Глава 2: Ценообразование и распределение ресурсов

2.1. Общая схема взаимодействия на рынке производителей и потребителей. Цена как обратная связь и движущая сила в этой схеме

Первичными элементами экономики являются товары и участники. Говорят, что имеются **экономические товары** и **участники экономики**, если установлено, что эти товары обмениваются один на другой в результате соглашений, в которых заинтересованными сторонами выступают участники. То есть экономический товар — это именно то, что является предметом сделок в данном обществе — труд, капитал, ресурсы, продукты потребления, услуги, информация, ценные бумаги и т.д. Например, общественные посты, при продажности официальных учреждений, являются экономическими товарами. Становясь наследственными или замещаемыми по конкурсу, они перестают быть экономическими товарами. Следовательно, экономический товар определяется способностью к обмену.

Имеется один особый товар, являющийся эквивалентом при обмене — **деньги**. Деньги служат средством обращения, мерой стоимости, средством сбережения. Денежный эквивалент единицы товара называется его **ценой**.

Основными участниками экономики являются **домашние хозяйства**, **фирмы** и **государство**.

Домашние хозяйства, с одной стороны, являются **потребителями** конечного продукта, с другой - владельцами ресурсов (земельных, трудовых и др.). Продавая свои ресурсы домашние хозяйства получают доход, а также участвуют в распределении прибыли производственных предприятий (например, посредством ценных бумаг).

Фирмы, с одной стороны, являются **производителями** товаров и услуг, с другой — потребителями ресурсов. Фирмы получают доход от продажи своих товаров и услуг и являются владельцами производственных мощностей.

Государство выполняет важные законодательные, управленческие и регулирующие функции. С точки зрения движения товаров в экономике государство является как продавцом (государственных предприятий, природных ресурсов, ценных бумаг и др.), так и покупателем (государственных закупок продовольствия, вооружения, сырья и др.).

Таким образом, большинство участников экономики действует одновременно: как покупатель и продавец. Взаимодействуя между собой, покупатели и продавцы образуют рынок. Основными рыночными понятиями являются **спрос**, **предложение**, **конкуренция** и **цена**.

Спрос можно определить как платежеспособную потребность в том или ином товаре. Спрос на товар зависит от его цены (т.е. спрос является функцией от цены). Как правило, при высокой цене приобретается меньшее количество товара (обратная связь (см.рис.2.1.1)). В экономике этот факт называется **законом спроса**.

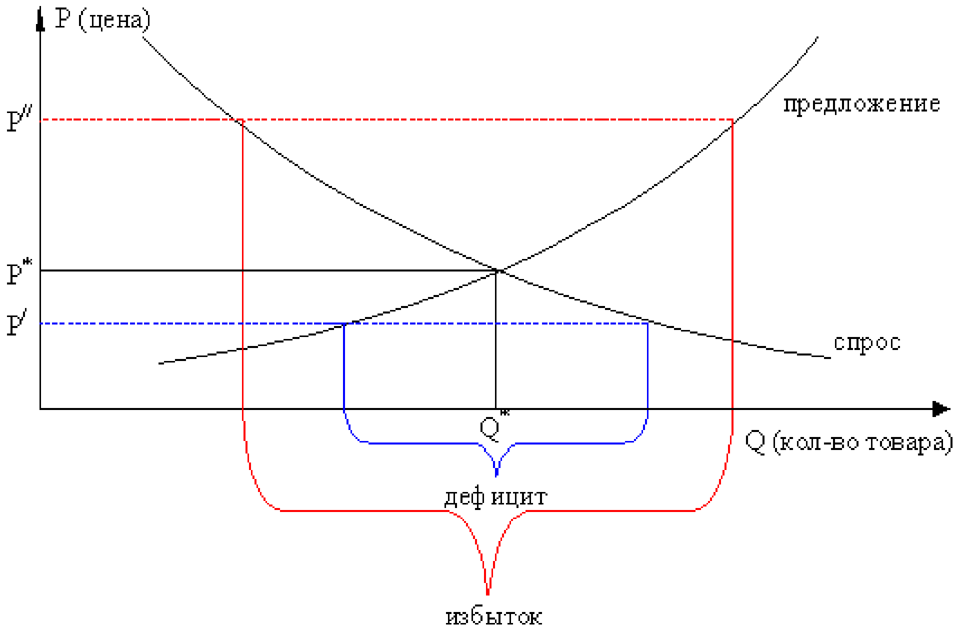

Рис.2.1.1. Кривая спроса и предложения и точка равновесия

Предложение — это то количество товара, которое производители могут и хотят произвести. Предложение также зависит от цены товара (прямая связь (см.рис.2.1.1)). В экономике этот факт называется **законом предложения**.

Если вся масса товара, произведенная в расчете на данную цену, может быть по этой цене продана полностью, то говорят, что по данному виду товара в экономике существует **равновесие**. Иными словами, существует такая цена, для которой спрос на данный товар равен предложению. Такая цена называется равновесной (см.рис.2.1.1).

Если существует равновесие по всем товарам (и услугам), то говорят о **экономическом равновесии**. Равновесие - это то состояние, к которому стремится экономика, так как в этом случае нет ни дефицита, ни избытка, т.е. удовлетворены интересы всех участников экономики. Возможность существования экономического равновесия находится в обратной зависимости от многообразия (видов) товаров. Чем больше видов, тем сложнее взаимосвязи между ними (например, очевидно, что спрос на чай зависит от наличия кофе, соков, молока и т.д.). Поэтому для получения реальных результатов в математических моделях рассматриваются только основные виды товаров (например, товары, составляющие потребительскую корзину).

Рынки можно классифицировать по различным признакам. В математических моделях часто применяется классификация по числу участников:

покупатели / продавцы	Один	Несколько	Много
Один	**сделка**	**олигопсония**	**монополия**
Несколько	**о л и г о п о л и я**		
Много	**монопсония**	**олигопсония**	**совершенная конкуренция**

Рис. 2.1.2. Виды рынков (по числу участников)

В настоящее время можно говорить о том, что для каждого из перечисленных рынков существует своя математическая теория.

2.2. Динамика цен и регулирование равновесной цены на рынке с совершенной конкуренцией

Участниками рынка могут быть любые заинтересованные в купле-продаже товаров стороны: индивидуальные потребители, отдельные фирмы, совокупность потребителей некоторого региона, совокупность предприятий данной отрасли, финансовые организации, концерны, целые страны. Одним словом, классификация участников рынка зависит от характера решаемой задачи.

В классических моделях в качестве участников рынка рассматриваются производители товаров (фирмы) и их потребители. Первые выходят на рынок для реализации своей продукции, а вторые - для приобретения необходимых им товаров потребления. Поэтому для классификации участников рынка больше подходят названия **продавцов** и **покупателей**. Тем более, что потребители могут выступать в роли продавцов принадлежащих им первичных факторов (труд, земельные участки и др.); точно так же производители выступают в роли покупателей производственных ресурсов.

Таким образом, любой участник рынка выступает одновременно как продавец и покупатель. Мы можем сказать, что относительно любого товара на рынке существует три группы участников: те, кто продает этот товар, те, кто покупает его, и те, кому этот товар безразличен. Если продавцов (покупателей) данного товара много, то между ними возникает конкуренция. Поэтому рынки можно классифицировать по характеру конкуренции (см. рис. 2.1.2).

В обычном понимании рынок - это то место, где продается и покупается большое разнообразие товаров. В случае необходимости рынок можно сегментировать по видам товаров и при соответствующих ограничениях (например, с учетом имеющихся связей с рынками других товаров) изучить рынок интересующего товара отдельно.

Будем рассматривать многотоварный рынок с большим числом участников. Поэтому будем предполагать, что относительно каждого товара имеется большое число продавцов и покупателей. В связи с этим возникает необходимость уточнения ранее введенных понятий спроса и предложения, а также условий конкуренции.

Прежде всего, нам надо выяснить и формализовать понятия совокупного (рыночного) спроса и совокупного (рыночного) предложения относительно имеющихся на рынке товаров.

Под предъявителем рыночного спроса мы понимаем **совокупного потребителя**, как одного из двух участников рынка.

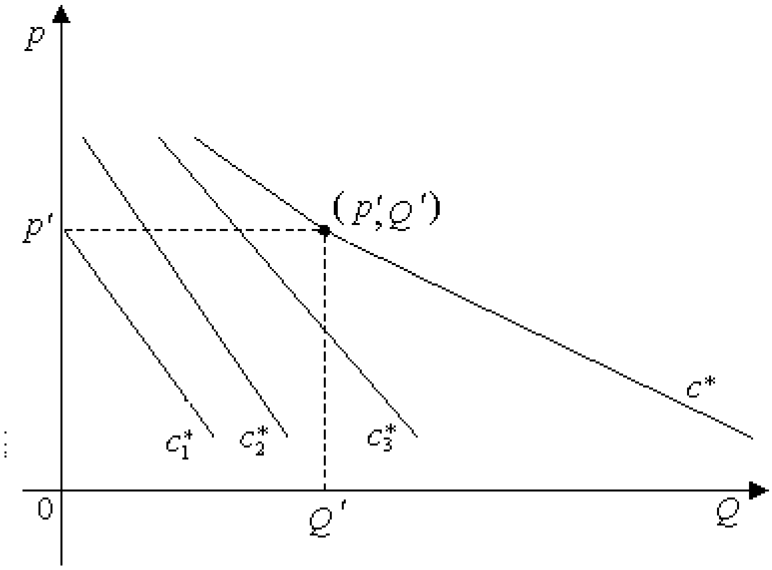

Рис. 2.2.1. Кривая рыночного спроса

А именно, покажем, что кривую рыночного спроса (c^*) можно получить как сумму кривых индивидуального спроса (c_i^*) всех потребителей.

На рис. 2.2.1 показаны линейные графики спроса c_1^*, c_2^*, c_3^* для трех потребителей. Любая точка на кривой рыночного спроса получается для данной цены как сумма по горизонтальной оси координат соответствующих этой же цене точек всех индивидуальных кривых спроса. Аналитически это означает, что $c^* = \sum_{i \in S} c_i^*$. При этом рыночная кривая спроса не обязательно имеет такой же вид, что и индивидуальные кривые.

Как видно из рис. 2.2.1, даже для линейных кривых индивидуального спроса рыночная кривая получается нелинейной (изгиб в точке $\left(p', Q'\right)$. Изменению подвергаются и другие свойства индивидуальных кривых, в частности, такие характеристики, как эластичность спроса, предельная норма замещения и др.

Как и в случае с потребителями, путем суммирования кривых предложения отдельных фирм можно получить понятие кривой рыночного предложения.

Итак, можно найти приемлемые для экономической практики способы формализации понятий рыночного спроса и рыночного предложения, это дает право оперировать понятиями совокупного спроса и совокупного предложения.

Необходимо обратить внимание, что совокупный спрос (совокупное предложение) не является результатом кооперирования между потребителями (производителями). Более того, кооперация вообще исключена условиями совершенной конкуренции (см. ниже). Совокупный спрос характеризует суммарную потребность общества в товарах, а совокупное предложение - суммарные возможности производителей этих товаров.

Перейдем к уточнению понятия совершенной конкуренции. В экономической теории принято считать, что рынок с совершенной конкуренцией определяется следующими признаками:

1) наличие большого числа независимых друг от друга фирм, производящих одни и те же товары; при этом доля выпуска каждой фирмы незначительна по сравнению с суммарным выпуском всех фирм;
2) наличие большого числа независимых друг от друга потребителей данных товаров; при этом доход отдельного потребителя незначителен по сравнению с суммарным доходом всех потребителей;

3) полная свобода действий всех участников рынка за исключением соглашений по контролю над рынком;
4) однородность товаров на рынке и их мобильность;
5) совершенное знание рынка (конъюнктуры товаров, их цен) покупателями и продавцами.

При выполнении первых двух условий отдельные покупатели и продавцы воспринимают рыночные цены как заданные извне, не имея возможности на них повлиять. Условие 3) обеспечивает наличие конкуренции, как среди покупателей, так и среди продавцов. Требование 4) обуславливает возможность существования единой цены на товар; условие 5) необходимо для принятия оптимального решения участниками рынка по поводу купли и продажи товаров.

Имея в виду влияние этих условий, экономическое равновесие часто называют **конкурентным равновесием**. Условия совершенной конкуренции считаются наиболее выгодными для общества. Но, как легко догадаться, эти условия носят весьма идеализированный характер, т.е. в действительности невозможно точное выполнение всех этих условий. Поэтому понятие совершенной конкуренции имеет в известной степени абстрактный оттенок.

Отсюда вывод - рассматриваемая **модель Вальраса**, предполагающая совершенность конкуренции, описывает функционирование идеального рынка и имеет больше теоретическое, чем практическое значение. Сказанное не умаляет роли модели Вальраса как исходной точки для многих обобщений и модификаций.

Исходными концепциями модели Вальраса являются:

- дезагрегированность участников рынка: рассматриваются отдельные потребители и отдельные производители;
- совершенность конкуренции;
- общность равновесия.

Последняя концепция означает рассмотрение равновесия по всем товарам сразу, а не по отдельным товарам. Следовательно, в модели Вальраса вводится понятие общего равновесия (т.е. равновесия по всем товарам).

Будем предполагать, что на рынке продаются и покупаются товары двух видов: готовые товары, являющиеся продуктом производства (товары конечного потребления) и производственные ресурсы (первичные факторы производства). Поэтому будем рассматривать "расширенное" пространство товаров R^n, где n - число видов всех товаров. Компонентами вектора $x \in R^n$ являются как выпуски, так и затраты (первичные факторы). Для различения их, затраты снабжают отрицательным знаком (поэтому пишем R^n, а не R_+^n). Если $x \in R^n$ есть вектор чистого выпуска, то все его компоненты, соответствующие затратам, будут равны нулю; если $x \in R^n$ есть вектор только первичных факторов, то все его компоненты, соответствующие конечным продуктам, будут равны нулю.

Индексы (виды) товаров, как и раньше, будем обозначать буквой k ($k = 1,...n$), индексы потребителей - буквой i ($i = 1,...,l$) и индексы производителей - буквой j ($j = 1,...,m$). Через $p = \left(p_1,..., p_n\right)$ будем обозначать вектор цен товаров.

Выходя на рынок, каждый потребитель или производитель становится одновременно покупателем одних и продавцом других товаров. Потребитель, т.е. участник рынка, "непосредственно не занятый в производстве", может продавать имеющиеся в его распоряжении первичные факторы и покупает товары производителей. Производитель, т.е. участник рынка, "непосредственно занятый в производстве", продает свою готовую продукцию и покупает первичные факторы у потребителей.

Поэтому каждый потребитель i как участник рынка характеризуется тремя параметрами: начальным запасом товаров $b_i \in R^n$, функцией дохода

$K_i = K_i(p)$ и вектор-функцией спроса на продукты производства $D_i = D_i(p)$.

Каждый производитель j характеризуется двумя параметрами: вектор-функцией предложения готовой продукции $S_j = S_j(p)$ и вектор-функцией спроса на затраты $Z_j = Z_j(p)$. Однако в модели Вальраса применяется несколько обобщенная характеристика производителя - с помощью одного множества $Y_j \subset R^n$, трактуемого как множество его (оптимальных) производственных планов. На языке "затраты-выпуск" это множество можно определить следующим образом: $Y_j = \left\{ \left(z_j, s_j \right) \in R^{2n} / s_j = f\left(z_j \right) \right\}$, где f - производственная функция. Очевидно, $Y_j = Y_j(p)$.

С учетом всего вышесказанного, под математической моделью рынка будем понимать совокупность элементов:

$$\left\langle R^n, P, N, \left\{ b_i, K_i, D_i \right\}_{i=1}^{l}, \left\{ Y_j \right\}_{j=1}^{m} \right\rangle, \tag{2.2.1}$$

где $P \subset R_+^n$ - пространство цен товаров, N - множество всех участников рынка (N содержит $l+m$ элементов).

Без качественных потерь вместо (2.2.1), как модель рынка, можно рассматривать совокупность

$$\left\langle R^n, P, N, \left\{ b_i, K_i, D_i \right\}_{i=1}^{l}, \left\{ \left(S_j, Z_j \right) \right\}_{j=1}^{m} \right\rangle.$$

Во-первых, вектор $p = \left(p_1, ..., p_n \right) \in R_+^n$ содержит цены, как товаров конечного потребления, так и затрат. Причем цены меняются и меняются не по желанию отдельных участников рынка, а исключительно под воздействием совокупного спроса и совокупного предложения. Поэтому одним из ключевых является вопрос: существуют ли такие цены, которые устраивают как потребителей, так и производителей?

Исходя из технических соображений, будем предполагать, что пространство цен P включает в себя нуль пространства R^n, т.е. будем допускать существование нулевых цен.

Во-вторых, как уже говорилось выше, каждый участник рынка выступает в двух лицах: как покупатель и как продавец. Очевидно, число продавцов и покупателей для разных товаров будет разным. Поэтому числа и не следует ассоциировать с числом продавцов и покупателей.

В-третьих, доход каждого потребителя предполагается состоящим из двух компонент: 1) выручки от продажи принадлежащего ему начального запаса товаров (b_i), 2) дохода, получаемого от его участия в прибыли производственного сектора (обозначим V_i), например, посредством приобретения ценных бумаг и других видов инвестиционной и трудовой деятельности. Таким образом, мы предполагаем, что

$$K_i(p) = \langle p, b_i \rangle + V_i(p). \tag{2.2.2}$$

В модели Вальраса считается, что весь доход производственного сектора полностью распределяется между потребителями:

$$\sum_{i=1}^{l} V_i(p) = \left\langle p, \sum_{j=1}^{m} \xi_j \right\rangle,$$

где $\xi_j \in Y_j$, а скалярное произведение справа, с учетом структуры векторов ξ_j, трактуется как прибыль всего производственного сектора. Заметим, что суммирование векторов ξ_j осуществляется покомпонентно.

