Глава 3. Теория производства.

3.1. Производственные функции, их определение и свойства. Виды производственных функций

Под **производством** понимается процесс взаимодействия экономических факторов, завершаемый выпуском какой-либо продукции. Правила, предписывающие определенный порядок взаимодействия экономических факторов, составляют способ производства или, иначе говоря, **технологию производства**. Производство - основная область деятельности фирмы (или предприятия). **Фирма** - это организация, производящая затраты экономических ресурсов для изготовления продукции и услуг, которые она продает потребителям, в том числе, другим фирмам. Производственными единицами являются не только заводы и фабрики, но и отдельные лица - фермеры, ремесленники и др.

Производство можно представить как систему "затраты-выпуск", в которой **выпуском** является то, что фактически произведено, а **затратами** - то, что потребляется с целью выпуска (капитал, труд, энергия, сырье). Поэтому формально можно сказать, что производство - это функция, которая каждому набору затрат и конкретной технологии ставит в соответствие определенный выпуск. Именно такое упрощенное понимание производства как "черного ящика" заложено в математической модели производства. Во "вход" этого черного ящика подаются затраты, а на "выходе" получаем выпуск (произведенную продукцию).

Подобное описание производства на первый взгляд кажется сильно абстрактным, так как в нем не отражены технологические процессы, происходящие внутри черного ящика. В математической модели технология производства учитывается обычно посредством задания соотношений между затратами и выпуском т.е. нормой затрат каждого из ресурсов, необходимых для получения одной единицы выпускаемой продукции. Такой подход объясняется тем, что математическая экономика изучает суть экономических процессов, а сугубо технические операции как таковые (а не их экономические следствия) остаются за рамками этой науки.

Задача фирмы, как производственной единицы, сложна и многогранна - начиная от организации производства и кончая благотворительной деятельностью. Естественно, математической моделью нельзя охватить весь спектр деятельности фирмы и отразить все преследуемые цели. Поэтому при формализации задачи рационального функционирования фирмы учитываются лишь основные конечные цели.

Конечной целью фирмы является получение наибольшей прибыли от реализации своей продукции. Напомним в этой связи, что **прибыль** понимается как разность двух величин: выручки от реализации продукции (дохода) и издержек производства. **Издержки** производства равны общим выплатам за все виды затрат, иначе говоря, издержки - это денежный эквивалент материальных затрат. В общем случае издержки состоят из двух слагаемых: постоянных издержек и переменных издержек. **Постоянные издержки** (расходы на закупку и ремонт оборудования, содержание фирмы, страховку и пр.) фирма несет независимо от объема выпуска. **Переменные издержки** (расходы на заработную плату, сырье и пр.) касаются использования уже имеющихся в распоряжении фирмы ресурсов, производственных мощностей и меняются вместе с объемом выпуска.

Согласно с поставленной целью, задача фирмы сводится к поиску такого способа производства (сочетания затрат и выпуска), который обеспечивает ей наибольшую прибыль с учетом и в рамках имеющихся у нее ограниченных ресурсов. Данная трактовка цели фирмы и наилучшего способа производства не является единственно возможной. Речь идет о некоторой гипотезе относительно предпочтений производителя, а не о логической необходимости. В действительности же мотивы принимаемых руководителями фирм решений могут быть продиктованы другими соображениями, например, гуманного или социально-политического характера. Поэтому в отличие от математической теории потребления, где существовала единственная, логически оправданная оптимизационная модель потребителя, здесь нецелесообразно говорить об "оптимизационной модели фирмы" как таковой. Задачи фирмы могут существенно отличаться как преследуемой целью, так и временным периодом ее решения.

Обсужденную выше задачу будем называть **задачей фирмы на максимизацию прибыли**. Двойственной к ней (в некотором смысле) является **задача фирмы на минимизацию издержек** при фиксированном уровне планируемого выпуска (дохода). Именно такая формализация цели производства в последнее время становится более популярной в связи с глобальной проблемой "устойчивого развития" общества, так как она созвучна с задачами рационального использования природных ресурсов.

Из приведенного выше краткого описания сути производства видно, что основными факторами, которые должны быть учтены при моделировании задачи фирмы, являются выпуск продукции, затраты ресурсов, их цены, доход, издержки и производственные возможности фирмы. Перед тем, как построить ту или иную оптимизационную модель задачи фирмы, более подробно остановимся на способах формализации этих понятий и рассмотрим некоторые их свойства.

Предположим, что фирма производит n видов продуктов. Виды продуктов будем обозначать индексом j, а их количества - через y_j, $j=1,...,n$. Технология производства каждого вида продукта требует использования ряда ресурсов в некоторых количествах. Двойными индексами k_j обозначим виды ресурсов, используемых для выпуска продукта вида j. Пусть $k_j=1,2,...,m_j$. Обозначим через x_{k_j} - количества этих ресурсов, $k_j=1,2,...,m_j$, $j=1,...,n$. Следовательно, имеется всего $m_1+...+m_n$ видов ресурсов.

Использование такой двойной индексации привлекательно с точки зрения информативности (видно, какой ресурс относится к какому продукту), но неудобно чисто технически. Во-первых, усложняется запись формул; во-вторых, увеличивается размерность задачи (т.к. среди $m_1, m_2, .., m_n$ могут быть одни и те же наименования) и, в-третьих, такие операции как сложение, вычитание затрат в векторной форме, а также составление уравнений становятся невозможными без дополнительных преобразований индексов (идентификация, упорядочение и т.д.).

Поэтому в дальнейшем виды ресурсов будем обозначать одинарными индексами k, их количества - x_k, где $k=1,...,m$. Здесь m- достаточно большое число (равное сумме $m_1+...+m_n$, где каждый ресурс считается только один раз). Теперь можно говорить, что для производства n видов продуктов фирма использует m видов затрат. Это не приводит к недоразумениям, так как в случае неиспользования k-го ресурса для выпуска данного продукта полагаем $x_k = 0$.

Введем в рассмотрение два вида векторов: $x=(x_1,...,x_m)$ - **вектор затрат** и $y=(y_1,...,y_n)$ - **вектор выпуска**. Положительный ортант $R_+^m = \left\{x \in R^m / x_k \geq 0, k=1,...,m\right\}$ называется **пространством затрат**.

Аналогично определяется **пространство выпуска**: $R_+^n = \left\{x \in R^n / y_j \geq 0, j=1,...,n\right\}$.

Для отражения реальных возможностей фирмы в математических моделях часто применяются более узкие множества $X \subset R_+^m$ и $Y \subset R_+^n$.

Технологическая связь между затратами и выпуском описывается с помощью производственной функции.

Определение 3.1.1. Любая функция $f: R_+^m \to R_+^n$, ставящая в соответствие каждому вектору затрат x вектор $y=f(x)$ максимального выпуска, который может быть получен при этих затратах, называется **производственной функцией**.

Это есть определение производственной функции для многопродуктовой фирмы, т.е. векторной производственной функции. Если фирма выпускает только один вид продукта, то производственная функция является скалярной:

$$f: R_{+}^{m} \to R_{+}^{1} \text{ или } y = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \qquad (3.1.1)$$

В общем случае производственную функцию можно записать в неявной форме: $F\left(x, y, A\right) = 0$, где A - $n \times m$ - матрица параметров (технологическая матрица). В некоторых моделях применяется следующее выражение для производственной функции: $F\left(z_1, \ldots, z_r, A\right) = 0$, где переменные z_i со знаком "-" - обозначают затраты, а со знаком "+" - выпуски.

Если в качестве независимых переменных (аргументов) выступают затраты (см.(3.1.1)), то производственную функцию иногда называют **функцией выпуска**, если же фиксирована величина выпуска (y), то производственная функция является **функцией затрат** ($x = f^{-1}\left(y\right)$). Таким образом, функция выпуска и функция затрат являются взаимно обратными друг другу функциями.

Применение производственных функций не ограничивается выявлением зависимости затраты-выпуск. Различные приемы математического аппарата позволяют использовать их для вычисления численных характеристик производства, анализа эффективности изменения масштаба производства и технологического прогресса, исследования эластичности производственных факторов, рационального ведения хозяйства, оптимального планирования и прогнозирования вариантов развития фирмы и др.

Поэтому очень важно, чтобы производственная функция объективно отражала моделируемую действительность, т.е. чтобы она удовлетворяла содержательно-логическим и экономическим требованиям. Основные из них следующие:

- в число аргументов производственной функции должны быть включены все существенные для данного процесса факторы;
- все величины должны иметь отчетливый экономический смысл;
- все экономические величины, входящие в производственную функцию, должны быть измеримы;
- выпуск продукции без затрат невозможен;
- если величина какого-либо ресурса ограничена, то выпуск не может расти бесконечно;
- увеличение затрат не может привести к уменьшению выпуска.

Вопрос об адекватном описании экономической реальности на языке производственных функций тесно связан с их математическими свойствами. Ради простоты эти свойства приведем для однопродуктового производства, т.е. для производственной функции вида (3.1.1) .

1. Монотонность: из $x^1, x^2 \in R_+^m$ и $x^1 \geq x^2$ следует $f\left(x^1\right) \geq f\left(x^2\right)$.
2. Вогнутость: для любых $x^1, x^2 \in R_+^m$ и $0 \leq \alpha \leq 1$ справедливо неравенство $f\left(\alpha x^1 + (1-\alpha) x^2\right) \geq \alpha f\left(x^1\right) + (1-\alpha) f\left(x^2\right)$.
3. Поведение в начале координат: $f(0) = 0$.
4. Однородность: $f\left(\lambda x\right) = \lambda^{\alpha} f\left(x\right)$, где $\lambda > 0$ - масштабное число, $\alpha > 0$ - степень однородности.

Если производственная функция дифференцируема по всем аргументам, то свойства 1 и 2 соответственно могут быть заменены следующими неравенствами:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} \geq 0, k = 1, ..., m, \tag{3.1.2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} < 0, k = 1,\ldots,m. \qquad (3.1.3)$$

Частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ называются **предельными продуктами**.

Условие (3.1.2), как и свойство 1, означает, что увеличение любого вида затрат не приводит к уменьшению выпуска. Условие (3.1.3) показывает, что увеличение затрат одного вида ресурса (при постоянном уровне затрат других ресурсов) приводит ко все меньшему приросту выпуска. Это свойство в экономической теории называется **законом убывающей доходности (отдачи)**.

Свойство 3 является отражением бездеятельности, так как без затрат нет и выпуска. Свойство 4 описывает реакцию производства на изменение затрат. Параметр λ показывает масштаб изменения производства (расширения производства – если $\lambda > 1$, сужения производства - если $\lambda < 1$), а α - эффект от изменения масштабов производства. Если $\alpha > 1$, то одновременное увеличение всех факторов в λ раз приводит к возрастанию объема выпуска больше, чем в λ раз ($\lambda^\alpha > \lambda$), т.е. эффект от расширения масштаба производства положителен. При $\alpha = 1$ получаем: $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ - выпуск возрастает в той же пропорции, что и затраты. Такие функции называются **линейно-однородными** (или однородными в первой степени).

Если $f(\lambda x) > \lambda f(x)$ $\left(f(\lambda x) < \lambda f(x)\right)$, то говорят о возрастающем (убывающем) доходе от расширения масштаба производства. Заметим, что свойство 4 определено в точке, тогда как свойства 1 и 2 - во всем пространстве затрат.

