математические модели экономического взаимодействия / М.И. Левин, В.Л. Макаров, А.М. Рубинов. – М.: Наука, 1993.

22. *Льюс Р.Д.* Игры и решения / Р.Д. Льюс, Х. Райфа - . М.: Изд-во иностранной литературы, 1961.

23. *Мак-Кинси Дж.* Введение в теорию игр / Дж. Мак-Кинси. - М.: Физматгиз, 1960.

24. *Маленво Э.* Лекции по микроэкономическому анализу / Э. Маленво. – М.: Наука, 1985.

25. Математический аппарат экономического моделирования / Под. ред. Гольштейна Е. Г. – М.: Наука, 1983.

26. *Мулен Э.* Теория игр / Э. Мулен. - М.,1985.

27. *Никайдо Х.* Выпуклые структуры и математическая экономика / Х. Никайдо. – М.: Мир, 1972.

28. *Оуэн Г.* Теория игр / Г. Оуэн. - М.: Мир,1971.

29. *Садовин Н.С.* Основы теории игр / Н.С. Садовин, Т.Н. Садовина. – Йошкар-Ола: ГОУВПО «Марийский государственный университет», 2011.

30. *Столерю А.* Равновесие и экономический рост / А. Столерю. – М.: Статистика, 1974.

31. *Экланд И.* Элементы математической экономики / И. Экланд. – М.: Мир, 1983.