В-четвертых, функции спроса D_i, Z_j и предложения S_j предполагаются векторными и множественнозначными. В модели Вальраса понятия совокупных спроса и предложения формализуются следующим образом.

Определение 2.2.1. Функцией совокупного (рыночного) спроса называется множественнозначная функция

$$D(p)=\sum_{i=1}^{l} D_i(p). \qquad (2.2.3)$$

Функцией совокупного (рыночного) предложения называется множественнозначная функция

$$S(p)=\sum_{i=1}^{l} b_i+\sum_{j=1}^{m} Y_j(p). \qquad (2.2.4)$$

При таком определении смысл совокупного спроса полностью соответствует способу формирования рыночного спроса на основе решений оптимизационных задач индивидуальных потребителей. Конкретно, это есть сумма индивидуальных функций спроса потребителей. Определение же функции совокупного предложения требует дополнительного пояснения.

С этой целью введем обозначения:

$$b=\sum_{i=1}^{l} b_i,\ Y=\sum_{j=1}^{m} Y_j,\ \xi=\sum_{j=1}^{m} \xi_j.$$

По определению, любой элемент множества Y можно представить вектором ξ, где $\xi_j \in Y_j$. Так как Y_j есть множество оптимальных планов производителя j , то компонентами вектора ξ_j являются оптимальные объемы выпуска и затрат, и все они составляют решение одной и той же оптимизационной задачи. Таким образом, часть компонент вектора ξ, как и векторов ξ_j, отражает предложение готовых продуктов, а часть - спрос на первичные факторы. Поэтому вектор $\xi \in Y$ нельзя называть однозначно предложением. В то же время, вектор $(b+\xi)\in S(p)$ может быть интерпретирован как совокупное предложение, так как часть компонент вектора ξ, соответствующая спросу, "компенсируется" вектором b. Покажем, что для любого p $D(p)\subset R^n$ и $S(p)\subset R^n$, т.е. областью изменения совокупных функций является то же самое пространство, что и для индивидуальных функций.

Рассмотрим сначала двух потребителей. Для любого $x \in D_2(p)$ множество $D_1(p)+x$ образуется смещением множества $D_1(p)$ в направлении вектора x на длину этого вектора (рис. 2.2.2).

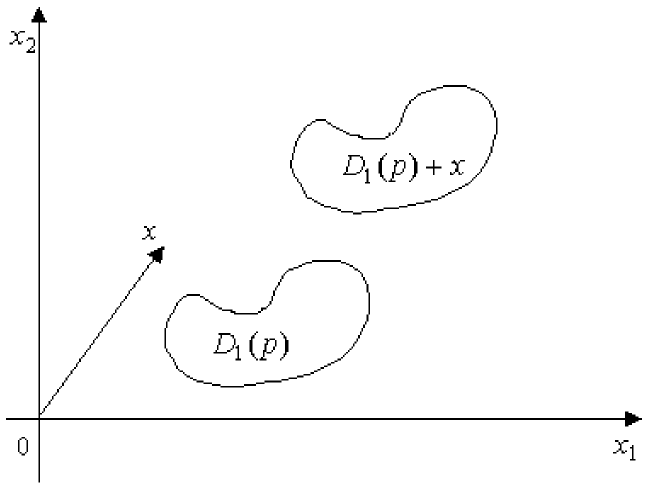

Рис. 2.2.2. Сумма вектора и множества

Поэтому $D_1(p)+x \subset R^n$ и $D_1(p)+D_2(p)=\{D_1(p)+x \,/\, x \in D_2(p)\} \subset R^n$.

Рассмотрим трех потребителей. Для любого $x \in D_3(p)$ множество $(D_1(p)+D_2(p))+x$ образуется смещением множества $D_1(p)+D_2(p)$в направлении вектора x на длину этого вектора.

Поэтому $(D_1(p)+D_2(p))+x \subset R^n$ и $D_1(p)+D_2(p)+D_3(p)=$ $=\{(D_1(p)+D_2(p))+x \,/\, x \in D_3(p)\} \subset R^n$.

Продолжая эти рассуждения, получаем $\sum_{i=1}^{l} D_i(p)=\left\{\sum_{i=1}^{l-1} D_i(p)+x \,/\, x \in D_l(p)\right\} \subset R^n$.

Точно так же устанавливается включение $Y \subset R^n$. Так как $b_i \in R^n$ и потому $b \in R^n$, то множество $b+Y$ образуется смещением множества Y в направлении вектора b на длину этого вектора. Поэтому $S(p)=b+Y \subset R^n$.

Формализовав понятия функций совокупных спроса и предложения, модель рынка (2.2.1) мы можем представить совокупностью вида

$$\left\langle R^n, P, D(p), S(p) \right\rangle. \qquad (2.2.5)$$

Любой вектор $x \in D(p)$ называется совокупным спросом (соответствующим вектору цен p); любой вектор $y \in S(p)$- совокупным предложением (соответствующим вектору цен p). Эти векторы являются (оптимальными) реакциями совокупного покупателя и совокупного продавца на установившийся на рынке вектор цен. Если при этом $x > y$, то на рынке возникает дефицит товаров, а при $x < y$ появляются их излишки. Такие цены не могут считаться удовлетворительными, так как в одном случае ущемлены интересы покупателей, а в другом - продавцов. Очевидно, наилучшим вариантом для экономики является равенство $x = y$. Этот идеальный случай на практике не всегда имеет место. Поэтому целесообразно как-то его ослабить. В модели Вальраса допускается наиболее "гуманный" с точки зрения интересов потребителей вариант обобщения понятия экономического равновесия.

Определение 2.2.2. Набор векторов $\left(x^*, y^*, p^*\right)$ называется **конкурентным равновесием** на рынке (2.2.5), если $p^* \in P$,

$$x^* \in D\left(p^*\right), y^* \in S\left(p^*\right), \qquad (2.2.6)$$

$$x^* \leq y^*, \qquad (2.2.7)$$

$$\left\langle p^*, x^* \right\rangle = \left\langle p^*, y^* \right\rangle. \qquad (2.2.8)$$

В этом случае p^* называется **равновесным вектором цен**.

По определению функций совокупных спроса и предложения, из включений (2.2.6) следует

$$x^* = \sum_{i=1}^{l} x_i^*, \text{ где } \quad x_i^* \in D_i\left(p^*\right), i = 1, \ldots, l;$$

$$y^* = \sum_{i=1}^{l} b_i + \sum_{j=1}^{m} \xi_i^*, \text{ где } \quad \xi_i^* \in Y_i\left(p^*\right), j = 1, \ldots, m,$$

т.е. совокупные спрос и предложение формируются как суммарные величины индивидуальных спросов потребителей и индивидуальных предложений производителей. Поэтому в развернутом виде условия равновесия (2.2.6)-(2.2.8) можно переписать так:

$$x_i^* \in D_i\left(p^*\right), i=1,\dots,l\,; \tag{2.2.9}$$

$$\xi_j^* \in Y_j\left(p^*\right),\ j=1,\dots,m\,; \tag{2.2.10}$$

$$\sum_{i=1}^{l} x_i^* \le \sum_{i=1}^{l} b_i + \sum_{j=1}^{m} \xi_j^m\,; \tag{2.2.11}$$

$$\left\langle p^*, \sum_{i=1}^{l} x_i^* \right\rangle = \left\langle p^*, \left(\sum_{i=1}^{l} b_i + \sum_{j=1}^{m} \xi_j^m \right) \right\rangle. \tag{2.2.12}$$

Экономическое содержание условий, определяющих конкурентное равновесие на рынке (2.2.5), таково. Условие (2.2.6) показывает, что на цены p^* каждый потребитель и каждый производитель реагирует наилучшим образом. Это наглядно видно из соотношений (2.2.9) и (2.2.10). Условие (2.2.7) отслеживает, чтобы совокупное предложение не было меньше совокупного спроса. Условие (2.2.8) требует, чтобы в стоимостном выражении совокупный спрос равнялся совокупному предложению. Условие (2.2.8) автоматически выполняется в том случае, если в (2.2.7) имеет место строгое равенство. В этом случае равновесие будет задано соотношениями:

$$x^* \in D\left(p^*\right), y^* \in S\left(p^*\right), x^* = y^*, \tag{2.2.13}$$

т.е. нужность в условии (2.2.8) отпадает.

Предположим, что для некоторого товара в (2.2.7) имеет место строгое неравенство: $\left(x^*\right)^k < \left(y^*\right)^k$. Тогда в стоимостном выражении получаем неравенство $\left\langle p^*, x^* \right\rangle < \left\langle p^*, y^* \right\rangle$, не соответствующее условию (2.2.8). Величина $\varepsilon^k = \left(y^*\right)^k - \left(x^*\right)^k > 0$ называется **излишком**.

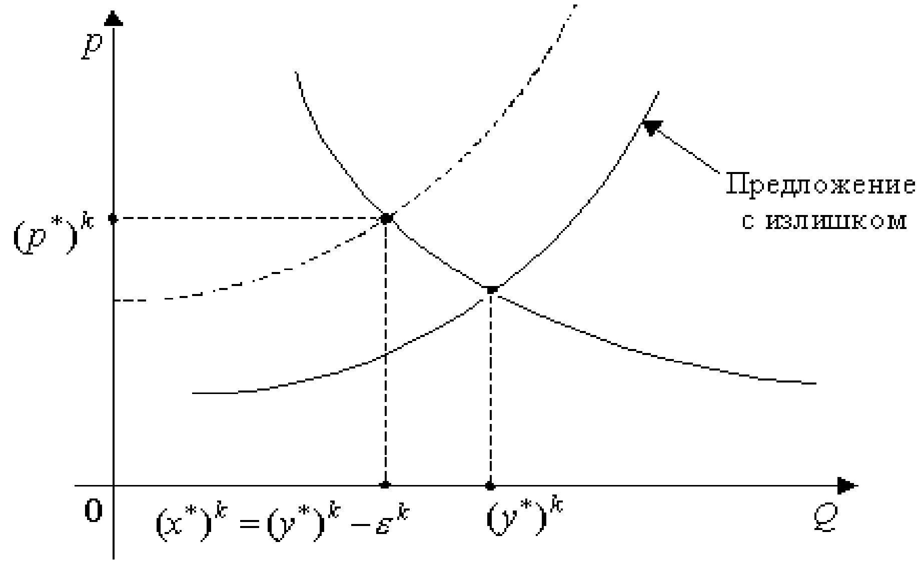

Рис. 2.2.3. Предложение с излишком

Согласно закона предложения, в случае появления излишка цена товара должна быть снижена (см.рис. 2.2.3). Но это приведет к изменению "равновесной" цены $\left(p^*\right)^k$. Как выйти из этого противоречия?

Очевидно, $\sum_{r=1}^{n}\left(p^*\right)^r\left(x^*\right)^r = \sum_{\substack{r=1 \\ (r\neq k)}}^{n}\left(p^*\right)^r\left(x^*\right)^r + \left(p^*\right)^k\left[\left(y^*\right)^k - \varepsilon^k\right]$.

Отсюда видно, для восстановления условия (2.2.8) нужно "ликвидировать" излишек. С учетом знака ε^k это возможно только при $\left(p^*\right)^k = 0$.

Но тогда $\left(p^*\right)^k\left(x^*\right)^k = 0$ и $\left(p^*\right)^k\left[\left(y^*\right)^k - \varepsilon^k\right] = 0$, т.е. товар k вообще исключается из обращения на рынке.

Обоснование справедливости (2.2.8) тем, что "поставляемый сверх имеющегося спроса товар получает нулевую цену" экономически осмыслено, но не поддается адекватной формализации.

Действительно, для фиксированного числа $\left(p^*\right)^k$ неравенство $\left(p^*\right)^k\left(x^*\right)^k<\left(p^*\right)^k\left(y^*\right)^k=\left(p^*\right)^k\left[\left(x^*\right)^k+\varepsilon^k\right]$ несовместимо с равенством $\left(p^*\right)^k\left(x^*\right)^k=\left(p^*\right)^k\left(x^*\right)^k+0\cdot\varepsilon^k$.

Таким образом, формальный выход из рассматриваемой ситуации состоит в том, чтобы считать цену перепроизводимого товара равной нулю. Чисто теоретически этот прием состоятелен, так как не приводит в дальнейшем к противоречиям.

В то же время, следует признать отсутствие экономически осмысленного объяснения существования товара с нулевой ценой. Объявление такого товара "свободным" представляется несостоятельным. Строго говоря, в экономике нет свободных товаров, любой побочный продукт может найти применение, т.е. имеет ненулевую цену. Трудно согласиться и с "хорошо известной экономистам модификацией закона спроса и предложения о существовании перепроизводимых товаров с нулевой ценой", поскольку в случае перепроизводства "спрашиваемая" часть этого товара продается по ненулевой цене. Для экономики существование излишек так же плохо, как и существование дефицита. Все это говорит в пользу целесообразности определения равновесия в виде (2.2.13) .

Итак, модель рынка по Вальрасу построена. Как видим, центральное место в ней занимает понятие конкурентного равновесия. Привлекательность равновесия как состояния рынка (и экономики в целом), заключается в возможности реализации всех произведенных товаров и в удовлетворении спроса всех потребителей. Процесс формирования рыночных цен условно можно сравнить с работой некоторого алгоритма (автомата), состоящего из четырех блоков (рис. 2.2.4).

В первом блоке P формируется вектор цен. Информация о векторе p поступает в блоки D и S, в которых формируются соответственно множества $D(p)$ и $S(p)$, содержание которых, в свою очередь, передается в блок R. В блоке R осуществляется попарное сравнение элементов $x \in D(p)$, $y \in S(p)$. Если существует пара или пары (x, y), для которых выполняется условие $x = y$ (или условия (2.2.7), (2.2.8)), то процесс заканчивается. В противном случае цены p отвергаются, о чем поступает сигнал в блок P, где формируются новые цены. Процедура продолжается до тех пор, пока не будет найден равновесный вектор цен.

Утвердительный ответ на этот вопрос связан с разрешением двух важных проблем:

1) установление факта существования конкурентного равновесия в модели Вальраса;
2) разработка сходящейся к равновесной цене вычислительной процедуры (метода) формирования рыночных цен.

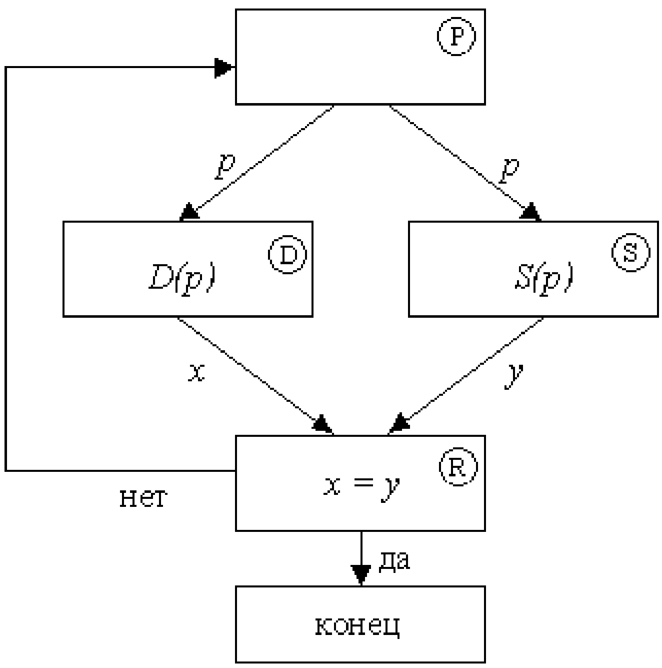

Рис. 2.2.4. Схема формирования равновесных цен

Существование равновесия в модели Вальраса не установлено. Причина заключается в уровне формализма этой модели - она весьма абстрактна. Конкретизируя определения составляющих ее элементов и уточняя их функциональные свойства, можно получить разные модификации модели

Вальраса. Наиболее известная из них носит название модели Эрроу-Дебре, по именам ее создателей. Структурно модель Эрроу-Дебре весьма близка к модели Вальраса. От последней она отличается конкретизацией природы происхождения функций предложения и спроса, а также механизма образования дохода потребителя. В модели Эрроу-Дебре существует конкурентное равновесие.

Проблема разработки численных методов вычисления равновесных цен связана с установлением необходимых и достаточных признаков равновесия. Нужно, чтобы они были конструктивными, т.е. порождали сходящуюся итеративную процедуру, каковой является, например, паутинообразная модель (см. рис. 2.4.2).

2.3. Монопольные цены и монопольные объемы продаж.

Познакомившись в предыдущем параграфе с условиями совершенной конкуренции, можно заметить, что определяющим признаком такого рынка является наличие большого числа производителей и потребителей одних и тех же товаров и, как следствие, отсутствие влияния с их стороны на рыночные цены этих товаров. Нарушение данного условия приводит к понятию **рынка несовершенной конкуренции**. В этом смысле крайние положения занимают монополия и монопсония, а промежуточные - олигополия и олигопсония (см. рис. 2.1.2).

Суть несовершенной конкуренции в том, что либо продавцы, либо покупатели захватывают рыночную власть над ценообразованием. Проанализируем механизм ценообразования в монополии. Так как монополист является единственным производителем товара, исходя из кривой спроса, он самостоятельно определяет объем продаж и цену товара (рис.2.3.1).