Как мы видим, перечисленные свойства производственной функции вполне согласуются с ее определением, так как они касаются только соотношения затраты-выпуск. Действительно, здесь нет никаких требований на бесперебойную работу станков, нормирования движения конвейера и т.д. Поэтому производственная функция, как отображение количественной связи между затратами и выпуском, представляет собой регрессионную модель.

Следовательно, она может быть построена на основе статистических данных и с применением методов математической статистики. Приведем примеры наиболее удачно построенных и потому часто применяемых на практике производственных функций. При этом для простоты будем рассматривать двухфакторную однопродуктовую производственную функцию вида $f(x_1,x_2)$

1. Производственная функция Кобба-Дугласа. Первый успешный опыт построения производственной функции, как уравнения регрессии на базе статистических данных, был получен американскими учеными - математиком Д. Коббом и экономистом П. Дугласом в 1928 году. Предложенная ими функция изначально имела вид:

$$Y = a \cdot K^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha} \quad \left(f(x_1,x_2) = a \cdot x_1^{\alpha} \cdot x_2^{1-\alpha} \right), \tag{3.1.4}$$

где Y - объем выпуска, K - величина производственных фондов (капитал), L - затраты труда, $a>0$, $\alpha>0$ - числовые параметры (масштабное число и показатель эластичности). Благодаря своей простоте и рациональности, эта функция широко применяется до сих пор и получила дальнейшие обобщения в различных направлениях.

Функцию Кобба-Дугласа иногда мы будем записывать в виде $f(x_1,x_2) = a \cdot x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2}$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$.

Легко проверить, что $Y(0,0)=0$ и $\frac{\partial Y}{\partial K} \ge 0$, $\frac{\partial Y}{\partial L} \ge 0$, $\frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} < 0$, $\frac{\partial^2 Y}{\partial L^2} < 0$.

Кроме того, функция (3.1.4) линейно-однородна: $Y(\lambda K,\lambda L) = a(\lambda K)^{\alpha}(\lambda L)^{1-\alpha} = \lambda a K^{\alpha} L^{1-\alpha} = \lambda Y(K,L)$.

Таким образом, функция Кобба-Дугласа (3.1.4) обладает всеми вышеуказанными свойствами.

Для многофакторного производства функция Кобба-Дугласа имеет вид:

$f(x) = a \cdot x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_m^{\alpha_m}$, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_m = 1.$

Для учета технического прогресса в функцию Кобба-Дугласа вводят специальный множитель (технического прогресса) e^{vt}, где t - параметр времени, v - постоянное число, характеризующее темп развития. В результате функция принимает "динамический" вид: $f(x) = a \cdot e^{vt} x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$, где не обязательно $\alpha + \beta = 1$. Показатели степени в функции (3.1.4) имеют смысл эластичности выпуска по капиталу и труду.

2. Производственная функция CES (с постоянной эластичностью замещения) имеет вид:

$$f\left(x_1, x_2\right) = a \cdot \left[\delta x_1^{-p} + (1-\delta) x_2^{-p}\right]^{-\frac{\gamma}{p}}, \qquad (3.1.5)$$

где $a > 0$ - коэффициент шкалы, $\delta > 0$ - коэффициент распределения, ρ - коэффициент замещения, γ - степень однородности. Если выполнены условия $0 < \gamma < 1$, $\rho > -1$, то функция (3.1.5) удовлетворяет неравенствам (3.1.2) и (3.1.3). С учетом технического прогресса функция CES записывается:

$$f\left(x_1, x_2\right) = ae^{vt} \cdot \left[\delta x_1^{-p} + (1-\delta) x_2^{-p}\right]^{-\frac{\gamma}{p}}.$$

3. Производственная функция с фиксированными пропорциями. Эта функция получается из (3.1.5) при $\rho \to \infty$ и имеет вид:

$$f\left(x_1, x_2\right) = \min\left\{ax_1^{\gamma}, bx_2^{\gamma}\right\}. \qquad (3.1.6)$$

4. Производственная функция затрат-выпуска (функция Леонтьева) получается из (3.1.6) при $\gamma = 1$: $f\left(x_1, x_2\right) = \min\left\{ax_1, bx_2\right\}$.

Содержательно эта функция задает пропорцию, с помощью которой определяется количество затрат каждого вида, необходимое для производства одной единицы выпускаемой продукции. Поэтому в литературе часто встречаются другие формы записи:

$$f\left(x_1, x_2\right) = \min\left\{\frac{x_1}{c_1}, \frac{x_2}{c_2}\right\} \qquad (3.1.7)$$

или

$$x_k \geq c_k y, \quad k = 1, 2.$$

Здесь $c_k \geq 0$ - количество затрат вида k, необходимое для производства одной единицы продукции, а y - выпуск.

5. Производственная функция анализа способов производственной деятельности. Данная функция обобщает производственную функцию затрат-выпуска на случай, когда существует некоторое число (r) базовых процессов (способов производственной деятельности), каждый из которых может протекать с любой неотрицательной интенсивностью. Она имеет вид "оптимизационной задачи"

$$f\left(x_1, x_2\right) = \sum_{j=1}^{r} d_j y_j, \text{ где } \sum_{j=1}^{r} x_{kj} y_j \leq x_k, \; k = 1, 2. \qquad (3.1.8)$$

Здесь y_j - выпуск продукции при единичной интенсивности j-го базового процесса, d_j - уровень интенсивности, x_{kj} - количество затрат вида k, необходимых при единичной интенсивности способа j.

Как видно из (3.1.8), если выпуск, произведенный при единичной интенсивности и затраты, необходимые на единицу интенсивности, известны, то общий выпуск и общие затраты находятся путем сложения выпуска и затрат соответственно для каждого базового процесса при выбранных интенсивностях.

Заметим, что задача максимизации функции f по $y_1,...,y_r$ в (3.1.8) при заданных ограничениях-неравенствах является моделью анализа производственной деятельности (максимизация выпуска при ограниченных ресурсах).

6. Линейная производственная функция (функция с взаимозамещением ресурсов) применяется при наличии линейной зависимости выпуска от затрат:

$$f\left(x_1,x_2\right)=a_1x_1+a_2x_2, \qquad (3.1.9)$$

где $a_k \geq 0$ - норма затрат k-го вида для производства единицы продукции (предельный физический продукт затрат).

Среди приведенных здесь производственных функций наиболее общей является функция CES. Действительно, как будет показано в следующем параграфе с применением понятий предельной нормы замещения и эластичности замещения, она обобщает функции Кобба-Дугласа, Леонтьева и линейную производственную функцию.

Для анализа процесса производства и различных его показателей наряду с предельными продуктами, $f_1^{П}\left(x_1\right)=\dfrac{\partial f\left(x_1,\bar{x}_2\right)}{\partial x_1}$, $f_2^{П}\left(x_2\right)=\dfrac{\partial f\left(\bar{x}_1,x_2\right)}{\partial x_2}$ (верхние черточки обозначают фиксированные значения переменных), показывающими величины дополнительных доходов, получаемых при использовании дополнительных количеств затрат, применяются понятия **средних продуктов**.

Средним продуктом по k-му виду затрат называется объем выпуска, приходящийся на единицу затрат k-го вида при фиксированном уровне затрат других видов: $f_1^C(x_1) = \dfrac{f(x_1, \bar{x}_2)}{x_1}$, $f_2^C(x_2) = \dfrac{f(\bar{x}_1, x_2)}{x_2}$.

Зафиксируем затраты второго вида на некотором уровне $\bar{x}_2$ и сравним графики трех функций: $f_1^0 = f_1^0(x_1) = f(x_1, \bar{x}_2)$, $f_1^C = f_1^C(x_1)$, $f_1^П = f_1^П(x_1)$.

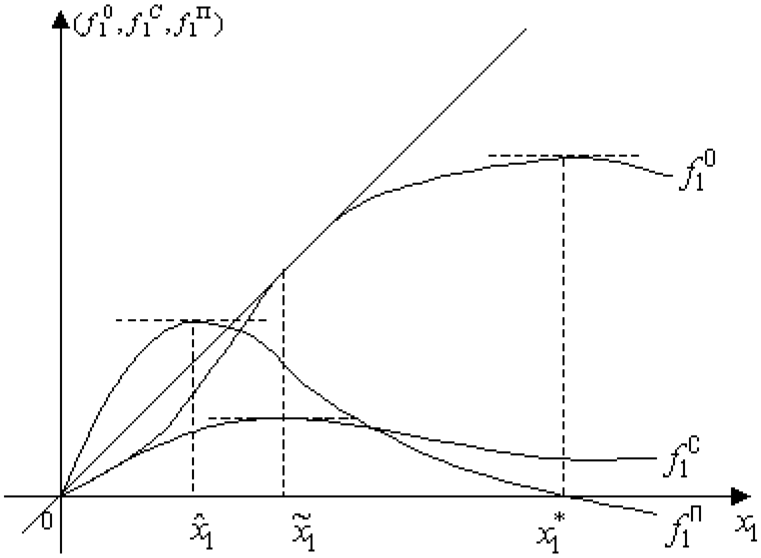

Рис.3.1.1. Кривые выпуска

Пусть график функции f_1^0 имеет три критические точки (как это показано на рис.3.1.1): $\hat{x}_1$ - точка перегиба, $\tilde{x}_1$ - точка касания с лучом из начала координат, x_1^* - точка максимума. Эти точки соответствуют трем стадиям производства. Первая стадия соответствует отрезку $[0, \tilde{x}_1]$ и характеризуется превосходством предельного продукта над средним: $f_1^П > f_1^C > 0$. Следовательно, на этой стадии осуществление дополнительных затрат целесообразно. Вторая стадия соответствует отрезку $[\tilde{x}_1, x_1^*]$ и характеризуется превосходством среднего продукта над предельным: $f_1^C > f_1^П \geq 0$ (дополнительные затраты не целесообразны). На третьей стадии

$\left(x_1^*, \infty\right)$, $f_1^{П} < 0$ и дополнительные затраты приводят к обратному эффекту. Это объясняется тем, что x_1^* является оптимальным объемом затрат и дальнейшее увеличение их неразумно.

Для конкретных наименований ресурсов средние и предельные величины приобретают смысл конкретных экономических показателей. Рассмотрим, например, функцию Кобба-Дугласа (3.1.4) , где $x_1 = K$ - капитал, а $x_2 = L$- труд. Средние продукты $f_L^C = \frac{Y}{L} = aK^{\alpha} L^{-\alpha}$, $f_K^C = \frac{Y}{K} = aK^{\alpha-1} L^{1-\alpha}$ имеют смысл соответственно **средней производительности труда** и **средней производительности капитала** (средней фондоотдачи). Видно, что средняя производительность труда убывает с ростом трудовых ресурсов. Это и понятно, так как производственные фонды (K) остаются неизменными, и потому вновь привлекаемая рабочая сила не обеспечивается дополнительными средствами производства, что и приводит к снижению производительности труда. Аналогичное рассуждение верно и для фондоотдачи как функции от капитала.