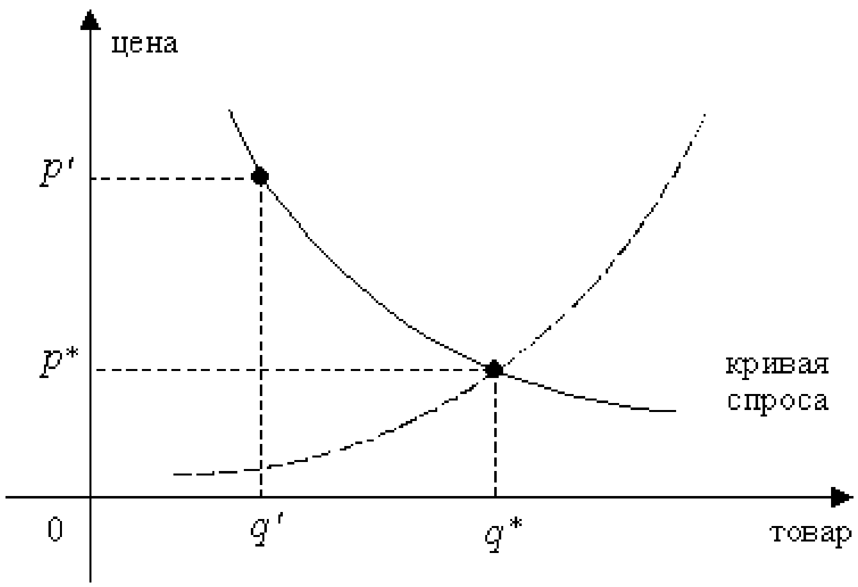

Рис. 2.3.1. Выбор монополиста

Предположим, что в условиях совершенной конкуренции равновесие достигается в точке $\left(p^*, q^*\right)$, а доход данной фирмы, как участника рынка совершенной конкуренции, есть $\alpha \cdot p^* \cdot q^*$ ($\alpha < 1$). Будучи монополистом, при том же уровне спроса эта фирма добьется данного уровня дохода при меньшем выпуске (q') за счет более высокой цены (p'). Именно в этом заключается приоритетность положения монополиста.

До какого уровня монополист будет повышать цену товара и снижать объем продаж, чтобы получить максимальную прибыль с учетом издержек на производство товара?

Кривая спроса и оценка собственных издержек являются главными ориентирами для фирмы-монополиста при принятии экономического решения. Она принимает решение относительно объема выпуска (или продажи) товара, а его цена определяется с помощью кривой спроса (см. рис. 2.3.1). Следовательно, в условиях монополии цена (q) является функцией от выпуска ($p = p(q)$) и, располагая информацией о спросе, фирма может добиться получения максимальной прибыли.

Монополист может увеличить прибыль двумя путями: либо за счет повышения цены на товар, не изменяя при этом объема выпуска, либо за счет сокращения объема выпуска (снизив тем самым издержки на производство), не изменяя цену товара. Каково же оптимальное действие монополиста?

Чтобы ответить на этот вопрос, обратимся опять к конкурентному рынку и рассмотрим **долгосрочную задачу** фирмы.

Не умаляя общности, будем считать, что фирма производит один вид продукта, используя m видов ресурсов. Эти величины, как и ранее, будем обозначать соответственно через y и $x_1,...,x_m$. Предположим, что "технология" производства достаточно хорошо изучена, т.е. известна производственная функция f: $y = f(x) = f(x_1,...,x_m)$.

Обозначим через p цену выпускаемой продукции, а через w_k - цену k-го вида ресурса, $k = 1,...,m$. Эти цены порождают понятия дохода (выручки от продажи произведенной продукции) и издержек. Доход от реализации готовой продукции $y = f(x)$ определяется формулой $p \cdot f(x)$. Издержки, соответствующие вектору затрат $x = (x_1, ..., x_m)$, т.е. общие выплаты за все виды затрат, равны $w_1 x_1 + ... + w_m x_m$. Эти издержки называются **переменными издержками**, так как они связаны (меняются вместе) с объемом выпуска. Кроме того, фирма несет и **постоянные издержки** (обозначим c_0), связанные с расходами на содержание фирмы. Поэтому общие издержки (обозначим C) складываются из двух компонент: $C(x) = \sum_{k=1}^{m} w_k x_k + c_0$. Поскольку постоянные издержки не связаны с выпуском, то при составлении краткосрочных моделей мы их учитывать не будем. Тогда общий результат производства (x, y) (затраты-выпуск) можно оценить величиной $p \cdot f(x) - \sum_{k=1}^{m} w_k x_k$. Если эта величина положительна, то пара (x, y) приносит прибыль, в противном случае - убыток. На долгосрочный период фирма может планировать любые затраты, поэтому **модель задачи** имеет вид:

$$\begin{aligned} &P(x) = p \cdot f(x) - \langle w, x \rangle \to \max, \\ &x \geq 0, \end{aligned} \qquad (2.3.1)$$

где $w = (w_1, ..., w_m)$ - вектор цен затрат.

Так как мы хотим узнать именно об оптимальном объеме производства, переформулируем эту задачу на языке выпуска.

Обозначим доход как функцию от выпуска: $p \cdot f(x) = p \cdot q = R(q)$. Так как издержки фирмы зависят от объема производства, они также являются функциями от выпуска: $\langle w, x \rangle = C(f(x)) = C(q)$.

Теперь задачу (2.3.1) можно записать так:

$$P(q) = R(q) - C(q) \to \max. \qquad (2.3.2)$$

Условие первого порядка для максимизации прибыли $P(q)$ есть $\frac{dP}{dq}=0$ или $\frac{dR}{dq}=\frac{dC}{dq}$. Следовательно, чтобы максимизировать прибыль, фирма должна достичь такого объема выпуска, при котором предельный доход равен предельным издержкам. Далее, учитывая тот факт, что $\frac{dR}{dq}=p$, получаем $p^*=\frac{dC}{dq}$, т.е. **равновесная цена**, если она существует, **должна равняться предельным издержкам**:

$$\frac{dR}{dq}=p^*=\frac{dC}{dq}. \qquad (2.3.3)$$

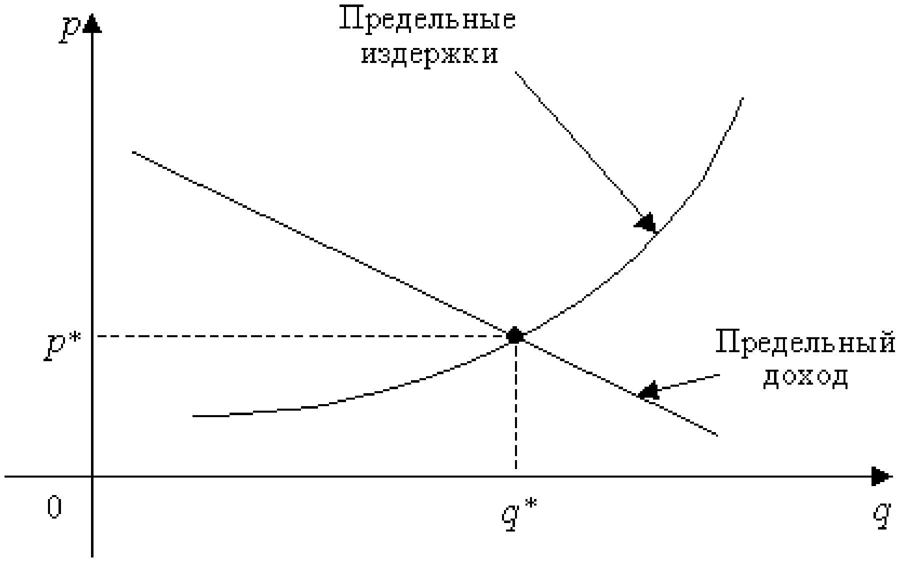

Рис. 2.3.2. Иллюстрация равновесной цены

Графическая иллюстрация равенства (2.3.3) показана на рис.2.3.2, где предельные издержки есть возрастающая функция от объема производства, а предельный доход (цена) - убывающая функция того же аргумента.

Вернемся к монополии и проверим, будет ли цена, максимизирующая прибыль монополиста, подчиняться закону (2.3.3)?

В монополии $p=p(q)$, поэтому

$$R(q) = p(q) \cdot q. \tag{2.3.4}$$

Далее без потери общности будем считать $q > 0$.

Вычислим предельный доход

$$\frac{dR(q)}{dq} = \frac{dp}{dq} \cdot q + p. \tag{2.3.5}$$

Заметим, что и в монополии цена убывает с ростом объема продаж, потому что фирма снижает цену, чтобы продать больше продукции.

Поэтому $\frac{dp}{dq} < 0$ и из (2.3.5) следует $\frac{dR(q)}{dq} < p$.

Как видим, в случае монополии предельный доход меньше цены товара.

Проанализируем теперь издержки монополиста. Как и на конкурентном рынке, цены затрат являются функциями от объема затрат, т.е. $w_j = w_j\left(x_j\right), \quad j = 1,\dots,m$. Поэтому издержки на факторы производства выражаются как

$$C_j\left(x_j\right) = w_j\left(x_j\right) \cdot x_j. \tag{2.3.6}$$

Будем предполагать, что $x_j > 0$ для всех $j = 1,\dots,m$.

Вычислим предельные издержки:

$$\frac{dC_j\left(x_j\right)}{dx_j} = \frac{dw_j}{dx_j} \cdot x_j + w_j. \tag{2.3.7}$$

По рыночным законам фирма может покупать большее количество данного фактора производства, только предложив более высокую плату.

Поэтому $\frac{dw_j}{dx_j} > 0$. Тогда из (2.3.7) следует

$$\frac{dC_j\left(x_j\right)}{dx_j} > w_j, \quad j = 1,\dots,m.$$

Таким образом, в случае монополии предельные издержки на факторы производства оказываются больше их цен.

Подставляя (2.3.4) и (2.3.6) в (2.3.2), получим оптимизационную задачу монополиста:

$$P(x,q) = p(q)\cdot q - \sum_{j=1}^{m} w_j\left(x_j\right)\cdot x_j \to \max, \tag{2.3.8}$$

при ограничениях $q = f\left(x_1,...,x_m\right)$.

Подчеркнем еще раз, в отличие от задачи (2.3.2) фирмы на конкурентном рынке, в условиях задачи монополиста (2.3.8) все цены зависят от объемов продуктов.

Максимум функции прибыли P в задаче (2.3.8) вычисляется по $m+1$ переменной $(x_1,...,x_m,q)$.

Поэтому составим функцию Лагранжа $L\left(x,q,\lambda\right)=P\left(x,q\right)+\lambda\left(f\left(x\right)-q\right)$, где λ - множитель Лагранжа.

Выпишем необходимые условия оптимальности точки $\left(x,q\right)$:

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dq}\cdot q+p-\lambda=0, \\ -\dfrac{dw_j}{dx_j}\cdot x_j-w_j+\lambda\dfrac{\partial f}{\partial x_j}=0, \quad j=1,...,m, \\ f\left(x_1,...,x_m\right)-q=0. \end{cases}$$

Отсюда имеем, в частности,

$$\lambda = p+\frac{dp}{dq}\cdot q, \tag{2.3.9}$$

$$\lambda\frac{\partial f}{\partial x_j} = w_j+\frac{dw_j}{dx_j}\cdot x_j,\ j=1,...,m. \tag{2.3.10}$$

Сумма, стоящая в правой части равенства (2.3.9), есть предельный доход (см. (2.3.5)), а сумма, стоящая в правой части (2.3.10), - предельные издержки по производственному фактору j-го вида (см. (2.3.7)). Поэтому величина, стоящая в левой части (2.3.10), представляет собой произведение предельного дохода (λ) на предельный продукт j-го вида затрат ($\frac{\partial f}{\partial x_j}$). Это произведение можно трактовать как предельный доход j-го вида затрат.

Исключая из системы необходимых условий множитель Лагранжа λ, получаем $\begin{cases} \left(p+\frac{dp}{dq}\cdot q\right)\frac{\partial f}{\partial x_j}=w_j+\frac{dw_j}{dx_j}\cdot x_j, \quad j=1,...,m, \\ f\left(x_1,...,x_m\right)=q. \end{cases}$

Пользуясь равенствами (2.3.5) и (2.3.7), перепишем эту систему в виде

$$\begin{cases} \frac{dR(q)}{dq}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_j}=\frac{dC_j\left(x_j\right)}{dx_j}, \quad j=1,...,m & (2.3.11) \\ f\left(x_1,...,x_m\right)=q. & (2.3.12) \end{cases}$$

Оценим отношение предельной стоимости затрат на предельный продукт $\frac{dC_j\left(x_j\right)}{dx_j}\Big/\frac{\partial f}{\partial x_j}$.

Во-первых, как следует из (2.3.11), эта величина для всех j одна и та же. Во-вторых, издержки можно представить как функцию от выпуска, т.е. $C_j=C_j\left(q\right)$. Поэтому, пользуясь равенством (2.3.12), можно формально написать $\frac{dC_j\left(x_j\right)}{dx_j}\Big/\frac{\partial f}{\partial x_j}=\frac{dC_j(q)}{dq}, \quad j=1,..,m.$

Так как эта величина одна и та же для всех j, то, опуская индекс, из системы (2.3.11)-(2.3.12) получаем

$$\frac{dR(q)}{dq}=\frac{dC(q)}{dq}. \qquad (2.3.13)$$

Следовательно, чтобы максимизировать прибыль, монополист должен достичь такого уровня выпуска, при котором предельный доход равен предельным издержкам.

Для монополиста мы получили такое же правило оптимального поведения, что и любая фирма в условиях конкурентного рынка. Однако в случае монополии $\dfrac{dR}{dq} = p + \dfrac{dp}{dq} \cdot q$ и поэтому оптимальная цена товара отличается от выражения (2.3.3) в сторону повышения. А именно, через предельный доход она выражается как

$$p^* = \frac{dR}{dq} - \frac{dp}{dq} \cdot q, \qquad (2.3.14)$$

а через предельные издержки –

$$p^* = \frac{dC_j\left(x_j\right)}{dx_j} \Bigg/ \frac{\partial f}{\partial x_j} - \frac{dp}{dq} \cdot q, \quad j = 1,..,m. \qquad (2.3.15)$$

2.4. Паутинообразная модель рыночного взаимодействия. Устойчивые и неустойчивые рыночные механизмы

Пусть цена товара фиксирована. Это положение соответствует условиям совершенной конкуренции, когда отдельные участники экономики не влияют на цену товара. Пусть имеет место равновесие: $c^*(p,K)=f^*(p,w_1,...,w_m)$, где c^* - совокупный спрос, f^* - совокупное предложение, p - цена товара, K - доход потребительского сектора, w_i - цены затрат. Формально это равновесие может быть нарушено либо по "воле" рынка, который распоряжается ценой товара, либо по воле покупателя (управляющего спросом, например, посредством изменения величины дохода) или производителя (управляющего предложением, например, посредством изменения объемов затрат). В первом случае будем говорить о ценовых причинах нарушения равновесия, во втором - о неценовых причинах.

Рассмотрим сначала неценовые причины (вызванные влиянием сезонности, моды, изменением экономической политики и т.д.). Предположим, что при неизменном предложении потребитель "сознательно" отклоняется от равновесия, увеличивая или уменьшая спрос: a) $\bar{c}>f^*$, b) $\bar{c}<f^*$. Если при фиксированном спросе от равновесия отклоняется производитель, то соответственно придем к одному из двух неравенств: c) $c^*>\bar{f}$, d) $c^*<\bar{f}$.

В этих соотношениях случаи a) и c) приводят к дефициту (см. рис. 2.1.1), т.е., в конечном счете, к повышению цены, что выгодно производителю и невыгодно потребителю. Следовательно, в случаях a) и c) неценовые причины вызывают изменение равновесной цены.

Случаи b) и d) приводят к излишкам (см. рис. 2.1.1), т.е., в конечном счете, к снижению цены, что выгодно потребителю и невыгодно производителю. Следовательно, в случаях b) и d) неценовые причины также вызывают изменение равновесной цены.

Исходя из таких рассуждений, можно было бы заключить, что потребителю выгодно отклонение от равновесия в сторону снижения спроса, а производителю - в сторону снижения предложения. Однако для достоверности таких утверждений нужно ответить на следующие вопросы. На сколько нужно уменьшить спрос, чтобы соответствующее снижение цены действительно было выгодно для потребителя, т.е. чтобы сэкономленные средства с остатком компенсировали ущерб от уменьшения спроса? Каким должен быть этот остаток? Аналогичные вопросы возникают и для определения конкретной выгоды производителя.

Очевидно, на эти вопросы можно ответить, применяя понятие предельной нормы замещения.

Как мы видим, по отношению к экономическому равновесию однозначно нельзя утверждать о его устойчивости против отклонения. Но зато эти рассуждения помогают обнаружить устойчивость другого характера - тенденцию экономического равновесия к устойчивости против колебания цены, какой бы причиной оно ни было вызвано. Поясним это положение.

Будем исходить из того факта, что экономическое равновесие может быть нарушено как по ценовым, так и по неценовым причинам. Пусть на уровне цен p^* имеет место равновесие $c^*(p^*,\cdot)=f^*(p^*,\cdot)$ (точки здесь заменяют прочие, в частности, неценовые, переменные). Допустим, что по какой-то неценовой причине повысился спрос до уровня Q''.

Как видно из рис. 2.4.1 , спрос Q'' соответствует цене $p'<p^*$, так что

$$c^*(p^*,\cdot)=Q''>Q^*,$$

$$f^*(p^*,\cdot)=Q'<Q^*,$$

т.е. спрос стал больше предложения. Цене p' соответствуют две точки: (p',Q') и (p',Q''). Естественно поставить вопрос: может ли цена p' быть равновесной, иначе, может ли одна из этих двух точек быть равновесным состоянием? Обратимся к точке (p',Q') (относительно точки (p',Q'') рассуждения зеркально аналогичны).