Для функции (3.1.4) предельные продукты $f_L^{П} = \frac{\partial Y}{\partial L} = a\left(1-\alpha\right) K^{\alpha} L^{-\alpha} = \left(1-a\right) f_L^C$, $f_K^{П} = \frac{\partial Y}{\partial K} = a\alpha K^{\alpha-1} L^{1-\alpha} = \alpha\, f_K^C$ имеют смысл соответственно предельной производительности труда и предельной производительности капитала (предельной фондоотдачи). В микроэкономической теории производства считается, что предельная производительность труда $\left(\frac{\partial Y}{\partial L}\right)$ равна заработной плате (цене труда), а предельная производительность капитала $\left(\frac{\partial Y}{\partial K}\right)$ - рентным платежам (цене услуг капитальных благ). Из условия (3.1.2) следует, что при неизменных основных фондах (трудовых затратах) увеличение численности работающих (объема основных фондов) приводит к падению предельной производительности труда (предельной фондоотдачи). Видно, что для функции Кобба-Дугласа предельные продукты пропорциональны средним продуктам и меньше их.

3.2. Эластичность – важная общая характеристика моделей производства и потребления

Сначала остановимся на понятии **эластичности производства**. Уже знакомое нам из предыдущего параграфа свойство однородности производственной функции оценивает технологию производства в различных точках пространства затрат. А именно, производственная функция в одних точках этого пространства может характеризоваться постоянным доходом от расширения масштаба производства, а в других - его увеличением или, наоборот, уменьшением. Локальным показателем измерения дохода от расширения масштаба производства и служит **эластичность производства**. Ее мы будем обозначать символом $\varepsilon_\lambda\left(f\left(x\right)\right)$ ("эластичность f по λ в точке x"). Можем написать (см.2.6.2): $\varepsilon_\lambda\left(f\left(x\right)\right)=\left(\lim\limits_{\Delta\lambda\to 0}\frac{\Delta f\left(\lambda x\right)}{\Delta\lambda}\right)\cdot\frac{\lambda}{f\left(\lambda x\right)}=\frac{\partial f\left(\lambda x\right)}{\partial\lambda}\cdot\frac{\lambda}{f\left(\lambda x\right)}$. Однако это соотношение не отражает изменение масштаба производства в точке x. Поэтому **вычислительная формула эластичности** производства выглядит так: $\varepsilon_\lambda\left(f\left(x\right)\right)=\lim\limits_{\lambda x\to x}\frac{\partial f\left(\lambda x\right)}{\partial\lambda}\cdot\frac{\lambda}{f\left(\lambda x\right)}$ или так

$$\varepsilon_\lambda\left(f(x)\right)=\lim_{\lambda\to 1}\frac{\partial f(\lambda x)}{\partial\lambda}\cdot\frac{\lambda}{f(\lambda x)}. \qquad (3.2.1)$$

В случае постоянства дохода при расширении масштаба производства (т.е. для линейно-однородной производственной функции) эластичность производства равна единице.

Действительно,

$$\varepsilon_\lambda\left(f(x)\right)=\lim_{\lambda\to 1}\frac{\partial f(\lambda x)}{\partial\lambda}\cdot\frac{\lambda}{f\left(\lambda x\right)}=\lim_{\lambda\to 1}\frac{\partial\left[\lambda f(x)\right]}{\partial\lambda}\cdot\frac{\lambda}{\lambda f(x)}=\lim_{\lambda\to 1}f(x)\cdot\frac{1}{f(x)}=1.$$

Задача 3.2.1. Вычислить эластичность производства, описываемого функцией Кобба-Дугласа $f\left(x_1,x_2\right)=a\cdot x_1^{\alpha_1}\cdot x_2^{\alpha_2},\quad \alpha_1+\alpha_2=1.$

Решение: Для функции Кобба-Дугласа имеем:

$$\varepsilon_{\lambda}(f(x)) = \lim_{\lambda \to 1} \frac{\partial\left[a \cdot (\lambda x_1)^{\alpha_1} \cdot (\lambda x_2)^{\alpha_2}\right]}{\partial \lambda} \cdot \frac{\lambda}{a \cdot (\lambda x_1)^{\alpha_1} \cdot (\lambda x_2)^{\alpha_2}} =$$

$$= \lim_{\lambda \to 1} \frac{\partial\left[a \cdot \lambda^{\alpha_1 + \alpha_2} \cdot x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2}\right]}{\partial \lambda} \cdot \frac{\lambda}{a \cdot \lambda^{\alpha_1 + \alpha_2} \cdot x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2}} =$$

$$= \lim_{\lambda \to 1} \left[a(\alpha_1 + \alpha_2) \cdot \lambda^{\alpha_1 + \alpha_2 - 1} \cdot x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \frac{\lambda}{a \cdot \lambda^{\alpha_1 + \alpha_2 - 1} \cdot x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2}} \right] =$$

$$= \lim_{\lambda \to 1} (\alpha_1 + \alpha_2) = (\alpha_1 + \alpha_2) = 1.$$

Задача 3.2.2. Вычислить эластичность производства, описываемого линейной функцией $f(x_1, x_2) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$.

Решение: Для линейной производственной функции имеем:

$$\varepsilon_{\lambda}(f(x)) = \lim_{\lambda \to 1} \frac{\partial(\alpha_1 \cdot \lambda x_1 + \alpha_2 \cdot \lambda x_2)}{\partial \lambda} \cdot \frac{\lambda}{\alpha_1 \cdot \lambda x_1 + \alpha_2 \cdot \lambda x_2} =$$

$$= \lim_{\lambda \to 1} (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \cdot \frac{1}{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2} = 1$$

Как легко видеть, здесь мы воспользовались линейной однородностью этих двух функций.

Легко убедиться в том, что в случае возрастания (убывания) дохода при изменении масштаба производства его эластичность больше (меньше) единицы. Естественно, что предпочтение отдается производству с большей эластичностью, так как увеличивать затраты имеет смысл, если только это приводит к увеличению выпуска. Объективность оценки эластичности производства безусловно зависит от того, насколько адекватно производственная функция, как модель, отражает взаимосвязь затрат с выпуском. Можно говорить, что каждая производственная функция "по-своему" оценивает эластичность производства.

Для практического анализа производства также представляет интерес **эластичность выпуска по видам ресурсов** как величина, характеризующая процент прироста продукции при увеличении затрат на **1%**:

$$\varepsilon_{x_k}\left(f(x)\right)=\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}\cdot\frac{x_k}{f(x)},\ k=1,...,m. \qquad (3.2.2)$$

Теорема 3.2.1. Эластичность производства, описываемого дифференцируемой линейно-однородной функцией, в любой точке пространства затрат равна сумме эластичностей выпуска по всем видам затрат.

Доказательство. Дифференцируя по λ обе части равенства $f\left(\lambda x\right)=f\left(\lambda x_1,...,\lambda x_m\right)$ по правилу дифференцирования сложной функции, имеем: $\dfrac{\partial f\left(\lambda x\right)}{\partial\lambda}=\sum\limits_{k=1}^{m}\dfrac{\partial f\left(\lambda x\right)}{\partial\left(\lambda x_k\right)}\cdot\dfrac{\partial\left(\lambda x_k\right)}{\partial\lambda}=\sum\limits_{k=1}^{m}\dfrac{\partial f\left(\lambda x\right)}{\partial\left(\lambda x_k\right)}\cdot x_k.$

Пользуясь этим равенством, выражение (3.2.1) можно переписать в виде $\varepsilon_\lambda\left(f(x)\right)=\lim\limits_{\lambda\to1}\sum\limits_{k=1}^{m}\dfrac{\partial f\left(\lambda x\right)}{\partial\left(\lambda x_k\right)}\cdot\dfrac{\lambda x_k}{f\left(\lambda x\right)}=\sum\limits_{k=1}^{m}\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_k}\cdot\dfrac{x_k}{f(x)}.$

Здесь мы воспользовались линейной однородностью производственной функции f. Теперь ясно, что (см. (3.2.2)) $\varepsilon_\lambda\left(f(x)\right)=\sum\limits_{k=1}^{m}\varepsilon_{x_k}\left(f(x)\right)$, а это и требовалось доказать.

Задача 3.2.3. Проверьте справедливость теоремы 3.2.1. для функции Кобба-Дугласа $f\left(x_1,x_2\right)=a\cdot x_1^{\alpha_1}\cdot x_2^{\alpha_2},\quad \alpha_1+\alpha_2=1.$

Решение: $\varepsilon_{x_1}\left(f(x)\right)=\alpha_1$, $\varepsilon_{x_2}\left(f(x)\right)=\alpha_2$, $\varepsilon_\lambda\left(f(x)\right)=\alpha_1+\alpha_2$.

Задача 3.2.4. Проверьте справедливость теоремы 3.2.1. для линейной функции $f\left(x_1,x_2\right)=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2$.

Решение: $\varepsilon_{x_1}\left(f(x)\right)=\frac{\alpha_1 x_1}{f(x)}$, $\varepsilon_{x_2}\left(f(x)\right)=\frac{\alpha_2 x_2}{f(x)}$,

$$\varepsilon_{\lambda}\left(f(x)\right)=\frac{\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2}{f(x)}=\frac{\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2}{\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2}.$$

На практике по разным причинам часто возникает необходимость замены одних ресурсов другими. Например, при расширении производства фирма должна решить: либо полностью автоматизировать производство за счет дорогостоящего оборудования и сократить количество рабочих мест (сократить фонд заработной платы), либо использовать предназначенные для этого средства для частичной модернизации технологии и увеличения фонда заработной платы. Что выгодно для фирмы? Для получения ответа на этот вопрос вводят понятия **предельной нормы замещения** одних ресурсов другими и **эластичности замещения** одних ресурсов другими.

Возможности замещения характеризуют производственную функцию с точки зрения различных комбинаций затрат, порождающих одинаковые уровни выпуска. Предположим, что двухфакторное производство описывается производственной функцией $Y=F\left(K,L\right)$, где Y - выпуск, K - капитал (основные фонды), L - трудовые ресурсы. Предположим, часть рабочих (ΔL) уволилась. На какую величину (ΔK) следует увеличить основные фонды, чтобы выпуск остался на прежнем уровне, т.е. чтобы имело место равенство $F\left(K+\Delta K, L-\Delta L\right)=F\left(K,L\right)$? Рассуждая как в пункте 2.6 (см. (2.6.5)-(2.6.10)), получаем, что количество основных фондов надо увеличить на величину $S_{LK}=-\frac{dK}{dL}=\frac{\partial F/\partial L}{\partial F/\partial K}$. Число S_{LK} называется предельной нормой замещения трудовых ресурсов основными фондами ($S_{LK}S_{KL}=1$).

Например, для функции Кобба-Дугласа (3.1.4) $S_{LK}=\frac{1-\alpha}{\alpha}\cdot\frac{K}{L}$, т.е. предельная норма замещения прямо пропорциональна фондовооруженности.

Чем больше фондовооруженность, тем выше уровень компенсации одной единицы трудовых ресурсов основными фондами.