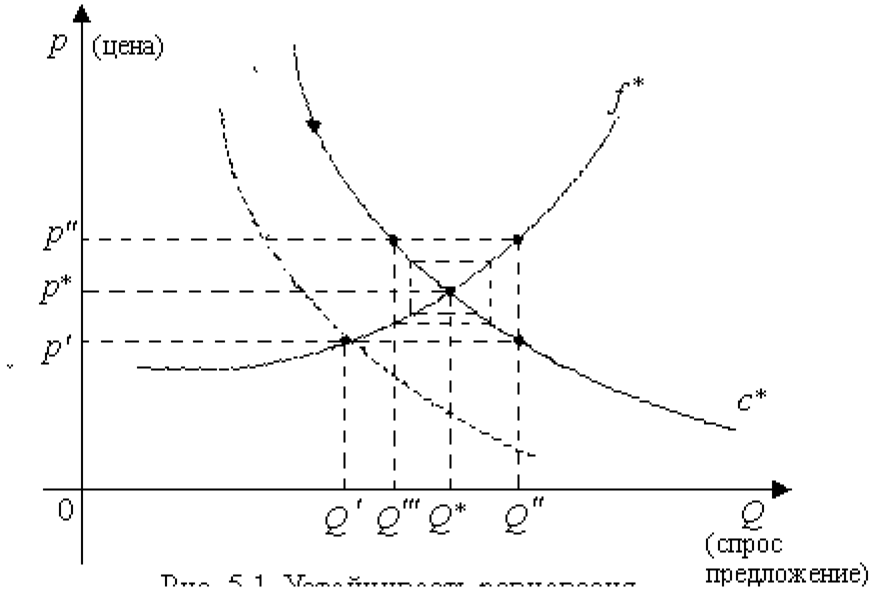

Рис. 2.4.1. Устойчивость равновесия против колебания цен

Для того чтобы точка (p',Q') оказалась равновесной, кривая спроса должна сместиться и пройти через эту точку. Когда это возможно? Формально, тогда, когда выполняется равенство $c^*(p',\bullet)=f^*(p',\bullet)$. Содержательно, бюджет потребителя должен уменьшиться ровно на величину $p^*Q^*-p'Q'$, и тогда бюджетная линия в пространстве товаров параллельно сместится от точки Q^* до точки Q'. Такое изменение ситуации приведет к уменьшению дохода производителя ($p'Q'<p^*Q^*$), и оно вызвано двумя причинами: снижением цены ($p'<p^*$) и выпуска ($Q'<Q^*$). Что может противопоставить этому производитель? При данных неизменных технологических условиях - ничего, так как нежелание снизить цену своего товара или объема выпуска приведет к еще худшему результату. Таким образом, неценовые причины могут привести к переходу в новое состояние равновесия, и это свидетельствует о неустойчивости равновесия против неценовых возмущений в экономике.

Обсудим теперь ценовую причину. Пусть цена товара упала до величины $p' < p^*$. Как видно из рис. 2.4.1, при этой цене спрос превышает предложение ($Q'' > Q'$), что влечет повышение цены товара. Но до какого уровня? Если предложение подтягивается до нового уровня спроса, т.е. до величины Q'', то, согласно кривой предложения, цена должна повышаться до величины p''. Но такой цене соответствует спрос $Q''' < Q''$. Продолжая эти рассуждения, можно заметить, что цена последовательно приближается к равновесному значению p^*, а спрос и предложение сходятся к общему (равновесному) значению Q^*. Здесь описана идея процедуры рыночного регулирования цены "невидимой рукой Адама Смита". По расположению вспомогательных линий на графике эту процедуру называют паутинообразной моделью регулирования цены товара.

Аналогичную картину можно получить при исходном предположении о повышении цены над p^*.

В результате мы можем сделать вывод о том, что экономическое равновесие устойчиво против ценовых возмущений.

Паутинообразная модель описывает приспособление цены во времени к вариациям спроса и предложения. Опишем ее детально на примере линейных функций.

Задача 2.4.1. Для рынка одного товара вывести формулу паутинообразного регулирования цены при условии, что функции спроса и предложения линейно зависят от цены, и предложение реагирует на изменение спроса с временным лагом (с опозданием на некоторый промежуток времени).

Решение. Линейность функций спроса и предложения означает представимость их в виде: $c^*(p) = -ap + b, \quad f^*(p) = cp + d, \quad a, b, c, d > 0$.

Пусть $a > c$, т.е. наклон кривой спроса больше, чем наклон кривой предложения. Для отражения последовательного изменения значений, величины c^*, f^* и p снабдим индексом времени t: c_t^*, f_t^*, p_t. Моменты изменения их значений (моменты регулирования) обозначим через $t_1, t_2, ...$ Для простоты положим $t_k - t_{k-1} = 1$, т.е. $t = 0, 1, 2...$

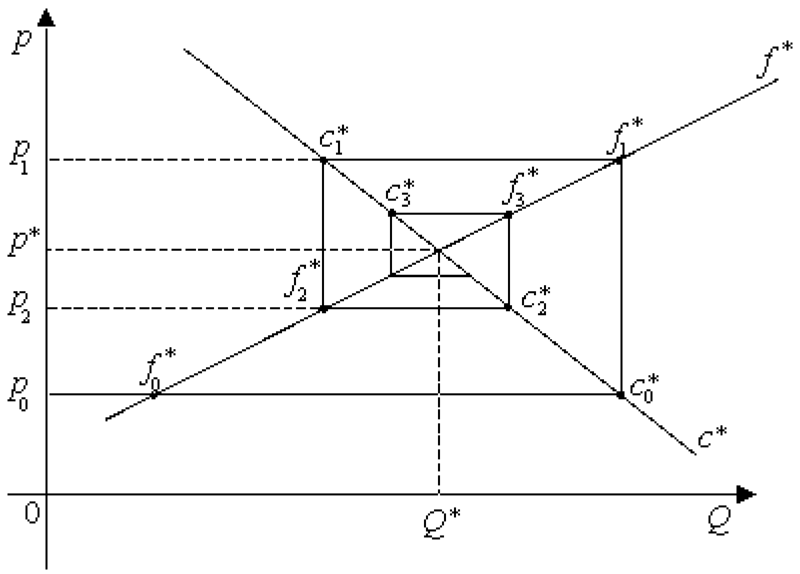

Рис. 2.4.2. Паутинообразная модель

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ спрос c_0^* соответствует уровню цены p_0 (см. рис. 2.4.2) и превышает предложение, т.е. $c_0^* > f_0^*$. Предложение подтягивается к уровню c_0^* к моменту $t = 1$ $f_1^* = c_0^*$ и соответствует уровню цены $p_1 > p_0$. Но этой цене в момент $t = 1$ соответствует другой уровень спроса $c_1^* < f_1^*$, который вынуждает цену уменьшиться до уровня $p_2 < p_1$. Далее предложение снижается до уровня c_1^* к моменту $t = 2$ $f_2^* = c_1^*$. И т.д.

Продолжая эти построения, мы приходим к общей закономерности: $f_{t+1}^* = c_t^*$ или $cp_{t+1} + d = -ap_t + b$.

Отсюда получаем искомую рекуррентную формулу приспособления цены к уровням спроса и предложения:

$$p_{t+1} = -\frac{a}{c} p_t + \frac{b-d}{c}, \quad t = 0, 1, 2, ... \qquad (2.4.1)$$

Зная "начальную" цену p_0, по формуле (2.4.1) можно вычислить цену товара на любом шаге приближения к равновесному значению p^*.

Заметим, когда $a < c$, т.е. наклон кривой спроса меньше, чем наклон кривой предложения, процедура расходится.

Процесс последовательного приближения к равновесной цене называется **регулированием цен**. Кто и с какой целью регулирует цены? Ответ заключается в том, что, благодаря законам спроса и предложения, в условиях конкуренции рынок сам приспосабливает цены к вариациям спроса и предложения во времени. Выше была рассмотрена "геометрическая" картина такого приспособления. Теперь познакомимся с аналитическими формулами регулирования для численного вычисления равновесных цен.

Итеративный процесс поиска равновесных цен должен обладать свойством сходимости, т.е., в конечном счете, должен привести к искомым ценам с любой предзаданной точностью. В этом случае процесс регулирования цен (или собственно конкурентное равновесие) называется **устойчивым**.

Таким образом, задача регулирования цен преследует цель определения условий, заставляющих цены, как функций времени, сходиться к равновесным значениям. Математически эта задача сводится к нахождению условий устойчивости решений специально построенных рекуррентных по времени уравнений. Такое уравнение называется **динамической моделью** регулирования цен. Эта модель может быть как непрерывной, так и дискретной. В первом случае, на основе предположения о непрерывном изменении цен, модель выражается с помощью дифференциальных уравнений. Во втором случае предполагается дискретный характер изменения цен, т.е. фиксируется изменение цен в отдельные моменты времени (или через определенные промежутки времени). Поэтому модель регулирования цен имеет вид разностных уравнений. Непрерывные модели предпочтительны в теоретическом плане. Их преимущество состоит в возможности применения удобного аппарата дифференцирования. Мы будем рассматривать только дискретный случай, наиболее понятный с точки зрения практического восприятия.

Перейдем к конкретным построениям. Для определенности процесс регулирования рассмотрим в модели Эрроу-Дебре. Предварительно уточним некоторые предпосылки и ряд дополнительных сведений.

Во-первых, цены будем снабжать параметром времени t: $p_k\left(t\right)$ - цена k -го товара в момент t.

Во-вторых, будем предполагать дискретное изменение времени, т.е. будем рассматривать отдельные моменты времени $t_1, t_2, \ldots$ Причем для упрощения формул будем считать, что $t_{r+1} - t_r = 1$. Это дает возможность вместо последовательности $t_r, t_{r+1}, \ldots$ рассматривать последовательность моментов $t, t+1, \ldots$, начиная с $t = 0$.

В-третьих, вместо пространства товаров R^n будем рассматривать пространство R^{n+1}, где дополнительная $n+1$ - ая координата соответствует особому виду товара - "деньгам". Таким образом, размерность всех векторов спроса и предложения будет равна $n+1$. Вектор цен, соответственно, будет задан в пространстве R_+^{n+1}. Причем дополнительная $n+1$ -ая компонента p_0 будет интерпретироваться как "цена денег".

Для некоторого вектора цен $S(p_r)$ и соответствующих ему векторов совокупного спроса $x(p) \in D(p)$ и совокупного предложения $y(p) \in S(p)$ обозначим

$$F(p) = x(p) - y(p). \qquad (2.4.2)$$

Величина $F(p)$ имеет смысл избыточного спроса при ценах p (противоположная величина $E(p) = -F(p) = y(p) - x(p)$ имеет смысл избыточного предложения). Рассматривая эту величину для всех $S(p_r)$, мы можем говорить о функции избыточного спроса F, определенной на множестве P.

Для равновесного вектора цен имеем (см. (2.2.7), (2.2.8))

$$F\left(p^*\right) \le 0, \tag{2.4.3}$$

$$\left\langle p^*, F\left(p^*\right)\right\rangle = 0. \tag{2.4.4}$$

Если положить все цены строго положительными, т.е. $p_k^* > 0$, $k = 0,1,...,n$, то равенство (2.4.4) будет иметь место только в случае строгого равенства в (2.4.3) , т.е.

$$F\left(p^*\right) = 0. \tag{2.4.5}$$

Так как это равенство понимается покомпонентно ($F_k\left(p^*\right) = 0$, $k = 1,...,n$, где F_k - функция избыточного спроса для товара k), то условие (2.4.4) становится следствием равенства (2.4.5). Поэтому в случае положительных цен конкурентное равновесие определяется одним условием (2.4.5) .

Функция F обычно предполагается положительно однородной нулевой степени, т.е. для любых $p \in R_+^{n+1}$ и постоянного числа $\lambda > 0$ $F\left(\lambda p_0, \lambda p_1, ..., \lambda p_n\right) = F\left(p_0, p_1, ..., p_n\right)$. Это свойство означает, что на функцию избыточного спроса изменение масштаба цен не влияет, а существенны лишь относительные цены.

Рассмотрение функции избыточного спроса связано с ее применением в модели регулирования цен. В основе построения искомой формулы итеративного процесса вычисления равновесных цен лежит идея о том, что скорость изменения цен пропорциональна изменению величины избыточного спроса. Действительно, возрастание (убывание) функции избыточного спроса во времени равносильно более быстрому (медленному) росту спроса по сравнению с предложением (см. (2.4.2)), а это, согласно закона спроса, сопровождается увеличением (уменьшением) цен товаров.

Сказанное математически можно отразить формулой $\frac{dp}{dt} = aF(p)$ или в координатной форме $\frac{dp_k}{dt} = aF_k(p)$, $k = 0,1,...,n$, где a - коэффициент пропорциональности, $F_k(p) = x_k(p) - y_k(p)$ - функция избыточного спроса для товара k. Здесь мы предполагаем, ради простоты, что пропорциональность изменения цены и избыточного спроса по всем товарам одинакова (и равна числу a).

Из последнего уравнения по определению производной получаем: $\lim\limits_{\Delta t \to 0}\left[\frac{p_k(t+\Delta t) + p_k(t)}{\Delta t}\right] = aF_k\left(p(t)\right)$. Отсюда для достаточно малых $\Delta t > 0$ можно принять приблизительно $p_k\left(t+\Delta t\right) + p_k\left(t\right) \approx aF_k\left(p(t)\right) \cdot \Delta t$.

Принимая величину $t + \Delta t$ как "следующий" за t момент времени, для дискретного случая мы приходим к следующему закону изменения цен:

$$p_k(t+1) = p_k(t) + \beta F_k\left(p_0(t), p_1(t), ..., p_n(t)\right), \quad k = 0,1,2,...,n$$

или в векторной форме:

$$p(t+1) = p(t) + \beta F\left(p(t)\right), \quad t = 0,1,2,... \qquad (2.4.6)$$

Это есть рекуррентное уравнение, когда последующее (по времени) значение цены вычисляется с помощью предыдущего значения. Для его последовательного решения нужно иметь "начальное" условие. Им является значение цены в "начальный" момент времени $t = 0$, которое считается известным.

Для того чтобы в уравнении (2.4.6) было учтено условие положительности цен, можно написать

$$p(t+1) = \max\left\{0, p(t) + \beta F\left(p(t)\right)\right\}, \quad t = 0,1,2,... \qquad (2.4.7)$$

Таким образом, динамика процесса регулирования цен описана.

Процесс регулирования можно проводить в нормированных ценах или без нормирования цен. В первом случае вектор $p = \left(p_0, p_1, ..., p_n\right)$ нормируется с помощью какого-то выделенного товара (например, нулевого), и получается новый вектор $q=(1,q_1,...,q_n)$, компоненты которого $q_k=\frac{p_k}{p_0}$, $k=0,1,...,n$, являются относительными ценами. В ненормированном процессе все товары являются равноправными. С математической точки зрения ненормированный процесс усложняется множественностью равновесных векторов цен, так как все точки луча λp^* $(\lambda>0)$ будут равновесными векторами цен.

Устойчивость конкурентного равновесия, т.е. сходимость итеративного процесса (2.4.7) к равновесной цене, можно изучать на двух уровнях - на уровне **локальной устойчивости** и на уровне **глобальной устойчивости.** Равновесие называется локально устойчивым, если итеративный процесс сходится при начальной точке p^0, достаточно близкой к p^*. Если устойчивость имеет место независимо от местонахождения начальной точки p^0, то равновесие глобально устойчиво.

Одним из условий сходимости процесса (2.4.7) является так называемая **строгая валовая зависимость**.

Говорят, что для ненормированного процесса регулирования цен имеет место строгая валовая зависимость, если для каждого k функция избыточного спроса F_k есть строго возрастающая функция цены p_k $\left(\frac{\partial F_k}{\partial p_k}>0\right)$.

Экономический смысл этого условия состоит в том, что при повышении цены k-го товара и постоянстве других цен можно ожидать увеличения спроса на остальные (взаимозаменяемые) товары.

2.5. Функции полезности и их виды. Кривые безразличия

Первичными элементами экономики являются товары и участники. Говоря о товарах, имеем в виду все, что является предметом сделок в данном обществе, в том числе и услуги. Рассмотрим поведение отдельного участника экономики, как потребителя товаров. Эта проблема рассматривается с точки зрения рационального распределения личного бюджета (дохода) потребителя, которая, в конечном счете, сводится к решению вопроса о том, какое количество каждого наличного товара он должен приобрести при заданных ценах и известном доходе.

Для получения математической модели задачи потребителя нам нужно формализовать такие понятия как товар, цель потребления товаров, цена товара, бюджет и покупательская способность потребителя.

Мы будем предполагать, что количество каждого товара можно измерять вещественным неотрицательным числом (в штуках, в килограммах, в метрах, в литрах, в человеко-часах и т.д.). Пусть на рынке производится и продается n видов товаров. Вид товара будем обозначать индексом i, так что $i=1,2,...,n$. Обозначим через x_i количество i-го товара. Вектор $x=\left(x_1,...,x_n\right)$ будем называть **набором товаров**. Если в наборе x для некоторых i $x_i=0$, то будем говорить, что товар вида i не приобретается данным потребителем. Поэтому множество $R_+^n=\left\{x\in R^n \,/\, x_i\geq 0,\ i=1,\ldots,n\right\}$ будем называть **пространством товаров**.

Заметим, что на количество товаров не накладываются ограничения сверху. Иначе говоря, мы предполагаем, что на рынке существует достаточное количество товаров. Иногда в R_+^n выделяется некоторое подмножество X, как множество реально применяемых товаров, на котором определены интересы данного потребителя. В R_+^n наборы товаров можно складывать между собой или умножать на неотрицательное число; в R_+^n

вычитание невозможно, если при этом получается отрицательное количество товара. Человек приобретает (покупает) товары с целью максимального удовлетворения своих потребностей. У каждого есть свои вкусы, каждый по-своему оценивает пользу или вред от потребления товара. Поэтому потребитель стремится выбрать в пространстве R_+^n "лучший" с его индивидуальной точки зрения товар. При сравнении двух наборов x и y одни предпочтут x, другие - y.