В общем случае, т.е. для производственной функции $y = f\left(x_1, ..., x_m\right)$, формула для вычисления предельной нормы замещения i-го ресурса k-м ресурсом имеет вид:

$$S_{ik} = \frac{\partial f / \partial x_i}{\partial f / \partial x_k}, \; i, k = 1,..m. \qquad (3.2.3)$$

Из формул (3.2.2) и (3.2.3) вытекает взаимосвязь между эластичностью и предельной нормой замещения: для любых i и k: $S_{ik} = \frac{\varepsilon_{x_i}\left(f(x)\right)}{\varepsilon_{x_k}\left(f(x)\right)} \cdot \frac{x_k}{x_i}$.

Отсюда, в частности, можно сделать вывод о том, что для тех ресурсов, по которым выпуск неэластичен ($\varepsilon_{x_k}\left(f(x)\right) = 0$), нет смысла говорить о предельной норме замещения ими других ресурсов. Дробь $\frac{x_k}{x_i}$, где i - заменяемый, а k - замещающий ресурсы, показывает, сколько единиц замещающего ресурса приходится на одну единицу заменяемого ресурса.

Итак, предельная норма замещения показывает величину ресурса одного вида, которой производитель готов пожертвовать ради одной единицы ресурса другого вида.

Поставим теперь "обратный" вопрос: как изменится величина $\frac{x_k}{x_i}$ при изменении предельной нормы замещения S_{ik} на **1%**? Согласно определения эластичности, это есть "эластичность $\frac{x_k}{x_i}$ по S_{ik}". По формуле вычисления эластичности (2.6.2) имеем:

$$\varepsilon_{S_{ik}}\left(x_k / x_i\right) = \frac{d\left(x_k / x_i\right)}{dS_{ik}} \cdot \frac{S_{ik}}{x_k / x_i} = \frac{d\left(x_k / x_i\right) / \left(x_k / x_i\right)}{dS_{ik} / S_{ik}}. \qquad (3.2.4)$$

Эта величина называется эластичностью предельной нормы замещения (или просто эластичностью замещения). Введем более простое обозначение

$\sigma_{ik} = \varepsilon_{s_{ik}}\left(x_k/x_i\right)$. С учетом формулы $\frac{df}{f} = d\ln f$, где $f > 0$, эластичность (3.2.4) можно представить в виде:

$$\sigma_{ik} = \frac{d\ln\left(x_k/x_i\right)}{d\ln S_{ik}}. \qquad (3.2.5)$$

Для практики особый интерес представляет случай постоянства эластичности замещения, т.е. независимость отношения $\frac{x_k}{x_i}$ от предельной нормы замещения S_{ik}.

Покажем, что таким свойством обладает производственная функция CES (для простоты рассмотрим случай двухфакторного производства (3.1.5). С этой целью сперва вычислим предельную норму замещения для функции CES:

$$S_{12} = \frac{\partial f/\partial x_1}{\partial f/\partial x_2} = \frac{-a\frac{\gamma}{\rho}\left[\delta x_1^{-\rho} + (1-\delta)x_2^{-\rho}\right]^{-\frac{\gamma}{\rho}-1}\cdot\left(-\delta\rho x_1^{-\rho-1}\right)}{-a\frac{\gamma}{\rho}\left[\delta x_1^{-\rho} + (1-\delta)x_2^{-\rho}\right]^{-\frac{\gamma}{\rho}-1}\cdot\left(-(1-\delta)\rho x_2^{-\rho-1}\right)} = \frac{\delta}{1-\delta}\cdot\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\rho+1}.$$

Подставляя это в формулу (3.2.4) , получим:

$$\sigma_{12} = \frac{d\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}{\frac{\delta}{1-\delta}\cdot d\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\rho+1}}\cdot\frac{\frac{\delta}{1-\delta}\cdot\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\rho+1}}{\frac{x_2}{x_1}} = \frac{d\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}{d\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\rho+1}}\cdot\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\rho} =$$

$$= \left[\frac{d\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\rho+1}}{d\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}\right]^{-1}\cdot\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\rho} = (\rho+1)^{-1}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{-\rho}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\rho} = \frac{1}{\rho+1} = const.$$

Аналогичным образом можно показать, что $\sigma_{21} = const$ и, более того, $\sigma_{21} = \sigma_{12}$. Поэтому эластичность замещения для функции CES можно обозначить просто как σ. Легко видеть, что

$$\lim_{\rho \to 0} \sigma = 1, \quad \lim_{\rho \to \infty} \sigma = 0. \tag{3.2.6}$$

Нулевая эластичность означает отсутствие замещения. В общем, чем больше величина σ, тем шире возможность замещения одних ресурсов другими. Стремление значения σ к бесконечности означает, что каждый ресурс используется независимо от других.

Заметим, что к классу производственных функций с постоянной эластичностью относится и функция Кобба-Дугласа. Для нее $\sigma = 1$. Поэтому с учетом (3.2.6) можно сказать, что при $\rho \to 0$ производственная функция CES идентична с функцией Кобба-Дугласа.

3.3. Неоклассическая производственная функция и ее частный вид – функция Кобба-Дугласа

Все те применения производственных функций, о которых было рассказано в предыдущих параграфах, будут иметь место на практике экономических исследований и приносить реальную пользу только в том случае, если они как модели взаимосвязи "затраты-выпуск" будут адекватно отражать действительность. Поэтому важная задача теории - разработка достоверных и реалистических методов построения производственных функций.

По существу, производственная функция f есть совокупность "правил", с помощью которых для каждого набора затрат $\left(x_1,...,x_m\right)$ определяется соответствующий выпуск y: $y=f\left(x_1,...,x_m\right)$. Поэтому построение производственной функции означает нахождение математической формулы, отражающей эти правила или, иначе говоря, закономерности превращения набора ресурсов в конечный продукт. Этот процесс условно можно представить схемой:

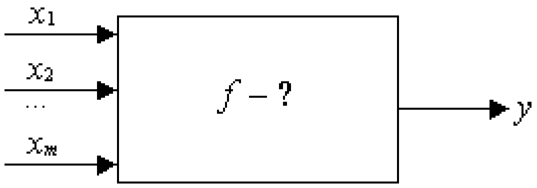

Рис. 3.3.1. Схема превращения ресурсов в конечный продукт

В блоке f (см.рис.3.3.1), образно говоря, происходит "смешивание" ресурсов $x_1,...,x_m$ в определенных "пропорциях" таким образом, чтобы получился требуемый продукт. Эти "пропорции" определяются спецификой производства и математически выражаются с помощью различных коэффициентов и показателей степени для величин $x_1,...,x_m$. "Смешивание" их математически выражается с помощью разных формальных операций между ними (суммирования, произведения, логарифмирования и т.д.), вид и сочетание которых также определяется спецификой моделируемого производства. Так что вопрос построения производственной функции в каждом конкретном случае сводится к нахождению этих "пропорций" и к определению характера их "смешивания".

Из сказанного выше следует, что для построения производственных функций нужно знать технологию производства, ее структуру и организацию, а также принципы работы сложных машин и оборудования, т.е. надо быть одновременно и технологом, и инженером, и математиком. Оказывается, что знание всего этого сложного производственного механизма не требуется, если владеть подходящими математическими приемами. Речь идет об использовании методов регрессионного анализа на основе статистических (опытных, экспертных) данных о затратах и выпуске. Не умаляя достоинства других математических и иных методов построения производственных функций, можно сказать, что именно методы регрессионного анализа наилучшим образом оправдали себя на практике и потому являются наиболее популярными.

Идею применения статистических данных для построения производственной функции можно объяснить на рисунке 3.3.1. Имеются известные величины $x_1,...,x_m, y$ (реальные результаты производства) и одно неизвестное выражение f, их связующее. Наблюдая в течение достаточно большого периода времени функционирования производства за различными значениями затрат $x_1,...,x_m$ и соответствующими им значениями выпуска y, можно выявить закономерность $f:(x_1,...,x_m)\xrightarrow{f} y$.

Например, свою знаменитую функцию (3.1.4) Кобб и Дуглас получили на основе изучения статистических данных по расходованию капитала (K), труда (L) и индекса производства (Y) в американской обрабатывающей промышленности за период с 1899 по 1922 гг. Практическая значимость этой функции подтверждается тем, что соответствующая замена исходных данных позволяет использовать ее для анализа любого производства.

Кратко остановимся на этапах построения производственной функции. Пусть нам известны виды ресурсов ($i=1,...,m$), используемых для выпуска данной продукции, и имеется необходимое количество статистических данных по объемам затрат $x_1,...,x_m$ и выпуска y. Требуется установить зависимость $y=f\left(x_1,...,x_m\right)$, т.е. найти аналитический вид производственной функции f. Эта задача распадается на два этапа:

1) спецификация функции f, т.е. выявление общего вида функции f от аргументов $x_1,...,x_m$ с неопределенными параметрами (коэффициентами и показателями степеней при x_i и свободным членом);
2) оценка параметров - определение конкретных числовых значений неизвестных параметров.

Картина "расположения" статистических данных в пространстве затраты-выпуск может подсказать линейный или нелинейный характер зависимости функции f от аргументов $x_1,...,x_m$. Например, в случае линейной производственной функции результатом спецификации будет гипотеза о линейной зависимости вида

$$f(x)=\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+...+\alpha_m x_m+\alpha, \tag{3.3.1}$$

в случае производственной функции Кобба-Дугласа - в виде мультипликативной функции

$$f(x)=b\cdot\prod_{k=1}^{m} x_k^{b_k}, \tag{3.3.2}$$

в случае производственной функции CES - в виде степенного многочлена

$$f(x)=c\cdot\left(\sum_{k=1}^{m} c_k x_k^{r}\right)^{l} \tag{3.3.3}$$

и т.д. Здесь a,a_k,b,b_k,c,c_k,r,l являются неизвестными параметрами, подлежащими определению (оценке).

Чаще остальных на практике применяется аппроксимация вида (3.3.1), называемая линейной регрессией. Для определения ее параметров используется (линейный) метод наименьших квадратов. В некоторых случаях к линейной аппроксимации удается свести и нелинейные относительно ресурсов производственные функции. Например, логарифмируя функцию (3.3.2) , получим: $\ln f\left(x\right)=\ln b+\sum_{k=1}^{m} b_k \ln x_k$.

Далее, вводя обозначения $z=\ln f\left(x\right), \beta=\ln b, z_i=\ln x_i$, приходим к линейной регрессии вида (3.3.1): $z=\beta+\beta_1 z_1+...+\beta_m z_m$.

Применяя такой способ на основе статистических данных упомянутого выше периода, Кобб и Дуглас получили следующую оценку параметров для своей функции: $a\approx 1{,}01, \alpha_1\approx 0{,}27, \alpha_2\approx 0{,}73$ и, следовательно, их производственная функция выглядела так: $Y=1{,}01\cdot K^{0{,}27}\cdot L^{0{,}73}$.

Дальнейший анализ показал, что за исключением некоторых случаев (например, учета технического прогресса), имеет место соотношение $\alpha_1+\alpha_2\approx 1$. Так как величина $\alpha_1+\alpha_2$ показывает эластичность производства, равенство $\alpha_1+\alpha_2=1$ является признаком линейной однородности производственной функции (задача 3.2.1). Этот факт позволяет записывать функцию Кобба-Дугласа в виде $Y=aK^{\alpha}L^{1-\alpha}$, где $0<\alpha<1$.