Для того чтобы формализовать выбор потребителя с учетом его цели, в пространстве R_+^n определим (индивидуальное) **отношение предпочтения**, обозначаемое символом $\succeq$. При помощи этого отношения любой набор $x \in R_+^n$ можно сравнить с другим набором $y \in R_+^n$. Запись $x \succeq y$ означает, что либо x предпочтительнее чем y, либо наборы x и y для потребителя безразличны (то есть x по крайней мере так же хорош, как и y). Заметим, что в отношении $\succeq$ набор товаров рассматривается как одно целое (в отличие от векторного неравенства $x \geq y$, понимаемого покомпонентно).

Строгое предпочтение $x \succ y$ имеет место, если и только если $x \succ y$, а $y \succ x$ несправедливо.

Говорят, что наборы x и y **безразличны** для данного потребителя (обозначают $x \sim y$) тогда и только тогда, когда $x \succeq y$ и $y \succeq x$. Индивидуальное отношение $\sim$ можно рассматривать как отображение, которое каждому набору $x \in R_+^n$ ставит в соответствие множество всех тех наборов товаров, которые связаны с x отношением безразличия. Таким образом, отношение безразличия разбивает все пространство R_+^n на классы эквивалентности (безразличия).

Исходя из логики сравнения товаров, потребуем, чтобы отношение $\succeq$ удовлетворяло следующим аксиомам:

a₁) рефлексивность: для любого $x \in R_+^n$ справедливо $x \succeq x$;

a₂) транзитивность: для любого $x, y, z \in R_+^n$, таких, что $x \succeq y$, $y \succeq z$ справедливо $x \succeq z$;

a₃) полнота: для любых $x, y \in R_+^n$ либо $x \succeq y$, либо $y \succeq x$, либо $x \sim y$.

Кроме того, для отношения безразличия должна иметь место аксиома симметричности: из $x \sim y$ следует $y \sim x$.

Отношение предпочтения на практике выявляется экспериментальным путем, сравнивая наборы товаров попарно и спрашивая потребителя, какой набор он предпочитает. Реально такую работу можно провести в случае небольшого числа товаров. Предпочтение потребителя изменчиво и зависит от многих условий: цен товара, его дохода, имеющегося у него запаса товаров, сезона, состояния здоровья, настроения и т.д. Поэтому нельзя раз и навсегда "прикрепить" за потребителем неизменные принципы предпочтения. Следовательно, при повторном моделировании поведения потребителя его предпочтение нужно формализовать заново "с учетом изменившихся условий". В принципе нет ничего сложного в том, чтобы взять два набора товаров и спросить потребителя, который из них он предпочитает и в результате последовательного опроса найти искомую закономерность. Гораздо сложнее выявить предпочтение целой группы людей или общества, так как невозможно по каждой паре наборов товаров проводить голосование или референдум и ожидать, что результаты будут однозначными.

Кроме основных аксиом **a1), a2), a3)** отношение предпочтения может обладать рядом содержательных свойств. Приведем основные из них:

a₄) непрерывность: для любых $x, y \in X$ множество $\left\{\left(x, y\right) / x \succ y\right\}$ является открытым подмножеством декартово произведения $X \times X$;

a₅) ненасыщаемость: для любых $x, y \in X$ неравенство $x \geq y$ влечет $x \succ y$ и неравенства $x \geq y$, $x \neq y$ влекут $x \succ y$;

а$_6$) выпуклость: для любых $x, y \in X$ отношение $x \succeq y$ влечет $\alpha x + (1-\alpha) y \succeq y$, где $0 \le \alpha \le 1$.

Содержательно непрерывность означает, что если x строго предпочтительнее y, то при малом изменении каждого из них отношение строгого предпочтения сохраняется. Ценность этого свойства заключается в том, что непрерывное отношение предпочтения можно заменить (смоделировать) обычной числовой функцией.

Если все товары хорошего качества, то естественно, большее их количество будет предпочтительнее, чем меньшее. Этот факт и отражен в свойстве ненасыщаемости. Оно означает отсутствие такого набора $x \in X$, что $x \succeq y$ для всех $y \in X$ (отсутствие точки насыщения).

Выпуклость отношения предпочтения означает, что если набор x предпочтительнее набора y, то любая их "смесь" остается предпочтительней чем y.

Однако, отношение предпочтения является весьма неудобным инструментом изучения потребительского выбора. Оно является больше качественной категорией и не приспособлено для проведения количественных исследований. Поэтому нужен другой механизм, который, с одной стороны, был бы адекватен данному отношению предпочтения, то есть отражал бы все его основные свойства, с другой стороны, являлся бы численным индикатором отношения предпочтения. Таким механизмом и является **функция полезности**. С функцией работать удобнее, чем с отношением предпочтения, хотя последнее имеет и определенные преимущества. Если отношение предпочтения отражает "склонность" или "желание" потребителя, то функция полезности отражает понятие "выгодности" товаров. Полезность понимается как мера благосостояния и как критерий правильности принимаемых решений. Источником полезности является потребление товара. Термин "полезность" менее индивидуален, чем термин "предпочтение". Действительно, труднее угадать, что человеку хочется, чем определить что ему полезней, так как факт "x полезнее y", в отличии от "x предпочтительнее y", можно оценить по числовой шкале.

Функция полезности должна быть построена с учетом всех тех объективных и субъективных условий, которые влияют на предпочтение потребителя. Например, полезность денег оценивается не только их покупательской способностью. Так, с большой степенью уверенности можно утверждать, что полезность десяти заработанных долларов больше, чем те же десяти долларов найденных случайно на улице. Для наркомана "полезность" набора товаров тем выше, чем больше в нем содержится героина, а для нормального человека - наоборот. При построении функции полезности все эти нюансы, связанные с понятием полезности, учитываются тем обстоятельством, что эта функция строится сугубо на основе отношения предпочтения, то есть каждому отношению предпочтения соответствует своя функция полезности. Перейдем к строгим определениям.

Определение 2.5.1. Пусть в R_+^n определено отношение предпочтения $\succeq$. Любая функция $u: R_+^n \to R^1$ такая, что $u(x) \geq u(y)$ тогда и только тогда, когда $x \succeq y$, называется функцией полезности, соответствующей этому отношению предпочтения.

Если интересы потребителя ограничиваются множеством $X \subset R_+^n$, то функция полезности определяется на этом множестве, $u: X \to R^1$.

В терминах функции полезности отношение безразличия $x \sim y$ задается равенством $u(x) = u(y)$.

Всегда ли можно представить отношение предпочтения функцией полезности? Можно ли исходя из предпочтения $\succeq$ найти функцию u, удовлетворяющую определению 2.5.1? Отвечая на этот вопрос приведем без доказательства следующее утверждение.

Теорема 2.5.1. Для любого отношения предпочтения, определенного и непрерывного в R_+^n, можно построить представляющую его (непрерывную) функцию полезности $u: R_+^n \to R^1$.

Оказывается, что для любого непрерывного отношения предпочтения можно построить целое семейство функций полезности. Этот факт сформулируем в виде следующего утверждения.

Теорема 2.5.2. Пусть $u: R_+^n \to R^1$ - функция полезности, представляющая отношение предпочтения $\succeq$. Для любой строго возрастающей функции $f: R^n \to R^1$ сложная функция (суперпозиция) $u(x) = f\left(u(x)\right)$ является функцией полезности, так же представляющей это отношение предпочтения $\succeq$.

Заметим, что для потребителя все эти функции полезности равнозначны. Он не в состоянии отдать предпочтение одной из них перед множеством возможных других, так как все они отражают одно и то же отношение предпочтения. Различие этих функций касается различных "масштабов" измерения полезности и не является принципиальным.

Так как функция полезности должна быть адекватной отношению предпочтения, то для нее можно сформулировать свойства **a_4), a_5), a_6)**.

Например, в терминах функции полезности свойство ненасыщаемости читается так:

a'_5) для любых $x, y \in X$ неравенство $x \geq y$ влечет неравенство $u(x) \geq u(y)$ и неравенства $x \geq y,\ x \neq y$ влекут $u(x) > u(y)$.

Из этого определения видно, что в случае ненасыщаемости функция u не достигает своего максимума на множестве X: для любого $x \in X$ найдется $y \in X$, который имеет большую полезность чем x.

Аналогом свойства **a_6)** является вогнутость функции полезности:

a'₆) для любых $x, y \in X$ $u\left(\alpha x+\left(1-\alpha\right)y\right)\geq \alpha u\left(x\right)+\left(1-\alpha\right)u\left(y\right)$, $0\leq \alpha \leq 1$.

Если в условии вогнутости имеет место строгое неравенство, то функция полезности называется строго вогнутой. В этом случае выбор потребителя определяется однозначно.

Преимущество функции полезности против отношения предпочтения состоит, в частности, в том, что для анализа потребительского выбора можно использовать мощный аппарат дифференцирования. Пусть функция полезности и дифференцируема и

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} > 0, \quad i = 0, \ldots, n. \tag{2.5.1}$$

Частная производная (2.5.1) называется **предельной полезностью** товара вида i. Это есть полезность, получаемая от "дополнительной" доли товара вида i:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{u\left(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n\right) - u\left(x_1, \ldots, x_n\right)}{\Delta x_i}.$$

Поэтому неравенство (2.5.1) можно интерпретировать так: для любого набора товаров $x \in R_+^n$ возрастание потребления товара вида i при постоянном уровне потребления других товаров приводит к увеличению полезности.

Таким образом, (2.5.1) - это условие ненасыщаемости, написанное для дифференцируемой функции полезности. Забегая вперед, отметим, что именно предельная полезность товара является определяющим цену товара фактором. Здесь нет противоречия с рыночным механизмом ценообразования, так как при прочих фиксированных условиях спрос на товар определяется его полезностью.

Предположим теперь, что функция u дважды дифференцируема и имеет непрерывные вторые частные производные. Для такой функции свойство строгой вогнутости выполнено, если матрица Гессе

$$
H = \begin{pmatrix}
\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_n} \\
\cdots & \cdots. & \cdots & \cdots \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}
\end{pmatrix}
$$

отрицательно определена.

Тогда, в частности, выполнены условия:

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} < 0, \quad i = 0, \dots, n. \tag{2.5.2}
$$

Это неравенство говорит о том, что предельная полезность $\left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)$ товара уменьшается по мере того, как продукт потребляется.

Неравенства (2.5.1) и (2.5.2) отражают хорошо известный в экономической теории закон об убывающей предельной полезности (закон Госсена).

С понятием функции полезности неразрывно связано понятие **кривых безразличия**, имеющее широкое применение в математической теории потребления.

Определение 2.5.2. Кривой безразличия для данного набора товаров $x \in R_+^n$ называется геометрическое место точек $y \in R_+^n$, которые находятся в отношении безразличия с этим набором x, то есть множество $\left\{ y \in R_+^n / u(y) = u(x) \right\}$.

Так как для всех точек из этого множества полезность одна и та же, то кривые безразличия задаются уравнениями $u(x) = c$, где c - любая *const*. Таким образом, кривая безразличия математически представляется как линия уровня функции полезности. Поэтому для любой функции полезности существует бесконечное множество кривых безразличия (для разных *const*) и они заполняют все пространство R_{+}^{n}, образуя так называемую карту безразличия.

Приведем примеры некоторых, наиболее часто применяемых функций полезности и виды их карт безразличия. Эти функции, как показала практика, при определенных условиях достаточно объективно отражают предпочтение потребительского выбора.

1. Функция полезности с полным взаимозамещением благ:

$$u(x)=\sum_{i=1}^{n} b_i x_i, \qquad (2.5.3)$$

где коэффициент b_i является числовой оценкой полезности от потребления единицы товара вида i.

Для построения кривых безразличия функции (2.5.3) в R_{+}^{2} из уравнения $b_1x_1+b_2x_2=c$ найдем $x_2=-\frac{b_1}{b_2}x_1+\frac{c}{b_2}$. При постоянных b_1 и b_2 это есть семейство (по параметру c) параллельных прямых с углом наклона $-\frac{b_1}{b_2}$. Карта кривых безразличия функции (2.5.3) приведена на рис. 2.5.1(а).

Функция (2.5.3) учитывает возможность компенсации уменьшения потребления одних товаров другими.

Задача 2.5.1. Пусть товаром первого вида является кофе, второго – чай, а потребление этих продуктов в количествах x_1 и x_2 дает полезность, равную c, то есть $u(x)=b_1x_1+b_2x_2=c$.

Решение. Представим, что потребление кофе уменьшилось на α единиц. Тогда полезность упадет до уровня $c-b_1\cdot\alpha$. Чтобы компенсировать эту потерю полезности надо увеличить потребление чая на величину β так, чтобы $u(x_1-\alpha, x_2+\beta)=c$.

Отсюда найдем $\beta=\alpha\left(\frac{b_1}{b_2}\right)$. В результате имеем:

$$u\left(x_1-\alpha, x_2+\beta\right)=b_1\left(x_1-\alpha\right)+b_2\left(x_2+\alpha\frac{b_1}{b_2}\right)=c=u\left(x_1,x_2\right).$$

Таким образом, функция (2.5.3) позволяет определить размер замещения одних товаров другими для того, чтобы полезность оставалась на неизменном уровне.

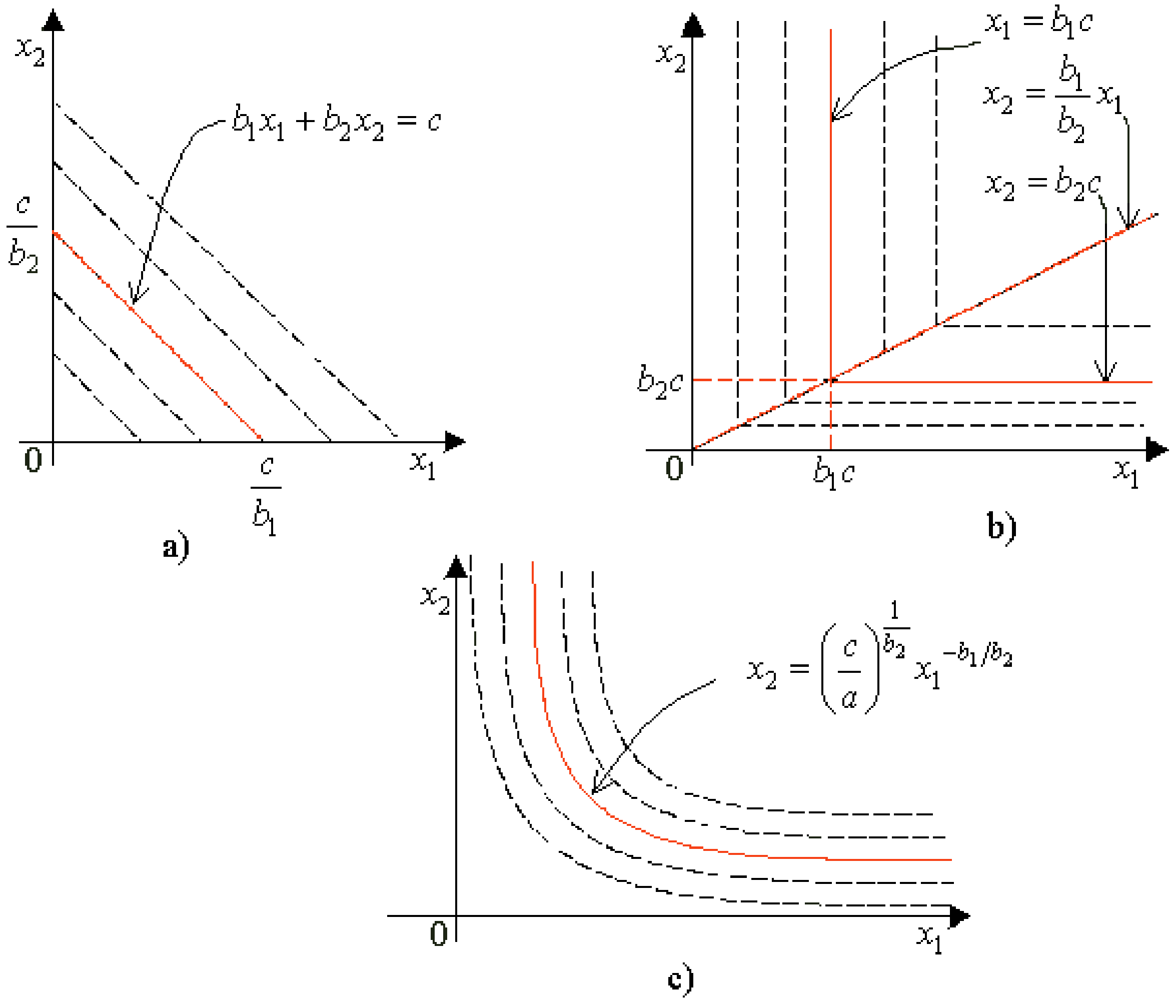

Рис. 2.5.1. Примеры карт безразличия

2. Функция полезности с полным взаимодополнением благ:

$$u(x)=\min\left\{\frac{x_i}{b_i}, i=1,\dots,n\right\}, \tag{2.5.4}$$

где b_i - количество товара вида i, приходящееся на единицу полезности. Для построения кривых безразличия функции (2.5.4) в R_+^2 из уравнения $\min\left\{\frac{x_1}{b_1},\frac{x_2}{b_2}\right\}=c$ найдем

$$x_2=\frac{b_1}{b_2}x_1,\quad если\quad \frac{x_1}{b_1}=\frac{x_2}{b_2}, \tag{2.5.5}$$

$$x_1=b_1c,\quad если\quad \frac{x_1}{b_1}<\frac{x_2}{b_2}, \tag{2.5.6}$$

$$x_1=b_2c,\quad если\quad \frac{x_1}{b_1}>\frac{x_2}{b_2}. \tag{2.5.7}$$

Отсюда видно, что карту безразличия функции (2.5.4) составляют одна линия, проходящая через начало координат и два семейства (по параметру c) линий, параллельных осям координат (рис.2.5.1(b)).

Функция (2.5.4) учитывает возможность дополнения одних товаров другими.

Задача 2.5.2. Приобретается набор из двух товаров: кофе в количестве x_1 и сахар x_2 в количестве c. Потребление этих товаров дает полезность, равную c, то есть $u(x)=\min\left\{\frac{x_1}{b_1},\frac{x_2}{b_2}\right\}=c$.

Решение. В случае (2.5.5) $\frac{x_1}{b_1}=\frac{x_2}{b_2}=const$ и увеличение (уменьшение) потребления кофе влечет увеличения (уменьшения) сахара.

В случае (2.5.6) увеличение потребления кофе может привести к нарушению неравенства в (2.5.6) и, следовательно, к нарушению уровня полезности, если не увеличиться потребление сахара.

Анализ случая (2.5.7) проведите самостоятельно.

Как показывает задача 2.5.1, функция (2.5.4) применяется для определения полезности набора взаимодополняющих друг друга товаров.

3. Неоклассическая функция полезности (функция Кобба-Дугласа):

$$u(x) = a\prod_{i=1}^{n} x_i^{b_i}, \quad b_1 + \ldots + b_n = 1, \tag{2.5.8}$$

где a - фактор шкалы измерения полезности, $0 < b_i < 1$. Для построения кривых безразличия функции (2.5.8) в R_+^2 из уравнения $ax_1^{b_1}x_2^{b_2} = c$ найдем $x_2 = \left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{1}{b_2}} x_1^{-\frac{b_1}{b_2}}$, то есть карту безразличия составляет семейство (по параметру c) гипербол, показанных на рис.2.5.1(c).

В приведенных примерах функции (2.5.3) и (2.5.8) заданы явным образом, а функция (2.5.4) находится как решение системы неравенств $x_i \geq b_i u(x), \quad i = 1, 2.$

Приведем без комментариев еще несколько видов функции полезности.

4. Функция полезности замещающе-дополняющего типа:

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} v_i(x), \tag{2.5.9}$$

где функции $v_1, .., v_n$ находятся из системы неравенств $x_i \geq \sum_{j=1}^{n} b_j v_j(x), \, i = 1, \ldots, n$.

5. Квадратичная функция полезности:

$$u(x) = \langle a, x \rangle + \frac{1}{2} x^T Bx, \tag{2.5.10}$$

где $a + x^T B > 0$, x^T-транспонированный вектор x, B- отрицательно определенная $n \times n$ - матрица.

6. Логарифмическая функция полезности (функция Бернулли):

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \log\left(x_i - b_i\right), \tag{2.5.11}$$

где $a_i > 0$, $x_i > b_i \geq 0$.

7. Экспоненциальная функция полезности:

$$u(x)=\frac{1}{a}e^{-w(x)}, \qquad (2.5.12)$$

где $a>0$, $w(x)=a_1x_1+...+a_nx_n$.

Здесь перечислены только некоторые из применяемых в теории потребления функций полезности. Список таких "готовых" функций можно продолжить. Однако уместно повторить то, что говорилось ранее о математических моделях в целом - нельзя гарантировать пригодность известных функций для каждого конкретного случая. При моделировании задачи потребителя как раз самым уязвимым местом является функция полезности, адекватно отражающая предпочтения индивидуального потребителя. Поэтому часто требуется не выбрать, а построить для данной конкретной задачи свою функцию полезности. Наиболее общими для построения функций полезности являются методы регрессионного анализа, которые применимы при наличии подходящего статистического материала. Для выбранного вида функции полезности на основе этих данных оцениваются ее коэффициенты (параметры). Сложность метода зависит от класса функций, (линейных, квадратичных, степенных и др.) в котором ищется функция полезности.

2.6. Предельная полезность и предельная норма замещения

Насколько возрастает спрос, если предпринять сезонное снижение цен на 10%? Как изменится производительность труда фирмы при сокращении рабочего дня на 0,5 часов, а зарплаты на 5%? Изменится ли прибыль предприятия (если да, то насколько) при приеме на работу дополнительного рабочего? От какого количества товара одного вида готов отказаться потребитель, чтобы получить одну дополнительную единицу другого товара? Такого рода вопросы, связанные с анализом дополнительного эффекта при дополнительных затратах, возникают во всех сферах экономики. Оперируя только суммарными и средними величинами, нельзя на них ответить. На них можно ответить как раз с помощью предельных величин, определяемых математически с помощью производных соответствующих функций.

Применение в экономике дифференциального исчисления и изучение его результатов называется предельным анализом.

Заметим, что дифференциальное исчисление оперирует непрерывно определенными (не дискретными) бесконечно малыми величинами, поэтому приведенные выше термины "дополнительных единиц" здесь являются условными.

Будем говорить о предельных величинах, касающихся только сферы потребления.

Рассмотрим произвольный набор товаров $x \in R_+^n$. Если полезность от x_i обозначить через $u^i\left(x_i\right)$, то суммарная полезность набора x есть $u(x) = \sum_{i=1}^{n} u^i\left(x_i\right)$.

Среднюю полезность набора x схематично можно определить как вектор $\frac{u(x)}{x} = \left(\frac{u^1\left(x_1\right)}{x_1}, \dots, \frac{u^n\left(x_n\right)}{x_n}\right)$, где $\frac{u^i\left(x_i\right)}{x_i}$ - средняя полезность товара вида i, то есть полезность, приходящаяся на единицу товара i.

Понятие предельной полезности набора x $\frac{\partial u}{\partial x}=\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$ мы уже рассматривали в предыдущем параграфе. Вычисляя частную производную $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, можно получить ответ на вопрос: как себя поведет полезность $u(x)$ при изменении объема потребления того или иного товара. Полезность товара растет, пока справедливо условие (2.5.1) . Если с ростом потребления товара неравенство (2.5.1) переходит в обратное, то очевидно, нет смысла и дальше увеличивать его потребление. Поэтому представляет интерес случай, когда $\frac{\partial u}{\partial x_i}=0$. К этому вопросу мы вернемся в следующем параграфе при выявлении оптимальных объемов потребления товара.

Сравнивая среднюю и предельную полезности, можно обнаружить тенденцию средней полезности "стремиться" к предельной полезности. А именно, среднее значение полезности возрастает (при возрастании потребления), если оно ниже предельной полезности; среднее значение полезности остается постоянным (при изменении потребления), если оно равно значению предельной полезности; среднее значение полезности убывает (при возрастании потребления), если оно превосходит предельную полезность.

Сравним среднюю и предельную полезности для разных функций полезности из предыдущего параграфа.

Средняя полезность набора товаров, обладающего свойством замещения (см. (2.5.3)), равна $\frac{u(x)}{x}=\left(\frac{b_1x_1}{x_1},\dots,\frac{b_nx_n}{x_n}\right)=(b_1,\dots,b_n)$, где b_i – средняя полезность товара вида i.

Предельная полезность есть $\frac{\partial u}{\partial x}=\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)=(b_1,\dots,b_n)$.

Следовательно, для функции (2.5.3) средняя и предельная полезности совпадают.

Этот факт является следствием линейности функции u.

Подтверждением служит функция полезности для взаимодополняющих друг друга товаров (см. (2.5.4)):

$$\frac{u(x)}{x} = \min\left\{\frac{1}{b_1},\dots,\frac{1}{b_n}\right\},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \min\left\{\frac{1}{b_1},\dots,\frac{1}{b_n}\right\}.$$

Для функции Кобба-Дугласа (2.5.8) , полагая для простоты $n = 2$, имеем:

$$\frac{u(x)}{x} = \left(ax_1^{b_1-1}x_2^{b_2}, ax_1^{b_1}x_2^{b_2-1}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(b_1x_1^{b_1-1}x_2^{b_2}, b_2x_1^{b_1}x_2^{b_2-1}\right).$$

С учетом условия $b_1, b_2 < 1$ ясно, что предельная полезность пропорциональна средней и всегда меньше ее.

Предельную величину, как и среднюю, можно считать относительной величиной. Пусть значение некоторой переменной z изменилась от z_1 до z_2. Разницу $\Delta z = z_2 - z_1$ называют **абсолютным изменением** z, а отношение $\frac{\Delta z}{z_1}$ - **относительным изменением** z (изменение, приходящееся на одну единицу исходной величины). В отличие от абсолютного относительное изменение есть величина безымянная. Число $\left(\frac{\Delta z}{z_1}\right)\times 100\%$ называется **процентным изменением** z.

При помощи предельных величин можно формализовать понятие **эластичности**, играющую важную роль при анализе взаимосвязи между экономическими показателями и факторами.

Эластичность (коэффициент эластичности) является численной оценкой относительного изменения экономического показателя под действием относительного изменения некоторого экономического фактора при неизменности других влияющих на этот показатель факторов.

Таким образом, эластичность показателя - это его чувствительность к изменению влияющего на него фактора.

Возникает естественный вопрос: зачем нужно вводить сложное понятие "эластичность", когда те же изменения можно описать предельными величинами? Как то: изменение полезности от объема потребления товара $\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$, изменение предложения (y_i) от его цены $\left(\frac{\partial y_i}{\partial p_i}\right)$ - и т.д. Дело в том, что предельные величины, (как и средние) зависят от единицы измерения. Например, величина $\frac{\partial y_i}{\partial p_i}$ в *кг./руб.* есть одно число, а та же величина в *тонна/руб.* - другое. Такая неоднозначность приводит к техническим неудобствам. Эта проблема снимается, если чувствительность экономического показателя измеряется эластичностью, так как последняя определена как безымянная величина.

Пусть имеется некоторый экономический показатель z, зависящий от ряда факторов $y_1,...,y_n$, то есть $z = z(y) = z(y_1,...,y_n)$. Эластичность показателя z по y_i обозначим $\varepsilon_{y_i}(z)$ и выведем общую формулу для ее вычисления.

По определению эластичности

$$\varepsilon_{y_i}(z) = \frac{\vartriangle z}{z} \Big/ \frac{\vartriangle y_i}{y_i} = \frac{\vartriangle z}{\vartriangle y_i} \times \frac{y_i}{z}. \qquad (2.6.1)$$

Переходя к пределу в правой части при $\Delta y_i \to 0$, получим

$$\varepsilon_{y_i}(z) = \left(\lim_{\vartriangle y_i \to 0} \frac{\vartriangle z}{\vartriangle y_i}\right) \frac{y_i}{z} = \frac{\partial z}{\partial y_i} \times \frac{y_i}{z}. \qquad (2.6.2)$$

Видим, что "эластичность z по y_i" вычисляется как произведение "предельной величины z по y_i" на "среднюю величину y_i по z".

Умножая числитель и знаменатель дроби (2.6.1) на 100%, получим

$$\varepsilon_{y_i}(z) = \frac{\frac{\triangle z}{z}100\%}{\frac{\triangle y_i}{y_i}100\%}. \qquad (2.6.3)$$

Отсюда, эластичность z по y_i есть отношение процентного изменения z на процентное изменение y_i.

Интересно узнать, насколько процентов изменится z, если y_i изменится на 1%? Иначе говоря, нужно найти процентное изменение z при процентном изменении y_i, равном единице, то есть $\left(\frac{\triangle y_i}{y_i}\right)100\% = 1$.

Тогда из (2.6.3) сразу получаем искомое процентное изменение:

$$\frac{\Delta z}{z}100\% = \varepsilon_{y_i}(x)\Big|_{1\%}.$$

Отсюда, эластичность z по y_i есть процентное изменение показателя z при изменении фактора y_i на 1%.

Как видно из (2.6.2), знак эластичности в каждой точке y зависит от знаков $\frac{\partial z}{\partial y_i}$ и $\frac{y_i}{z}$. Предположим для простоты, что $\frac{y_i}{z} > 0$. Если z возрастает по y_i (в точке y), тогда $\frac{\partial z}{\partial y_i} > 0$ и эластичность положительна; если z убывает по y_i, тогда $\frac{\partial z}{\partial y_i} < 0$ и эластичность отрицательна.

Пороговым значением для эластичности является число 1. Для объяснения этого рассмотрим графическое изображение эластичности функции спроса (c) на один товар, зависящей только от его цены: $c = c(p)$.

Известно (см.рис. 2.1.1), что спрос является убывающей функцией цены. Вычислим эластичность $\varepsilon_p(c)$ в произвольной точке $A(p,c)$ графика функции $c=c(p)$ (рис. 2.6.1).

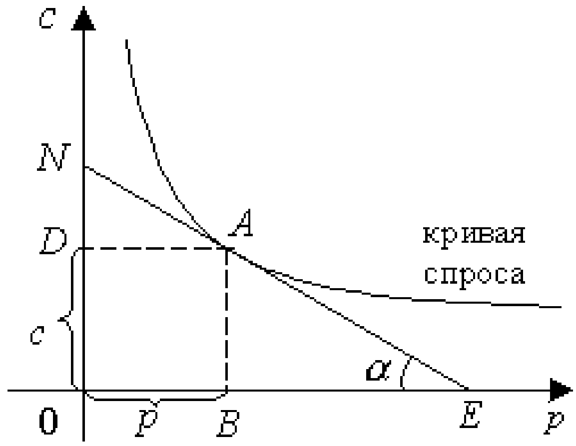

Рис. 2.6.1. Схема вычисления эластичности в точке A

Пресечение касательной в точке A с осями координат обозначим через E и N. По определению $\varepsilon_p(c)=\dfrac{dc}{dp}\dfrac{p}{c}$.

Выразим правую часть равенства через элементы графика.

Из $tg\alpha=\dfrac{AB}{BE}$ имеем $BE=\dfrac{AB}{tg\alpha}=\dfrac{OD}{tg\alpha}=\dfrac{c}{-\dfrac{dc}{dp}}$ (здесь знак минус показывает убывание функции c в точке A). Из подобия треугольников *ABE* и *ADN* имеем: $\dfrac{AN}{AE}=\dfrac{AD}{BE}=\dfrac{OB}{BE}=\dfrac{p}{-\left(c\Big/\dfrac{dc}{dp}\right)}=-\dfrac{dc}{dp}\dfrac{c}{p}=-\varepsilon_p(c)$.

Следовательно,

$$\varepsilon_p(c)=-\frac{AN}{AE}. \qquad (2.6.4)$$

Можно показать, что для возрастающей функции (например, предложения, как функции от цены) эластичность по абсолютной величине также будет равна отношению $\dfrac{AN}{AE}$. Потому в общем случае эластичность следует оценивать по ее абсолютной величине. Эта величина равна 1, если в

(2.6.4) числитель равен знаменателю; больше 1, если числитель больше знаменателя и меньше 1 - если числитель меньше знаменателя. Это говорит о том, что эластичность $\varepsilon_{y_i}(z)$ зависит от кривизны графика функции z в рассматриваемой точке.

Если $\left|\varepsilon_{y_i}(z)\right|>1$, то функция z называется эластичной (по y_i); если $\left|\varepsilon_{y_i}(z)\right|<1$, то функция z называется неэластичной (по y_i); если $\left|\varepsilon_{y_i}(z)\right|=1$, то говорят, что функция z имеет единичную эластичность (по y_i).

Относительно спроса различают товары эластичного спроса и товары неэластичного спроса. Для товаров первого вида повышению цены на 1% соответствует понижение спроса более, чем на 1% и, наоборот, понижение цены на 1% приводит к росту покупок более, чем на 1% ($\left|\varepsilon_{y_i}(z)\right|>1$). Для товаров второго вида повышение цены на 1% влечет за собой понижение спроса менее, чем на 1% и, наоборот, уменьшение цены на 1% приводит к росту покупок менее чем на 1% ($\left|\varepsilon_{y_i}(z)\right|<1$).

Вычислим эластичность некоторых из функций полезности приведенных в предыдущем параграфе (для простоты будем полагать $n=2$).

Для функции с полным взаимозамещением благ (2.5.3) $\varepsilon_{x_i}(u)=\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{x_i}{u}=\frac{b_i x_i}{b_1x_1+b_2x_2}, \quad i=1,2.$

Например, в точке $\bar{x}=\left(\frac{1}{b_1},\frac{2}{b_2}\right)$ получаем: $\varepsilon_{x_1}(u)\Big|_{x_1=\bar{x}_1}=\frac{1}{3}$, $\varepsilon_{x_2}(u)\Big|_{x_2=\bar{x}_2}=\frac{2}{3}$.

Видим, что в точке $\bar{x}$ полезность в целом неэластична; при этом неэластичность по второму товару "выше", чем по первому товару.

Для функции Кобба-Дугласа (2.5.8) имеем:

$$\varepsilon_{x_1}(u)=b_1 a\, x_1^{b_1-1}x_2^{b_2}\frac{x_1}{a x_1^{b_1}x_2^{b_2}}=b_1,$$

$$\varepsilon_{x_2}(u) = b_2 a x_1^{b_1} x_2^{b_2 - 1} \frac{x_1}{a x_1^{b_1} x_2^{b_2}} = b_2 .$$

Итак, параметры b_1 и b_2 в функции Кобба-Дугласа как раз являются коэффициентами эластичности по видам товаров; они постоянны, то есть не зависят от объема потребления. Поэтому функция Кобба-Дугласа относится к классу функций полезности с постоянной эластичностью (вернее, неэластичностью, так как $b_1, b_2 < 1$).

Рассмотрим еще одно понятие, определяемое с помощью дифференцирования.

Предположим, что имеется пять наборов товаров $x^1 = 1{,}16$, $x^2 = 2{,}10$, $x^3 = 3{,}6$, $x^4 = 4{,}4$, $x^5 = 5{,}2$ с одинаковой полезностью, то есть $u\left(x^1\right) = \ldots = u\left(x^5\right)$. Пусть первый вид товара ($i = 1$) - продукт питания, второй ($i = 2$) -одежда. Эти точки лежат на одной кривой безразличия $u(x) = c$ (рис.2.6.2).