В отличие от функции Кобба-Дугласа, функция (3.3.3) даже после логарифмирования остается нелинейной. Поэтому для оценки параметров функции CES применяется более сложный нелинейный метод наименьших квадратов.

3.4. Автономный и овеществленный способы учета научно-технического прогресса на макроуровне в производственных функциях

В этом параграфе будут рассмотрены оптимизационные модели производства. Строго говоря, мы будем моделировать не само производство, как таковое, а задачу принятия решения относительно планирования производства. Поэтому будем предполагать выполненными следующие аксиомы:

- любое производство начинается с этапа планирования;
- принимаются только реалистичные планы;
- принятые планы выполняются.

На основе этих положений задача фирмы как организации, производящей затраты производственных ресурсов для изготовления товаров, сводится к определению количества выпускаемой продукции и необходимых для этого затрат.

Фирма должна решить свою задачу наилучшим (т.е. оптимальным) образом. При этом "оптимальность" можно понимать двояко: либо как получение наибольшей прибыли (с учетом имеющихся возможностей фирмы относительно затрат ресурсов), либо как достижение необходимого (фиксированного) уровня выпуска с наименьшими затратами. Фирма может поставить перед собой только одну из этих целей. В противном случае задача будет некорректной, т.е. нереализуемой. Действительно, нельзя осуществить наибольший выпуск при наименьших затратах. В теории многокритериальной оптимизации этот факт устанавливается строго.

С точки зрения временного промежутка (горизонта планирования) можно различить задачи двух типов - задачу текущего производства (**краткосрочная задача**) и задачу перспективного развития (**долгосрочная задача**).

Краткосрочная задача ставится на один производственный цикл - от начала производства товара до момента выхода фирмы со своим товаром на рынок. Здесь решается задача рационального использования уже имеющихся в распоряжении фирмы ресурсов, производственных мощностей, сырья, расходов на заработную плату. Поэтому математические модели краткосрочной задачи фирмы представляют собой оптимизационные задачи с ограничениями.

Долгосрочная задача охватывает период, достаточный для принятия и реализации крупномасштабных решений: наращивания или сокращения основных фондов, изменения структуры производства, определения долгосрочных инвестиций, страховок и др. Эти затраты непосредственно не зависят от объема текущего выпуска. Поэтому математические модели долгосрочной задачи фирмы являются задачами безусловной оптимизации.

Для моделирования задач фирмы нам нужно формализовать такие понятия, как затраты, выпуск, их цены, доход, издержки и производственные возможности фирмы.

Не умаляя общности, будем считать, что фирма производит один вид продукта, используя m видов ресурсов. Эти величины, как и ранее, будем обозначать соответственно через y и $x_1,...,x_m$. Предположим, что "технология" производства достаточно хорошо изучена, т.е. известна производственная функция $f: y = f(x) = f(x_1,...,x_m)$.

Обозначим через p цену выпускаемой продукции, а через w_k - цену k -го вида ресурса, $k = 1,...,m$. Эти цены порождают понятия дохода (выручки от продажи произведенной продукции) и издержек. Доход от реализации готовой продукции $y = f(x)$ определяется формулой $p \cdot f(x)$. Издержки, соответствующие вектору затрат $x = (x_1,...,x_m)$, т.е. общие выплаты за все виды затрат, равны $w_1 x_1 + ... + w_m x_m$. Эти издержки называются **переменными издержками**, так как они связаны (меняются вместе) с объемом выпуска. Кроме того, фирма несет и **постоянные издержки** (обозначим c_0), связанные с расходами на содержание фирмы. Поэтому общие издержки (обозначим C) складываются из двух компонент:

$C(x)=\sum_{k=1}^{m} w_k x_k + c_0$. Поскольку постоянные издержки не связаны с выпуском, то при составлении краткосрочных моделей мы их учитывать не будем. Тогда общий результат производства (x, y) (затраты-выпуск) можно оценить величиной $p \cdot f(x) - \sum_{k=1}^{m} w_k x_k$. Если эта величина положительна, то пара (x, y) приносит прибыль, в противном случае - убыток.

С помощью полученных формул построим математические модели различных задач фирмы.

1. Долгосрочная задача. На долгосрочный период фирма может планировать любые затраты, поэтому модель задачи имеет вид: $P(x_1,...,x_m) = p \cdot f(x_1,...,x_m) - \sum_{k=1}^{m} w_k x_k \to \max, \quad x_k \geq 0, k = 1,...,m.$

Это есть задача безусловной максимизации прибыли. Здесь постоянные затраты c_0 не учтены, так как они не влияют на максимизацию функции P по переменным затратам $x_1,...,x_m$.

В векторной форме долгосрочная задача имеет вид:

$$P(x) = p \cdot f(x) - \langle w, x \rangle \to \max, \quad x \geq 0, \qquad (3.4.1)$$

где $w = (w_1,...,w_m)$ - вектор цен затрат.

2. Краткосрочная задача. Эта задача планируется с учетом наличных на данный период запасов ресурсов, поэтому ее модель строится на условную оптимизацию: $P(x_1,...,x_m) = p \cdot f(x_1,...,x_m) - \sum_{k=1}^{m} w_k x_k \to \max,$ при ограничениях $x_k \in X_k, k = 1,...,m,$ где $X_k \subset R_+^m$- множество допустимых значений затрат k-го вида.

Введя обозначение $X = X_1 \times ... \times X_m$ множества допустимых наборов затрат, эту задачу можно написать в векторной форме

$$P(x) = p \cdot f(x) - \langle w, x \rangle \to \max, \qquad (3.4.2)$$

при ограничениях $x \in X$.

Здесь явный вид множества X может быть описан различными способами. Например, в виде

$X = \left\{ x \in R_+^m \,/\, a_i \le x_i \le b_i, i = 1,...,m \right\}$ (параллелепипеда),

$X = \left\{ x \in R_+^m \,/\, Ax \le b \right\}$ (многогранника),

$X = \left\{ x \in R_+^m \,/\, \mathrm{g}_l(x) \le 0, l = 1,...,r \right\}$ (криволинейного многообразия) и т.д.

3. Задача многопродуктового производства. Предположим теперь, что фирма выпускает не один, а несколько (n) видов продуктов. Пусть для каждого j-го вида продукта известны производственная функция $f_j : y_j = f\left(x_1,...,x_m\right)$ и цена p_j ($k = 1,...,m$); для каждого k-го вида ресурса известны функция g_k, описывающая суммарные затраты этого ресурса для производства всех n видов продуктов, и его наличное количество $b_k > 0$ ($k = 1,...,m$). В этом случае модели долгосрочной и краткосрочной задач соответственно имеют вид:

$$\begin{aligned} &P(x) = \langle p, f(x) \rangle - \langle w, x \rangle \to \max, \\ &x \ge 0 \end{aligned}$$

и

$$P(x) = \langle p, f(x) \rangle - \langle w, x \rangle \to \max, \qquad (3.4.3)$$

при ограничениях $g(x) \le b, x \ge 0$.

Здесь $p = \left(p_1,..., p_n\right)$ - вектор цен выпускаемых товаров, $g(x) = \left(g_1(x),...,g_m(x)\right)$ - вектор-функция затрат, $b = \left(b_1,...,b_m\right)$ - вектор наличных запасов ресурсов.

4. Задача на минимизацию затрат. Во всех приведенных выше моделях производства ставится задача максимизации прибыли, т.е. целевая функция имеет смысл прибыли. Для постановки задачи на минимизацию затрат предположим, что фирма планирует выпуск продуктов в объемах $y_1^*,...,y_n^*$, т.е. рассмотрим фиксированные объемы выпуска. В этом случае оптимизационная задача производства может быть поставлена следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&C\left(x_1,...,x_m\right)=\sum_{k=1}^{m} w_k x_k \to \min,\\
&f_j\left(x_1,...,x_m\right)=y_j^*,\ j=1,...,n,\\
&x_k \ge 0,\ k=1,...,m.
\end{aligned}
\tag{3.4.4}
$$

Желая "перевыполнить" план выпуска, ограничения-равенства можно заменить на ограничения-неравенства $f_j\left(x_1,...,x_m\right)\ge y_j^*$.

5. Видоизменения постановок задач. В зависимости от целей и характера исследования производства, можно пользоваться различными модификациями приведенных выше моделей. Например, в задачах (3.4.1) и (3.4.2) по тем или иным техническим соображениям производственную функцию можно "исключить" из целевой функции, записывая их в виде

$$
\begin{aligned}
&P(x)=py-\langle w,x\rangle \to \max,\\
&y=f(x),\ x\ge 0
\end{aligned}
$$

и

$$
\begin{aligned}
&P(x)=py-\langle w,x\rangle \to \max,\\
&y=f(x),\ x\in X.
\end{aligned}
$$

Задачу производства можно поставить в "чисто финансовой" форме. Предположим, что для приобретения необходимых ресурсов выделена фиксированная сумма v. Тогда задачу максимизации дохода можно поставить в следующей форме:

$$\langle p, f(x)\rangle \to \max,$$
$$\langle w, x\rangle \le v,\ x \ge 0.$$

Любое видоизменение моделей допустимо, если оно адекватно описывает реальную задачу. Оценивается не вид модели, а практическая польза от ее применения.

Видно, что во всех моделях производства максимизация и минимизация целевой функции осуществляется по переменным $x_1,...,x_m$, т.е. фирма принимает решение только относительно объемов затрат. Поэтому решениями этих задач являются оптимальные значения $x^* = \left(x_1^*,...,x_m^*\right)$ векторов затрат. Выбор метода нахождения оптимального решения задач зависит, прежде всего, от линейности или нелинейности участвующих в их постановке функций f и g. Если эти функции нелинейны, то соответствующую задачу можно решить методом множителей Лагранжа или каким-либо приближенным методом. В случае линейности всех функций можно применить симплекс-метод.

Для примера рассмотрим задачу (3.4.3). Если в ней функции $f_1,..., f_n$, $g_1,..., g_m$ дифференцируемы в R_+^m и среди них имеются нелинейные, то ее оптимальное решение x^* можно найти с помощью функции Лагранжа $L(x,\lambda) = \sum_{j=1}^{n} p_j f_j(x) - \sum_{k=1}^{m} w_k x_k + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \left(g_k(x) - b\right) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k x_k$ и необходимых условий оптимальности Куна-Таккера.

Предположим, что все функции в (3.4.3) линейные:

$$f_j(x) = c_{j1}x_1 + ... + c_{jm}x_m, \quad j = 1,...,n;$$

$$g_k(x) = a_{k1}x_1 + ... + a_{km}x_m, \quad k = 1,...,m.$$

В этом случае целевая функция задачи (3.4.3) принимает вид: $P(x) = c_1x_1 + ... + c_mx_m$, где $c_k = p_1c_{1k} + ... + p_nc_{nk} + w_k$, $k = 1,...,m$, а ограничения выглядят следующим образом:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1m}x_m \le b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mm}x_m \le b_m \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \ldots, x_m \ge 0.$$

Следовательно, мы имеем задачу линейного программирования:

$$\langle c, x \rangle \to \max,$$
$$Ax \le b,\ x \ge 0,$$

где $c = (c_1, \ldots, c_m)$, A - технологическая матрица, элементы a_{ik} которой показывают расход ресурса вида i для производства единицы продукта вида k.