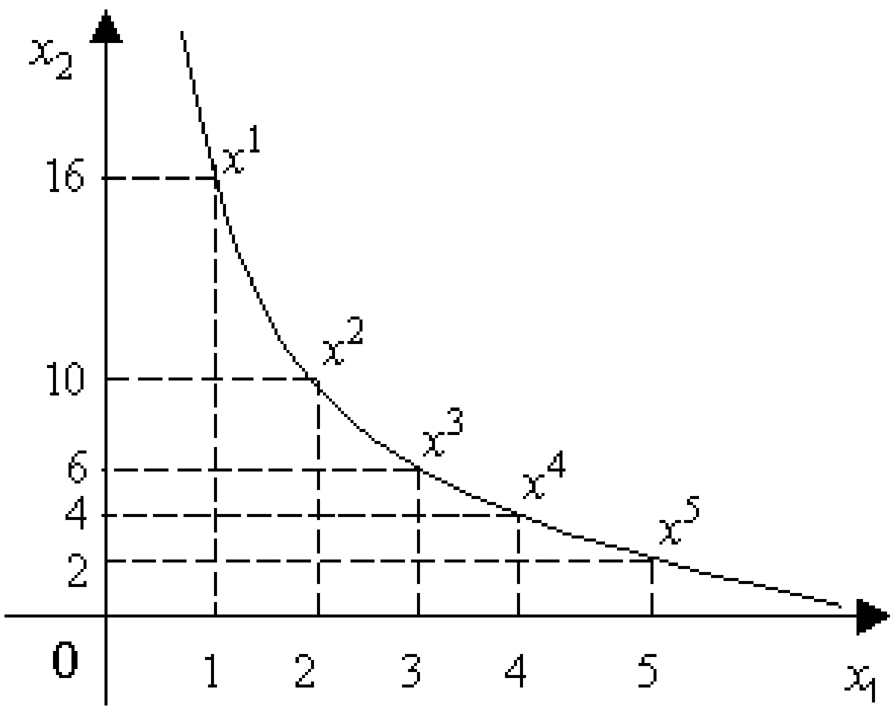

Рис. 2.6.2. Замещение наборов товаров

Как видно из графика, замена набора x^1 набором x^2 требует отказа от 6 единиц одежды взамен на одну единицу продукта питания; замена x^2 на x^3 - отказа от 4 единиц одежды ради одной единицы продукта питания и т.д.

Чтобы количественно определить объем некоторого товара, которым потребитель готов пожертвовать ради другого товара, используют меру, называемую **предельной нормой замещения**. Более точно, предельная норма замещения показывает, на сколько единиц нужно уменьшить (увеличить) количество одного товара при увеличении (уменьшении) другого товара на единицу, чтобы при этом полезность осталась неизменной.

Обозначим предельную норму замещения i-го товара j-м товаром через S_{ij} и выведем формулу для ее вычисления.

Пусть при уменьшении потребления j-го товара на величину Δx_j для поддержания прежнего уровня полезности необходимо увеличить потребление i-го товара на величину Δx_i:

$$u\left(x_1,...,x_n\right)=u\left(x_1,...,x_i+dx_i,...,x_j+dx_j,...,x_n\right), \qquad (2.6.5)$$

где $dx_i=\Delta x_i$, $dx_j=-\Delta x_j$. По определению предельной нормы замещения

$$S_{ij}=\left.\frac{\Delta x_j}{\Delta x_i}\right|_{u=const}. \qquad (2.6.6)$$

Из (2.6.5) получаем

$$\Delta u=u\left(x_1,...,x_i+dx_i,...,x_j+dx_j,...,x_n\right)-u\left(x_1,...,x_n\right)=0. \qquad (2.6.7)$$

Для полного приращения Δu функции u в математическом анализе существует формула:

$$\Delta u=\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1+...+\frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n+\varepsilon\left(\Delta x_1,...,\Delta x_n\right), \qquad (2.6.8)$$

где $\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)dx_i$ - частные дифференциалы, а $\varepsilon>0$ таково, что

$$\lim_{\triangle x_i \to 0} \varepsilon\left(\triangle x_1,...,\triangle x_n\right) = 0, \quad i = 1,...,n \tag{2.6.9}$$

Выражение $du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n$ есть полный дифференциал функции u.

Из (2.6.7)-(2.6.9) с учетом того, что $dx_k = 0$ для $k \neq i, j$, имеем $du = \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial u}{\partial x_j} dx_j = 0$.

Отсюда $\frac{\partial u / \partial x_i}{\partial u / \partial x_j} = -\frac{dx_j}{dx_i} = \frac{\Delta x_j}{\Delta x_i}$ и из (2.6.6) получаем окончательно

$$S_{ij} = \frac{\partial u / \partial x_i}{\partial u / \partial x_j} \ . \tag{2.6.10}$$

Следовательно, предельная норма замещения товаров выражается через отношение их предельных полезностей.

Например, для функции Кобба-Дугласа (2.5.8) имеем: $S_{ij} = \frac{b_i}{b_j} \frac{x_j}{x_i}, \quad i, j = 1,..,n \ \left(i \neq j\right)$.

Из закона об убывающей предельной полезности следует выпуклость кривых безразличия (не путать с вогнутостью функции u) (см.(2.5.2)). Поэтому при движении вниз вдоль кривой безразличия (рис. 2.6.2) S_{12} убывает: $S_{12}\left(x^1\right) = 6$, $S_{12}\left(x^2\right) = 4$, $S_{12}\left(x^3\right) = 2$, $S_{12}\left(x^4\right) = 1$.

Этот факт в экономике называется **законом убывающей предельной нормы замещения:** при стремлении поддерживать неизменным уровень полезности путем замещения i-го товара j-м товаром, субъективное удовлетворение, получаемое от предельного потребления i-го товара, в сравнении с удовлетворением, получаемым от предельного потребления товара j, будет неуклонно уменьшаться.

Формы кривых безразличия показывают на разные степени желательности замены одного товара другим.

Пусть кривые безразличия для двух различных потребителей относительно напитка ($i = 1$) и сока ($i = 2$) имеют следующий вид (рис.2.6.3 и 2.6.4):

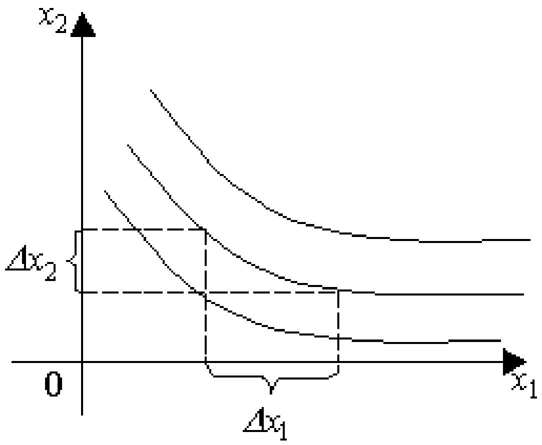

Рис. 2.6.3. Предпочтение первого потребителя

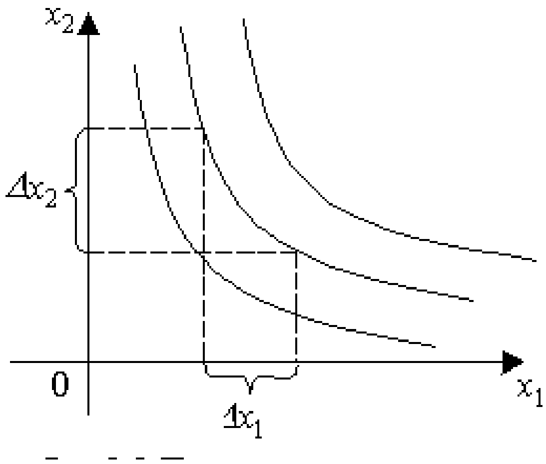

Рис. 2.6.4. Предпочтение второго потребителя

У первого потребителя (рис.2.6.3) низкая предельная норма замещения напитка соком - он готов отказаться от очень небольшого количества сока ради напитка ($\Delta x_2 < \Delta x_1$). У второго потребителя (рис.2.6.4), наоборот, высокая предельная норма замещения напитка соком ($\Delta x_2 > \Delta x_1$).

Предельная норма замещения применяется при изучении спроса (например, что нужнее в данный момент для домашнего хозяйства, один диван или два кресла; насколько нужно жертвовать технической характеристикой автомобиля ради увеличения комфорта и т.д.).

2.7. Связь предельной нормы замещения со средними рыночными ценами на потребительские блага и ее содержательная интерпретация

Приведем и исследуем классическую математическую модель задачи индивидуального потребительского выбора. Содержательно эту задачу можно сформулировать так: потребителю нужно приобрести (купить) на рынке необходимые ему виды товаров в таком количестве, чтобы их потребление доставило максимальное удовлетворение (пользу); при этом суммарная стоимость купленных товаров не должна превышать его дохода (бюджета).

Последнее условие называется бюджетным ограничением и оно подчеркивает всегда ограниченные покупательские возможности потребителя.

Обращает на себя внимание "скудность" постановки задачи. Так, например, не говорится о минимальном прожиточном уровне, ниже которого объем потребления не может опускаться; нет ограничения на доход потребителя и т.д. Однако следует исходить из того, что эта постановка общая и в случае необходимости более подробного моделирования все недостающие сведения можно "прочитать между строчками" этой постановки. Мы же будем принимать эту постановку как исходную, ее и будем моделировать.

В начале пункта 2.5 перечислены те важнейшие факторы, которые, будучи формализованы и связаны подходящими математическими соотношениями, и дают требуемую модель. Это товар и его цена, цель и бюджет потребителя, его покупательская способность.

Приведем сначала необходимые обозначения: пусть $x = (x_1, ..., x_n) \in R_+^n$ - набор товаров, где x_i - количества товара вида i, n- число видов товаров, R_+^n- пространство товаров; $p = (p_1, ..., p_n)$- вектор цен товаров, где p_i- цена единицы товара вида i; K - доход (бюджет) потребителя.

Мы рассматриваем статическую задачу, поэтому эти величины не зависят от фактора времени. Параметры p_i и K считаются постоянными величинами, причем цены считаются рыночными, а доход не структурируется, то есть нас не интересует из каких частей он складывается. Компоненты x_i вектора являются неизвестными переменными. Модель составляется как раз для определения "оптимальных" значений этих переменных для данного потребителя. Цель потребителя будем описывать с помощью функции полезности $u: R_+^n \to R^1$ (см. определение 2.5.1), относительно которой будем предполагать выполнение условий (2.5.1) и (2.5.2). Наконец, мы рассматриваем некоторого "обобщенного" потребителя, никак не характеризуя его индивидуальные особенности, за исключением априорного предложения о существовании функции полезности, отражающей его индивидуальные предпочтения в R_+^n (см. теорему 2.5.1).

С учетом всего сказанного выше, модель задачи потребительского выбора имеет вид:

$$u(x) \to \max, \tag{2.7.1}$$

$$\begin{gathered} \langle p, x \rangle \le K, \\ x \ge 0. \end{gathered} \tag{2.7.2}$$

Обозначим через $B(p, K)$ множество всевозможных товаров, допустимых потребителю при ценах p и доходе K:

$$B(p,K) = \left\{ x \in R_+^n \,/\, \langle p, x \rangle \le K \right\} \tag{2.7.3}$$

называемое **бюджетным множеством**.

Графическое изображение этого множества показано на рис.2.7.1.

Граница $\overline{B}(p,K) = \left\{ x \in R_+^n \,/\, \langle p, x \rangle = K \right\}$ множества $B(p,K)$ называется **бюджетной линией**.

Оптимальным решением задачи (2.7.1)-(2.7.2) называется такой вектор $x^* = \left(x_1^*, \ldots, x_n^*\right)$, что

$$u\left(x^*\right) = \max_{x \in B(p,K)} u(x). \quad (2.7.4)$$

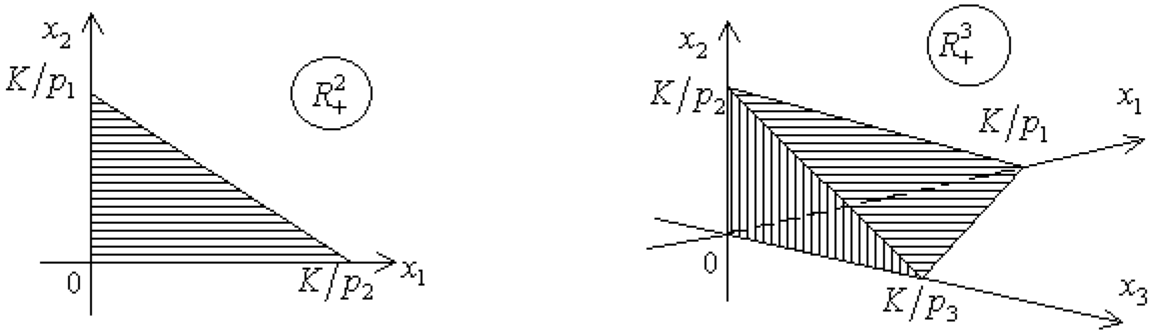

Рис. 2.7.1. Графическое изображение бюджетного множества

Определение 2.7.1. Оптимальное решение x^* задачи (2.7.1) - (2.7.2) называется **спросом потребителя.**

Данное формальное определение спроса отражает классическое понятие спроса как платежеспособную потребность.

Всегда ли существует оптимальное решение задачи (2.7.1) - (2.7.2)?

Поскольку мы имеем дело с оптимизационной задачей (линейный или нет в зависимости от функции полезности u), то на этот вопрос следует ответить с точки зрения теоремы Вейерштрасса. Так как функция полезности непрерывна по факту ее существования (см. теорему 2.5.1), основная сложность заключается в компактности множества (2.7.3), на котором ищется максимум функции u (см.(2.7.4)). В метрическом пространстве R_+^n, как известно, компактность множества равнозначно его замкнутости и ограниченности. Так как бюджетное множество замкнуто по определению, то остается изучить его ограниченность.

Покажем, что ограниченность не всегда имеет место. Предположим, для некоторого i $p_i = 0$. Как следует из (2.7.2) , в этом случае "допустимым" становится любой вектор $\tilde{x} = \left(x_1, \ldots, x_{i-1}, \infty, x_{i+1}, \ldots, x_n\right)$, то есть

$\tilde{x} \in B(p,K)$, что говорит о неограниченности бюджетного множества. А это, в свою очередь, может привести к отсутствию оптимального решения задачи (2.7.1)-(2.7.2) (например, в случае неограниченности функции u, что является следствием ненасыщаемости потребителя (см. свойство $\mathbf{a}'_5$ в пункте 2.5)). Однако, если потребитель ненасыщаем по всем товарам, то множество $B(p,K)$ оказывается ограниченным. Более строго этот факт сформулирован в следующем утверждении.

Теорема 2.7.1. Пусть бюджетное множество (2.7.3) обладает следующим свойством: если в последовательности $x^k \in B(p,K)$ при $k \to \infty$ имеет место $x_j^k \to \infty$ для некоторого j, то $x_i^k \to \infty$ для всех $i = 1,2,...,n$. Тогда бюджетное множество ограничено и в задаче (2.7.1)-(2.7.2) существует оптимальное решение. Если при этом функция u строго вогнута на множестве $B(p,K)$, то оптимальное решение единственно.

Итак, при фиксированных ценах $p_1,..., p_n$ и заданном доходе K оптимальное потребление определяется компонентами $x_1^*,...,x_n^*$ решения x^* задачи (2.7.1)-(2.7.2).

Выяснив существование оптимального решения задачи потребителя, займемся вопросом его вычисления. Для этого воспользуемся методом множителей Лагранжа.

Составим функцию Лагранжа для нашей задачи: $L(x,\lambda,\mu) = u(x) + \lambda(K - \langle p,x \rangle) + \mu x$, где λ, μ - множители Лагранжа. Выпишем необходимые условия оптимальности (условия Куна-Таккера), которые благодаря условиям (2.5.2) будут и достаточными:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} - \lambda p + \mu = 0, \\ \lambda\left(K - \langle p, x\rangle\right) = 0, \\ \mu x = 0, \\ K - \langle p, x\rangle \geq 0, \\ x \geq 0, \lambda \geq 0, \mu \geq 0. \end{cases}$$

Не умаляя общности рассуждений, примем следующее предложение: потребитель приобретает все виды товаров, то есть $x_i > 0$ для всех $i = 1,...,n$ (в противном случае можно уменьшить размерность пространства R_+^n) и будем считать, что $p_i > 0, i = 1,...,n$. Тогда из третьего равенства следует $\mu = 0$ и необходимые и достаточные условия принимают вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} - \lambda p = 0, & (2.7.5) \\ \lambda\left(K - \langle p, x\rangle\right) = 0, & (2.7.6) \\ K - \langle p, x\rangle \geq 0, & (2.7.7) \\ \lambda > 0. & (2.7.8) \end{cases}$$

Эта система разрешима относительно $n+1$ неизвестных $x_1,...,x_n,\lambda$, так как имеется $n+1$ уравнение (2.7.5) и (2.7.6). Все переменные и частные производные здесь вычисляются в точке x^*. Значение λ соответствующее (в силу уравнений (2.7.5) и (2.7.6)) точке x^* обозначим λ^*.

Для пары (x^*, λ^*) из (2.7.5) получаем:

$$\frac{1}{p_i} \cdot \left.\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_{x=x^*} = \lambda^*, \quad i = 1,...,n. \qquad (2.5.9)$$

Отсюда следует важный вывод о том, что в условиях оптимального потребления (то есть в условиях набора x^*) отношение предельной полезности к цене одинаково для всех товаров. Исходя из (2.5.9) оптимальный множитель Лагранжа λ^* интерпретируется как предельная полезность одной единицы цены или просто предельная полезность денег.

Поэтому равенство $\frac{1}{p_1}\frac{\partial u}{\partial x_1}=\frac{1}{p_2}\frac{\partial u}{\partial x_2}=...=\frac{1}{p_n}\frac{\partial u}{\partial x_n}$ означает, что предельная полезность одной единицы денег одинаково для каждого товара и именно при таком распределении бюджета потребитель получает максимум полезности.