Двойственная к ней задача

$$\langle b, z \rangle \to \min,$$
$$A^T z \le c,\ z \ge 0$$

имеет смысл минимизации затрат при фиксированном объеме выпуска.

Пусть в задаче (3.4.1) производственная функция f дважды дифференцируема в R_+^m и удовлетворяет условиям (3.1.2)-(3.1.3). Для нахождения ее оптимального решения $x^* = (x_1^*, \ldots, x_m^*)$ (относительно затрат) построим функцию Лагранжа $L(x, \lambda) = pf(x) - \sum_{k=1}^{m} w_k x_k + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_k$, где $\lambda_k \ge 0$, и выпишем необходимые условия Куна-Таккера:

$p \cdot \left.\frac{\partial f}{\partial x_k}\right|_{x = x^*} - w_k - \lambda_k = 0,\ k = 1, \ldots, m$ (стационарность),

$\lambda_k x_k^* = 0,\ k = 1, \ldots, m$ (дополняющая нежесткость),

$x_k^* \ge 0,\ k = 1, \ldots, m$ (допустимость).

Ввиду предположения о выполнении (3.1.3) эти условия становятся и достаточными условиями оптимальности. Упростим их, предположив $x_k^* > 0, k = 1,...,m$. Содержательно это означает необходимость затрат всех видов. Это условие не является жестким, так как в случае $x_k^* = 0$ можно было исключить ресурс k-го вида из рассмотрения, сократив тем самым размерность пространства затрат.

С учетом последнего предположения из условия дополняющей нежесткости следует $\lambda_k = 0, k = 1,...,m$. Заметим сразу, что это не противоречит условию о невозможности одновременного равенства нулю всех множителей Лагранжа - оно является следствием изменения условия задачи (3.4.1). В результате необходимый и достаточный признак оптимальности принимает вид:

$$p \cdot \left.\frac{\partial f}{\partial x_k}\right|_{x=x^*} - w_k = 0, k = 1,...,m. \tag{3.4.5}$$

Величину $p \cdot \frac{\partial f}{\partial x_k}$ естественно назвать стоимостью предельного продукта.

Поэтому (3.4.5) содержательно означает равенство стоимости предельного продукта и платы за ресурсы в точке x^*:

$$p \cdot \left.\frac{\partial f}{\partial x_k}\right|_{x=x^*} = w_k, k = 1,...,m.$$

Обозначим $\psi_k(x) = p \cdot \frac{\partial f}{\partial x_k} - w_k, k = 1,...,m$ и составим матрицу Якоби

для системы (3.4.5): $\left.\begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \psi_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \psi_m}{\partial x_m} \end{pmatrix}\right|_{x=x^*}$.

Из алгебры известно, что если матрица Якоби невырожденна, то система (3.4.5) имеет решение. Здесь невырожденность следует из условий (3.1.2)-(3.1.3). Таким образом, система (3.4.5) разрешима и оптимальное решение задачи (3.4.1) может быть выражено как функция $m+1$ параметров: $p, w_1, ..., w_m$:

$$x^* = x^*(p, w) = x^*\left(p, w_1, ..., w_m\right). \tag{3.4.6}$$

В координатной форме имеем m **функций спроса на затраты** $x_k^* = x_k^*\left(p, w_1, ..., w_m\right), \quad k = 1,..,m$, выражающих оптимальные объемы затрат в зависимости от цен.

Оказывается, спрос не зависит от масштаба цен, точнее, от пропорционального изменения цены продукции и цен ресурсов.

Действительно, из (3.4.1) для любых $\alpha > 0$ имеем: $\alpha pf(x) - \langle \alpha w, x\rangle = \alpha\left(pf(x) - \langle w, x\rangle\right) = \alpha P(x)$. Так как постоянный коэффициент α не влияет на максимизацию функции P по x, то задача $\alpha P(x) \to \max, \quad x \geq 0$ имеет такое же оптимальное решение, что и задача (3.4.1).

Следовательно, $x^*(\alpha p, \alpha w) = x^*(p, w), \quad \alpha > 0$ и функции спроса на затраты являются однородными нулевой степени функциями.

Подставляя решение (3.4.6) в производственную функцию f, получаем выпуск как функцию от тех же $m+1$ параметров:

$$f\left(x^*(p, w)\right) = f^*(p, w) = f^*\left(p, w_1, ..., w_m\right). \tag{3.4.7}$$

Это есть **функция предложения готовой продукции**.

Так как $f^*(\alpha p, \alpha w) = f\left(x^*(\alpha p, \alpha w)\right) = f\left(x^*(p, w)\right) = f^*(p, w)$, то функция предложения также является однородной нулевой степени функцией, т.е. объем предложения товара остается неизменным при повышении (снижении) цен на ресурсы, если в той же пропорции повышается (снижается) цена готовой продукции.

3.5. Изокванты, предельная производительность и предельная норма замещения ресурсов

Рассмотрим геометрическую иллюстрацию оптимального решения (3.4.6) задачи (3.4.1) в пространстве затрат. Для этого введем два геометрических понятия - **изокванты** и **изокосты**. **Изокванты** в теории производства играют такую же роль, что и кривые безразличия в теории потребления (см. пункт 2.5., определение 2.5.2).

Определение 3.5.1. Изоквантой (производственной функции $f: R_+^m \to R^1$) называется геометрическое место всех векторов затрат x, использование которых приводит к одному и тому же объему выпуска продукции $y^0: \left\{ x \in R_+^m / f\left(x\right) = y^0 \right\}$.

Таким образом, изокванта - это линия уровня производственной функции. Для различных уровней выпуска y^0 линии уровня $f\left(x\right) = y^0$ заполняют все пространство затрат (R_+^m) и составляют карту изоквант. Для примера на рис.3.5.1 приведен вид изоквант $\alpha \cdot x_1^{\alpha} \cdot x_2^{1-\alpha} = y^0 \quad \left(y^0 = const\right)$ производственной функции Кобба-Дугласа.

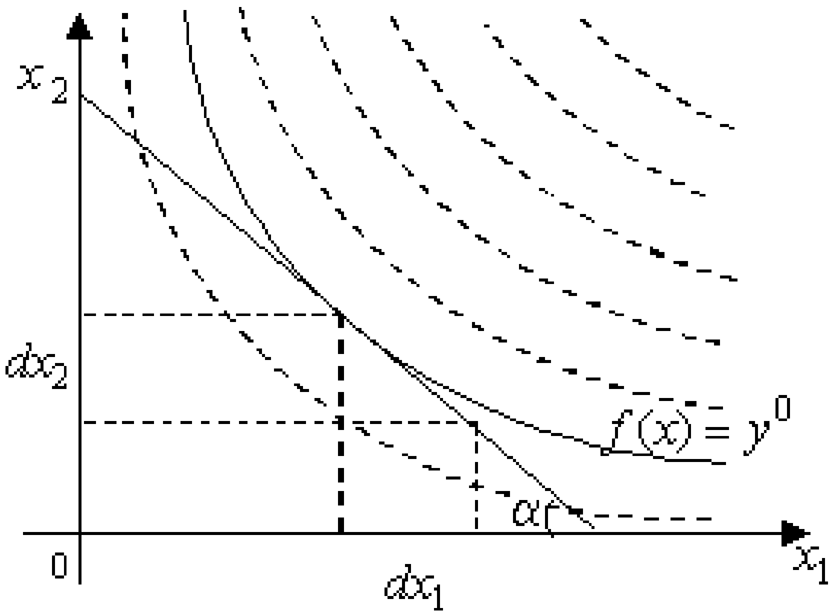

Рис. 3.5.1. Изокванта

Пусть производственная функция $y = f\left(x_1, x_2\right)$ дифференцируема по обеим переменным. Тогда вдоль изокванты $f\left(x_1, x_2\right) = const$ имеем: $\left.\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2\right)\right|_{изокв.} = 0$.

Отсюда найдем отношение:

$$\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{изокв.} = -\frac{\partial f/\partial x_1}{\partial f/\partial x_2}. \qquad (3.5.1)$$

Следовательно, наклон $tg\alpha = \frac{dx_2}{dx_1}$ изокванты производственной функции выражается через отношение предельных продуктов. Дальнейшие геометрические построения, связанные с изоквантами, проведем на рис.3.5.2.

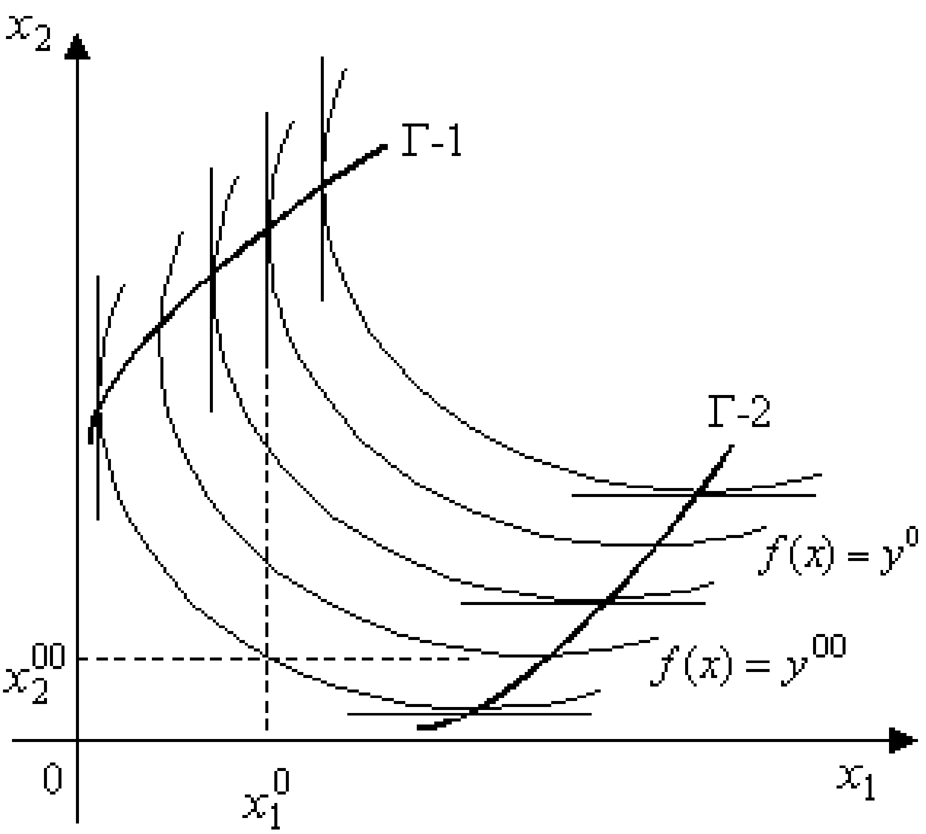

Рис. 3.5.2. Особая область

Имея карту изоквант $\left\{x \in R_+^2 / f\left(x_1, x_2\right) = y^0, \quad y^0 = const\right\}$, проведем касательные к каждой из них с наклоном $\frac{dx_2}{dx_1} = \infty$ ($\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$). Эти касательные проходят параллельно к оси Ox_2 ($\alpha = 90^0$). Так как изокванты заполняют все пространство R_+^2, то, соединяя точки касания, получим непрерывную линию Г-1, которую назовем границей первого ресурса.

Аналогично проведем касательные к изоквантам с наклоном $\frac{dx_2}{dx_1} = 0$ ($\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$). Эти касательные проходят параллельно к оси Ox_1 ($\alpha = 0^0$). Соединяя точки касания, получаем непрерывную линию Г-2, которую назовем границей второго ресурса.

Построенная область в R_+^2, заключенная между линиями Г-1 и Г-2, называется **особой областью**. Она характеризуется неотрицательностью обоих предельных продуктов $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, так как для $0^0 \le \alpha \le 90^0$ $tg\alpha$ неположителен. Можно показать, что в особой области справедливы и неравенства (3.1.3), т.е. это та область затрат, где выполнен закон убывающей доходности. Пользуясь условиями (3.1.3), можно доказать, что особая область является выпуклым подмножеством пространства затрат. Граница первого ресурса Г-1 является геометрическим местом минимального количества затрат x_1, необходимых для производства различных уровней выпуска. Например, для производства продукции в размере y^0 необходимо затратить первый ресурс как минимум в x_1^0 единиц (рис.3.5.2). Точно также, граница второго ресурса Г-2 является геометрическим местом минимального количества затрат x_2, необходимых для производства различных уровней выпуска. Например, чтобы произвести продукцию в количестве y^{00}, необходимо как минимум x_2^{00} единиц второго ресурса.

Изокванта является одним из основных инструментов графического анализа технической результативности производства.

Поскольку производственная функция выражает зависимость между количеством используемых факторов и **максимально** возможным выпуском, то изокванта представляет множество сочетаний **минимально** необходимых объемов труда и капитала для заданного выпуска. Это означает, что изокванта не может иметь положительный наклон.

Изокванта свидетельствует о взаимозаменяемости факторов производства: заданный объем продукции можно эффективно произвести при различных сочетаниях труда и капитала (различной капиталовооруженности труда). В какой пропорции один из факторов можно заменить другим, зависит от исходной капиталовооруженности труда.

Определение 3.5.2. Изокостой называется геометрическое место векторов затрат, для которых издержки производства постоянны: $\left\{ x \in R_+^m \middle| \sum_{k=1}^{m} w_k x_k = const \right\}$.

Для двухфакторного производства изокоста задается уравнением $C(x_1, x_2) = w_1 x_1 + w_2 x_2 = const$. Так как цены w_1 и w_2 предполагаются заданными, дифференцируя последнее уравнение, имеем:

$$\left. \frac{dx_2}{dx_1} \right|_{изокос.} = -\frac{w_1}{w_2}. \tag{3.5.2}$$

Следовательно, для разных $const$ изокосты являются параллельными линиями с одним и тем же наклоном $tg\alpha = \frac{dx_2}{dx_1}$ (рис.3.5.3) и этот наклон выражается через отношение цен на ресурсы.

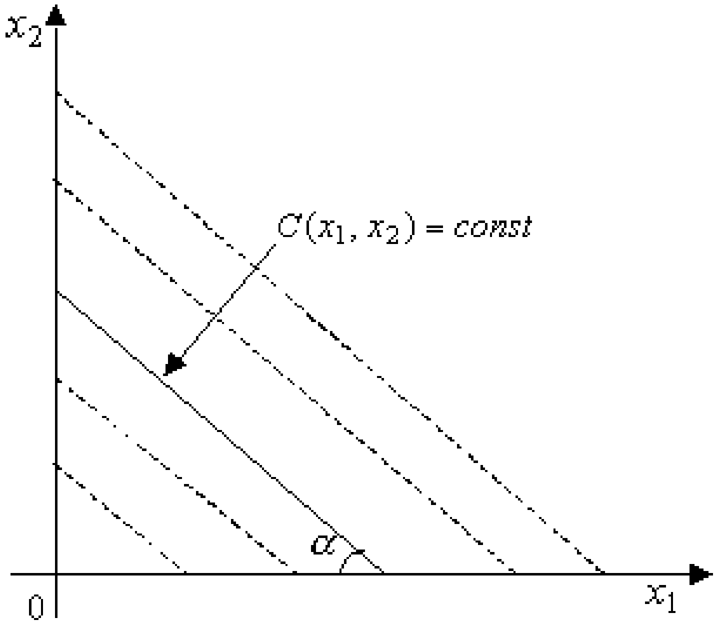

Рис. 3.5.3. Изокосты

Сравнивая (3.5.1) и (3.5.2) , видим:

$$\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{изокв.} = \left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{изокос.} . \qquad (3.5.3)$$

Покажем, что равенство (3.5.3) достигается именно в точке x^*, являющейся решением задачи (3.4.1). Из (3.4.5) в случае двухфакторного производства имеем:

$$p\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{x=x^*} = w_1, \quad p\left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{x=x^*} = w_2.$$

Разделяя первое равенство на второе почленно, получаем

$$\left.\frac{\partial f/\partial x_1}{\partial f/\partial x_2}\right|_{x=x^*} = \frac{w_1}{w_2}.$$

Сопоставляя полученное равенство с (3.5.1) и (3.5.2), приходим к выводу: совпадение наклонов изокванты и изокосты имеет место в одной и той же точке x^*, являющейся оптимальным решением задачи (3.4.1), и эта точка, конечно, является точкой касания изокосты и изокванты (рис.3.5.4).

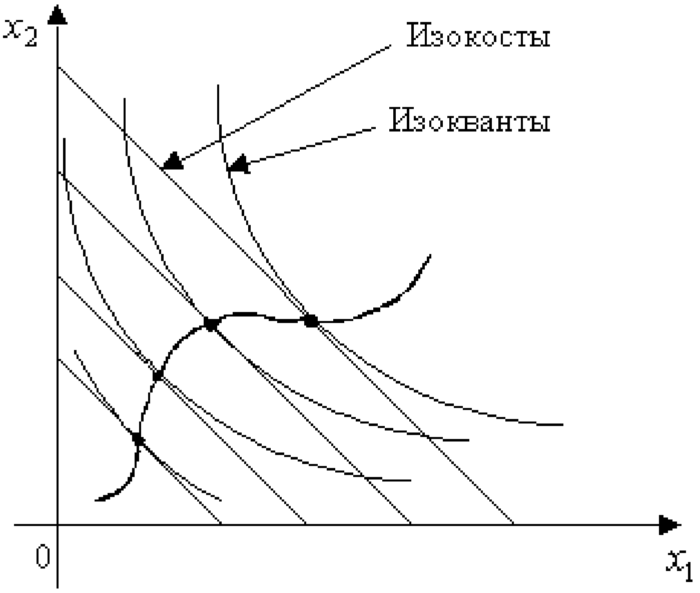

Рис. 3.5.4. Долгосрочный путь расширения

Так как изокванты и изокосты заполняют все пространство затрат, соединяя все точки их касания, получаем непрерывную линию. Как легко понять, эта линия расположена в особой области, изображенной на рисунке 3.5.2, и потому чем дальше на ней расположена точка x^*, тем больше соответствующие значения затрат и выпуска. Поэтому данная линия называется **долгосрочным путем расширения** производства. Таким образом, геометрическое место пересечений изоквант и изокост показывает оптимальный сценарий развития производства. Этот путь описывает, с одной стороны, затраты, максимизирующие прибыль фирмы, при любом фиксированном уровне издержек, с другой - затраты, минимизирующие издержки, при заданном уровне выпуска. Поэтому долгосрочный путь расширения иногда называют **кривой издержек**, имея в виду, что вдоль нее оптимальные издержки выражаются как функция от выпуска.

В случае краткосрочной задачи (3.4.2) (или (3.4.3)) необходимый и достаточный признак оптимальности будет иметь более сложный, чем (3.4.5), вид из-за наличия ограничений. Однако и в этом случае при выполнении условий (3.1.2)-(3.1.3) краткосрочный путь расширения, как геометрическое место векторов оптимальных затрат, будет проходить в особой области.

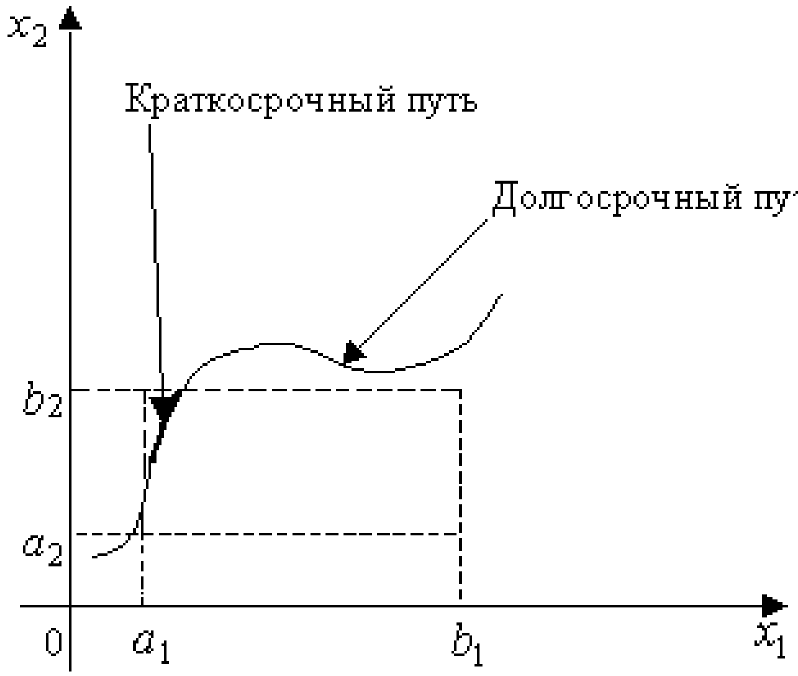

Рис. 3.5.5. Краткосрочный путь

Причем можно высказать гипотезу о том, что если множество допустимых затрат X (см. задачу (3.4.2)) краткосрочной задачи имеет непустое пересечение с долгосрочным путем расширения, то краткосрочный путь расширения совпадает (в области X) с долгосрочным путем, т.е. он является частью долгосрочного пути расширения. Если эта гипотеза верна, то для каждой точки $x^* = \left(x_1^*, x_2^*\right)$ на краткосрочном пути существует такое постоянное число c^*, что изокоста $w_1x_1 + w_2x_2 = c^*$ и изокванта $f\left(x_1, x_2\right) = \left(x_1^*, x_2^*\right)$ из долгосрочной задачи будут иметь точкой касания точку x^*. Последнее означает совпадение краткосрочной и долгосрочной кривых издержек, что говорит о согласованности краткосрочной задачи фирмы с ее долгосрочными планами.

3.6. Связь предельной нормы замещения ресурсов с рыночными ценами на них и содержательная интерпретация

Исследуем чувствительность оптимальных затрат и выпуска к изменениям параметров $p, w_1, ..., w_m$. Для этого сделаем дополнительное к условиям предыдущего параграфа предположение: функции x_k^* и f^* дифференцируемы по всем переменным.

Подставляя в систему (3.4.5) функции спроса (3.4.6) и присоединяя к ней выражение для функции предложения (3.4.7), получим замкнутую тождественную систему из $m+1$ уравнения с $m+1$ параметром:

$$\begin{cases} f^*\left(p, w_1, ..., w_m\right) = f\left(x^*\left(p, w_1, ..., w_m\right)\right), \\ p\dfrac{\partial f}{\partial x_k}\left(x^*\left(p, w_1, ..., w_m\right)\right) = w_k, \; k = 1, ..., m. \end{cases} \tag{3.6.1}$$

Так как чувствительность оптимальных затрат и выпуска по ценам оценивается величинами $\dfrac{\partial x_k^*}{\partial p}, \dfrac{\partial x_k^*}{\partial w_i}, \;\; k, i = 1, .., m, \;\; \dfrac{\partial f^*}{\partial p}, \dfrac{\partial f^*}{\partial w_k}, \;\; k = 1, ..., m,$ то систему (3.6.1) будем дифференцировать по переменным $p, w_1, ..., w_m$. Первые $2m$ частных производных характеризуют изменение оптимального объема затрат при изменении цены готовой продукции и цен ресурсов; вторая группа частных производных показывает реакцию объема оптимального выпуска на колебание тех же цен.

Ниже мы будем пользоваться следующими обозначениями:

$$\frac{\partial x^*}{\partial p} = \left(\frac{\partial x_1^*}{\partial p}, ..., \frac{\partial x_m^*}{\partial p}\right), \;\; \frac{\partial f^*}{\partial w} = \left(\frac{\partial f^*}{\partial w_1}, ..., \frac{\partial f^*}{\partial w_m}\right), \;\; \frac{\partial x^*}{\partial w} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1^*}{\partial w_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_1^*}{\partial w_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_m^*}{\partial w_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_m^*}{\partial w_m} \end{pmatrix}.$$

Будем считать выполненными условия (3.1.2)-(3.1.3), т.е. анализ чувствительности затрат и выпуска проведем в пределах особой области, изображенной на рисунке 3.5.2.

Сначала продифференцируем обе части системы (3.6.1) по p:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f^*}{\partial p} = \sum\limits_{k=1}^{m} \dfrac{\partial f}{\partial x_k} \cdot \dfrac{\partial x_k^*}{\partial p}, \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_k} + p\sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i} \cdot \dfrac{\partial x_i^*}{\partial p} = 0, \quad k = 1,\dots,m. \end{cases}$$

Применяя обозначение матрицы Гессе $\nabla^2 f = \left\| \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i} \right\|_{m\times m}$ перепишем эту систему в векторной форме:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f^*}{\partial p} = \dfrac{\partial f}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x^*}{\partial p} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} + p\nabla^2 f \cdot \dfrac{\partial x^*}{\partial p} = 0. \end{cases} \tag{3.6.2}$$

Продифференцируем теперь систему (3.6.1) по w_k:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f^*}{\partial w_k} = \sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \dfrac{\partial x_i^*}{\partial w_k}, \quad k = 1,\dots,m, \\ p\sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_i} \cdot \dfrac{\partial x_i^*}{\partial w_k} = \delta_{kl}, \quad l = 1,\dots,m, \end{cases}$$

где δ_{kl} - использованный ранее в пункте 2.9 главы 2 символ Кронекера.

Применяя обозначение единичной матрицы $E_m = \left\| \delta_{kl} \right\|_{m\times m} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ перепишем эту систему в векторной форме:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f^*}{\partial w} = \dfrac{\partial f}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x^*}{\partial w}, \\ p \cdot \nabla^2 f \cdot \dfrac{\partial x^*}{\partial w} = E_m. \end{cases} \tag{3.6.3}$$

Запишем теперь системы (3.6.2) и (3.6.3) в матричных формах:

$$\begin{pmatrix} -1 & \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \Theta & p\nabla^2 f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^*}{\partial p} \\ \dfrac{\partial x^*}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \left(-\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^T \end{pmatrix}, \tag{3.6.4}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \Theta & p\nabla^2 f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\dfrac{\partial f^*}{\partial w}\right)^T \\ \dfrac{\partial x^*}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Theta \\ E_m \end{pmatrix}. \tag{3.6.5}$$

Здесь через Θ обозначен m-мерный вектор-столбец с нулевыми элементами, $(\ )^T$ - знак транспонирования.

Объединяя уравнения (3.6.4) и (3.6.5) в одно, получим **основное матричное уравнение теории производства (фирмы):**

$$\begin{pmatrix} -1 & \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \Theta & p\nabla^2 f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^*}{\partial p} & \left(\dfrac{\partial f^*}{\partial w}\right)^T \\ \dfrac{\partial x^*}{\partial p} & \dfrac{\partial x^*}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \Theta \\ \left(-\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^T & E_m \end{pmatrix}. \tag{3.6.6}$$

Это есть система из $(m+1)^2$ уравнений с $(m+1)^2$ неизвестными показателями сравнительной статики.

Разрешая ее относительно показателей сравнительной статики, перепишем: $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^*}{\partial p} & \left(\dfrac{\partial f^*}{\partial w}\right)^T \\ \dfrac{\partial x^*}{\partial p} & \dfrac{\partial x^*}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \Theta & p\nabla^2 f \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & \Theta \\ \left(-\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^T & E_m \end{pmatrix}$. Выполним матричное умножение в последнем уравнении и найдем решение. Запишем его в векторной форме:

$$\frac{\partial f^*}{\partial p} = -\frac{1}{p}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\nabla^2 f^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T, \tag{3.6.7}$$

$$\frac{\partial x^*}{\partial p} = -\frac{1}{p}\nabla^2 f^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T, \qquad (3.6.8)$$

$$\left(\frac{\partial f^*}{\partial w}\right)^T = -\frac{1}{p}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\nabla^2 f^{-1}, \qquad (3.6.9)$$

$$\frac{\partial x^*}{\partial w} = \frac{1}{p}\nabla^2 f^{-1}, \qquad (3.6.10)$$

где $\nabla^2 f^{-1}$ - обратная матрица Гессе.

Как и в теории потребления (см. пункт 2.9 главы 2), при помощи показателей сравнительной статики можно классифицировать типы затрат.

Определение 3.6.1. Затраты (ресурсы) вида k называются **нормальными**, если $\frac{\partial x_k^*}{\partial w_k} < 0$; **ценными** (**малоценными**), если $\frac{\partial x_k^*}{\partial p} > 0$ $\left(\frac{\partial x_k^*}{\partial p} < 0\right)$. Два вида затрат i и k называются **взаимозаменяемыми** (**взаимодополняемыми**), если $\frac{\partial x_i^*}{\partial w_k} > 0,\ \frac{\partial x_i^*}{\partial w_k} > 0\ (\frac{\partial x_i^*}{\partial w_k} < 0,\ \frac{\partial x_i^*}{\partial w_k} < 0)$.

Неравенство $\frac{\partial x_k^*}{\partial w_k} > 0$ означает возрастание затрат k-го вида с ростом их цены. Такие затраты исключены, так как напрямую уменьшают прибыль фирмы (см. целевые функции задач (3.4.1) - (3.4.3)). Поэтому кривая спроса на затраты всегда является убывающей и, в отличие от теории потребления, здесь нет товаров Гиффина.

Некоторые выводы относительно чувствительности затрат и выпуска по ценам, к которым можно прийти, анализируя соотношения (3.6.7)-(3.6.10), таковы:

1) повышение цены на выпускаемый продукт всегда приводит к увеличению объема выпуска;
2) повышение цены на выпускаемый продукт влечет повышение спроса на некоторые виды затрат;

3) в рамках закона об убывающей доходности нельзя обходиться исключительно малоценными затратами;
4) повышение платы за малоценные ресурсы ведет к увеличению объема выпуска;
5) повышение платы за некоторый вид затрат приводит к увеличению объема выпуска;
6) повышение цен на затраты приводит к сокращению спроса на них;
7) чувствительность объема затрат k-го вида на изменение цен затрат i-го вида такая же, что и чувствительность объема затрат i-го вида на изменение цен затрат k-го вида;
8) для взаимозаменяемых затрат повышение (понижение) цены одной из них влечет увеличение (уменьшение) спроса на другую;
9) для взаимодополняющих друг друга затрат повышение (понижение) цены одной из них влечет уменьшение (увеличение) спроса на другую.

Обоснуем кратко эти утверждения, часть которых подтверждает "очевидные истины".

Первый вывод следует из неравенства

$$\frac{\partial f^*}{\partial p} > 0, \tag{3.6.11}$$

которое немедленно вытекает из (3.6.7) с учетом отрицательной определенности обратной матрицы Гессе ($\nabla^2 f^{-1}$) и неотрицательности предельного продукта ($\frac{\partial f}{\partial x_k}$) в особой области. Данное неравенство подтверждает факт о том, что кривая предложения продукта является возрастающей.

Неравенство (3.6.11) с учетом (3.6.1) перепишется как

$$\frac{\partial f^*}{\partial p} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x^*}{\partial p} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i^*}{\partial w_k} > 0, \quad k = 1, \ldots, m. \tag{3.6.12}$$

Такое соотношение возможно только в том случае, если для некоторых k будет иметь место неравенство

$$\frac{\partial x^*}{\partial p} > 0, \qquad (3.6.13)$$

которое и является обоснованием второго вывода.

Сравнивая (3.6.8) и (3.6.9) , можно заметить, что

$$\frac{\partial f^*}{\partial w_k} = -\frac{\partial x_k^*}{\partial p}, \quad k = 1,...,m. \qquad (3.6.14)$$

Поэтому вывод 2) можно уточнить так: повышение цены выпускаемой продукции приводит к повышению спроса на затраты k-го вида всегда, если и только если увеличение платы за этот вид затрат приводит к сокращению объема выпуска.

Действительно, с учетом (3.6.14) неравенство (3.6.13) влечет неравенство $\frac{\partial f^*}{\partial w_k} < 0$. В частности, если x_k - малоценные затраты (т.е. $\frac{\partial x_k^*}{\partial p} < 0$), то увеличение цены w_k приведет к увеличению выпуска (т.е. $\frac{\partial f^*}{\partial w_k} > 0$), о чем и утверждает вывод 4.

Обоснованность вывода 3) следует также из неравенства (3.6.14).

Из соотношений (3.6.11), (3.6.12) и (3.6.14) получаем: $0 < \frac{\partial f^*}{\partial p} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x^*}{\partial p} = -\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f^*}{\partial w} = -\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial f^*}{\partial w_k}$. Поэтому в особой области для некоторых видов затрат выполнено неравенство $\frac{\partial f^*}{\partial w_k} < 0$. Оно доказывает справедливость вывода 5).

Соотношение (3.6.10) указывает на симметричность матрицы $\frac{\partial x^*}{\partial w}$, причем, как и правая часть этого уравнения, она отрицательно определена.

Поэтому ее диагональные элементы отрицательны: $\dfrac{\partial x_k^*}{\partial w_k} < 0, \quad k = 1,...,m.$

Отсюда следует вывод 6).

Симметричность матрицы $\dfrac{\partial x^*}{\partial w}$ означает, что $\dfrac{\partial x_k^*}{\partial w_i} = \dfrac{\partial x_i^*}{\partial w_k}, \quad k, i = 1,...,m.$

Содержательный смысл этого равенства приведен в выводе 7).

Выводы 8) и 9) вытекают непосредственно из определений взаимозаменяемых и взаимодополняемых затрат.