Для объяснения этого факта обратимся к рис.2.6.2. Если полезность от расходования дополнительного доллара на продукт питания выше, чем от доллара на одежду, то потребитель может увеличить полезность за счет роста расходов на питание. Таким образом, увеличение расходов на питание вызовет уменьшение расходов на одежду и это будет продолжаться до тех пор, пока предельная полезность на питание будет выше, чем на одежду. По закону Госсена предельная полезность продуктов питания постепенно снизится, вызывая рост расходов на одежду. Только тогда, когда предельная полезность дополнительного доллара расходов становится одинаковой для питания и одежды, будет достигнут максимум полезности.

Из равенства (2.5.9) следует так же вывод о том, что цены должны определяться исходя из предельной полезности товаров и денег: $p_i=\frac{1}{\lambda^*}\cdot\left.\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_{x=x^*}$, $i=1,...,n$.

Так как $\lambda^*>0$ (следует из (2.7.5)), то из (2.7.6) получаем $K-\langle p,x^*\rangle=0$.

Последнее означает, что точка максимума x^* задачи (2.7.1) - (2.7.2) лежит на бюджетной линии. В случае двух товаров имеем (см. рис. 2.7.2):

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1,x_2)+\lambda p_1=0\\ \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,x_2)+\lambda p_2=0.\\ K-p_1x_1-p_2x_2=0\end{cases}$$

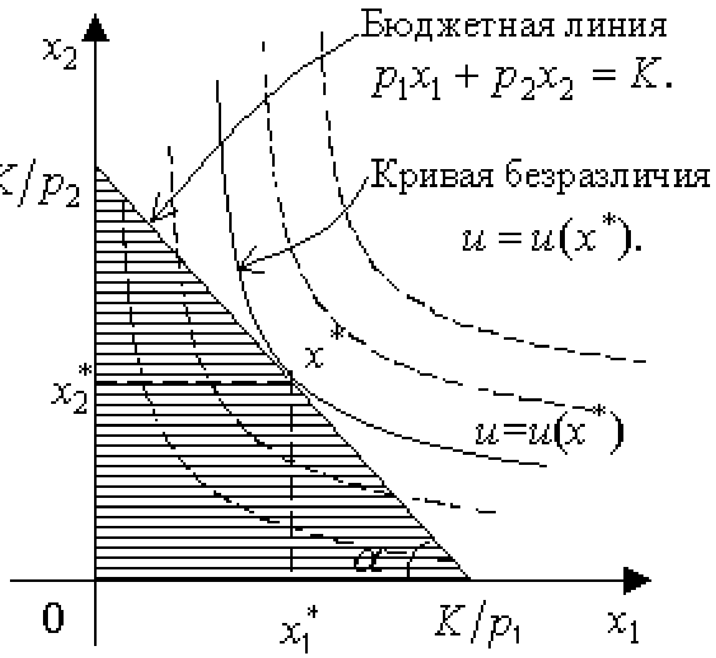

Рис. 2.7.2. Решение задачи потребителя

Наклон бюджетной линии равен $tg\alpha = -\dfrac{K/p_2}{K/p_1} = -\dfrac{p_1}{p_2}$.

Наклон кривой безразличия $u(x_1, x_2) = const$ находится из выражения $du = 0$, то есть $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \dfrac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 = 0$ и составляет $\dfrac{dx_2}{dx_1} = -\dfrac{\partial u/\partial x_1}{\partial u/\partial x_2}$.

Так как в точке касания x^* наклон кривой безразличия равен наклону бюджетной линии, то $\dfrac{dx_2}{dx_1} = -\dfrac{p_1}{p_2}$ или

$$\frac{\partial u/\partial x_1}{\partial u/\partial x_2} = \frac{p_1}{p_2}. \tag{2.7.10}$$

Как видно из (2.7.9) , и в частности, из (2.7.10),

$$S_{ij}\Big|_{x=x^*} = \frac{p_i}{p_j}, \quad i, j = 1, ..., n,$$

то есть в оптимальном наборе товаров $x^* = (x_1^*, ..., x_n^*)$ предельная норма замещения товара i товаром j оценивается отношением их цен (то есть зависит исключительно от их цен).

Как показывает рис. 2.7.2, оптимальное решение задачи (2.7.1)-(2.7.2) геометрически является точкой касания кривой безразличия и бюджетной линии. Для строго вогнутой функции полезности такая точка касания единственна (см. теорему 2.7.1).

С помощью рис. 2.7.2 можно анализировать различные последствия, связанные с изменением цен и дохода.

Будем считать, что все товары нормальные (качественные), то есть при увеличении дохода потребление увеличивается. Нас интересуют следующие вопросы:

а) изменение покупательской способности: как изменится спрос на товары при изменении их цен и неизменном доходе?
б) эффект замещения: как изменится потребление товаров, когда при изменении цен полезность должна оставаться на прежнем уровне?
в) эффект дохода: как изменится потребление товаров при изменении дохода потребителя и неизменных ценах?

Обсудим случай **а)**. Предположим, что снижается цена первого товара. Тогда бюджетная линия из положения АВ переходит в положение АС (рис. 2.7.3).

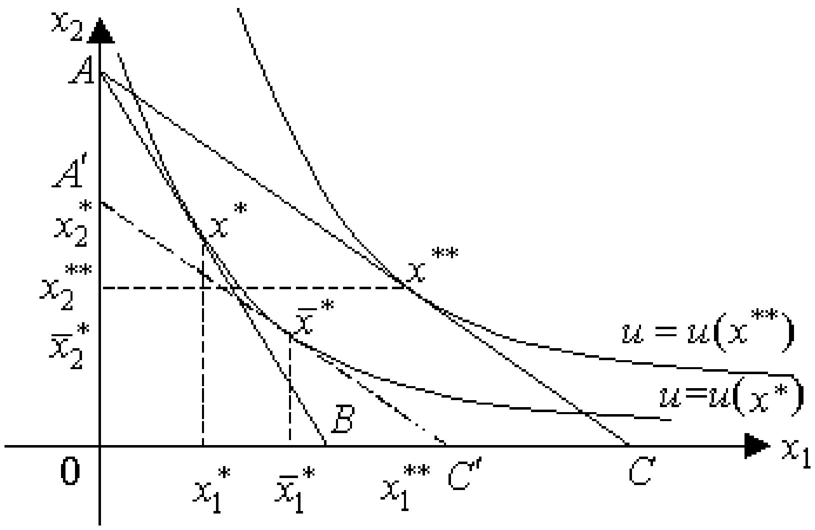

Рис. 2.7.3. Эффекты замещения и дохода

Так как кривые безразличия заполняют все пространство R_+^2, то обязательно найдется одна кривая безразличия, имеющая с бюджетной линией AC точку касания. Обозначим эту точку x^{**}. Она и будет оптимальным решением задачи потребителя при новых ценах. В точке x^{**} полезность будет больше чем в точке x^*, за счет увеличения на величину $x_1^{**} - x_1^* > 0$ потребления первого товара. Это стало возможным в результате роста покупательской способности потребителя (его реального дохода), благодаря снижению цены на первый товар. Что произошло при этом с объемом потребления второго товара? Он снизился на величину $x_2^{**} - x_2^* > 0$. Здесь отражена та реальность, когда люди потребляют большее количество (качественного) товара, который подешевел, и меньшее количество тех товаров, которые остались на прежнем ценовом уровне или подорожали.

Рассмотрим эффект замещения (случай б)). Предположим опять, что первый продукт стал более дешевым (по сравнению с тем, что было в точке x^*). Так как при этом полезность не должна меняться, то эффект замещения отражается смещением точки x^* вдоль кривой безразличия $u = u\left(x^*\right)$, то есть новое оптимальное решение $\bar{x}^*$ задачи потребителя будет находиться на одной кривой безразличия с точкой x^* (рис. 2.7.3). Бюджетная линия A'C', касающаяся кривой безразличия $u = u\left(x^*\right)$ в точке $\bar{x}^*$, параллельна изменившейся бюджетной линии AC и удалена от нее на величину изменения реального дохода (покупательской способности). Следовательно, эффект замещения представляется величиной $\bar{x}_1^* - x_1^* > 0$.

Проверив эффект дохода (случай в)) можно убедиться, что он характеризуется ростом потребления первого товара на величину $x_1^{**} - \bar{x}_1^* > 0$.

Итак, пользуясь решением задачи (2.7.1) - (2.7.2) можно анализировать различные ситуации и ответить на многие вопросы, круг и глубина которых зависит от творческих способностей исследователя.

В зависимости от условий конкретной задачи, свойств товаров и прочего в выражении (2.7.1) можно либо использовать одну из известных функций полезности, например, одну из функций (2.5.3), (2.5.4), (2.5.8)-(2.5.12), либо построить новую функцию полезности.

2.8. Связь потребления с уровнем дохода

В предыдущем параграфе спрос был определен как оптимальное решение x^* задачи потребителя (2.7.1)-(2.7.2) (см. определение 2.7.1). Спрос есть платежеспособная потребность, а платежеспособность предполагает соответствие цен и дохода. Поэтому мы можем утверждать, что общее решение задачи потребителя вычисляется как функция от цен и дохода: $x^* = x^*(p, K)$. Точно так же $\lambda^* = \lambda^*(p, K)$. К этому же выводу можно прийти исходя из вида задачи (2.7.1) - (2.7.2), так как p и K являются параметрами этой задачи.

Решение оптимизационной задачи - это лишь один из способов определения спроса, который схематично можно представить так: $(p, K) \xrightarrow{D} x^*(p, K)$, где D - отображение, представленное максимизацией функции u с учетом бюджетного ограничения. В общем случае D - это некоторая совокупность правил, с помощью которых потребитель определяет свой спрос.

Пусть $X \subset R_+^n$ - множество допустимых наборов товаров, $P \subset R_+^n$ - пространство цен. **Функцией спроса** (индивидуального потребителя) называется отображение D, которое каждой паре $(p, K) \in P \times R_+^1$ ставит в соответствие множество наиболее предпочтительных наборов товаров

$$D : P \times R_+^l \to 2^X, \qquad (2.8.1)$$

где 2^X - множество всех подмножеств множества X.

Это же отображение можно записать как $(p, K) \to D(p, K) \subset X$.

Любая точка $x^* \in D(p, K)$ называется спросом (при ценах p и доходе K).

Итак, в общем случае функция спроса - это многозначное отображение.

Действительно, если x^* - вектор спроса, а множество $D^* = \left\{ y \in X : y \sim x^* \right\}$ не пусто, то любая точка множества D^* является спросом.

Для отображения D, представленного задачей (2.7.1) - (2.7.2) , имеем:

$$D(p,K) = \begin{cases} \left\{ x^* \in B(p,K) : u\left(x^*\right) = \max\limits_{x \in B\left(p,K\right)} u(x) \right\}, \textit{если } \max \textit{ достигается} \\ \varnothing, \textit{ если } \max \textit{ не достигается.} \end{cases} \quad (2.8.2)$$

Если в (2.7.1) функция полезности u строго вогнута, то функция спроса D однозначна, т.е. множество $D(p,K)$ состоит из одной точки x^* максимума функции u: $x^* = D(p,K)$.

В случае неоднозначности функции спроса возникает дополнительная проблема выбора единственной точки $x^* = D(p,K)$.

Принимая во внимание тот факт, что доход потребителя зависит от цен товаров, $K = K(p)$, можно в пространстве $P \subset R_+^n$ определить функцию спроса $\tilde{D} : p \to 2^X$, так что $\tilde{D}\left(p\right) = D\left(p, K(p)\right)$.

При увеличении цен на товары, вообще говоря, доход потребителя должен быть компенсирован. Это требование формализуется как свойство **однородности первой степени** (или линейной однородности) функции дохода: для любых $\alpha \ge 0$ $K\left(\alpha \cdot p\right) = \alpha \cdot K\left(p\right)$.

Как должен при этом измениться спрос? Интуитивно ясно, что если повышение цен пропорциональным образом компенсируется повышением дохода, то спрос должен оставаться на прежнем уровне.

Если для любых $\alpha \ge 0$ $D\left(\alpha \cdot p, K\left(\alpha \cdot p\right)\right) = D\left(\alpha \cdot p, \alpha \cdot K\left(p\right)\right) = D\left(p, K\left(p\right)\right)$, то говорят, что функция спроса **однозначна нулевой степени** (относительно всех цен и дохода). Это есть инвариантность спроса относительно пропорционального повышения цен и дохода.

Для n функций спроса,

$$x_1^* = x_1^*(p, K), ..., x_n^* = x_n^*(p, K), \qquad (2.8.3)$$

полученных как решение задачи (2.7.1) - (2.7.2) , это свойство выполнено.

Действительно, при изменении цен в α раз задача (2.7.1)-(2.7.2) трансформируется в следующую:

$$u(x) \to \max$$

$$\langle \alpha p, x \rangle \le K(\alpha, p),$$
$$x \ge 0.$$

Оптимальной решение этой задачи обозначим $x^*\left(\alpha p, K\left(\alpha p\right)\right)$.

Бюджетное ограничение можно записать как $\alpha \langle p, x \rangle \le \alpha K(p)$. Так как $\alpha \ge 0$, то мы приходим к исходной задаче, так что $x_i^*\left(\alpha p, K\left(\alpha p\right)\right) = x_i^*\left(p, K\right),\ i = 1, ..., n$.

Для функции спроса однородной нулевой степени объем потребления зависит не от цен, как таковых, и дохода, а от отношений цен (**относительных цен**) и от отношения денежного дохода к цене (**реального дохода**). Выбирая какой-либо товар, например, товар $i = 1$, в качестве "единицы измерения" (эквивалента) и полагая коэффициент пропорциональности $\alpha = \dfrac{1}{p_1}$, функцию спроса можно записать в виде: $x_i^* = x_i^*\left(1, \dfrac{p_2}{p_1}, ..., \dfrac{p_n}{p_1}, \dfrac{K}{p_1}\right),\ i = 1, ..., n$, где $\dfrac{p_i}{p_1}$ - относительная цена, $\dfrac{K}{p_1}$ - реальный доход. В качестве коэффициента пропорциональности можно выбрать, например, величины $\alpha = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n} p_i}$ или $\alpha = \dfrac{1}{K}$.

Какова чувствительность спроса $x^*(p, K)$ на изменение цен и дохода? Как мы видели в пункте 2.6, она измеряется эластичностью.

Напомним, что эластичность спроса по цене показывает, какое процентное изменение спроса последует за однопроцентным увеличением цены товара: $\varepsilon_{p_i}\left(x_i^*\right)=\dfrac{\partial x_i^*}{\partial p_i}\cdot\dfrac{p_i}{x_i^*}$, $i=1,...,n$.

Так как $\varepsilon_{p_i}\left(x_i^*\right)=\dfrac{\partial x_i^*}{\partial p_i}\cdot\dfrac{p_i}{x_i^*}$, $i=1,...,n$ (закон спроса для нормальных товаров), $x_i^*>0$, $p_i\geq 0$, то $\varepsilon_{p_i}\left(x_i^*\right)\leq 0$ (см. также (2.6.4)). Так как при движении по кривой безразличия $u=u\left(x^*\right)$ величина $\dfrac{\partial x_i^*}{\partial p_i}$ меняется (за исключением некоторых тривиальных случаев) и тем более изменяются p_i и x^*, то эластичность спроса по цене в различных точках кривой безразличия различна.

Тривиальным является случай, когда функция спроса линейна: $x_i^*=a_i-b_i p_i$, $a_i,b_i-const$.

В этом случае $\dfrac{\partial x_i^*}{\partial p_i}$ постоянна и равна $-b_i$, однако, эластичность не постоянна, ввиду непостоянства отношения $\dfrac{p_i}{x_i^*}$.

Например (рис.2.8.1), в случае одного товара:

$$\varepsilon_p\left(x^*\right)\Big|_{(a,0)}=0,$$

$$\varepsilon_p\left(x^*\right)\Big|_{\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2b}\right)}=-1,$$

$$\varepsilon_p\left(x^*\right)\Big|_{\left(0,\frac{a}{b}\right)}=-\infty.$$

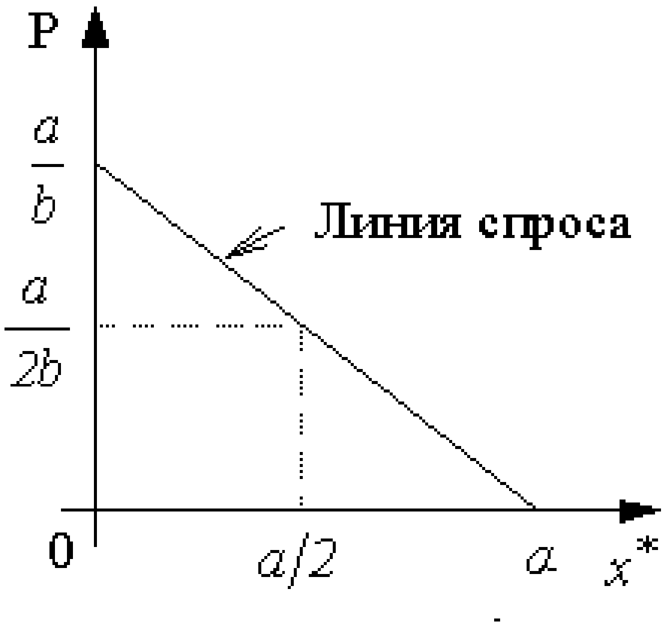

Рис. 2.8.1. Линейная функция спроса

Имеется еще два тривиальных (особых) случая эластичности спроса по цене, показанных на рис. 2.8.2.

В случае, изображенном на рис. 2.8.2(а) $\varepsilon_p\left(x^*\right)=-\infty$ - имеется только одна цена p^*, по которой потребитель будет приобретать товар; даже при малейшем увеличении цены выше этого уровня требуемое количество товара упадет до нуля, и любое снижение цены приведет к неограниченному росту спроса.

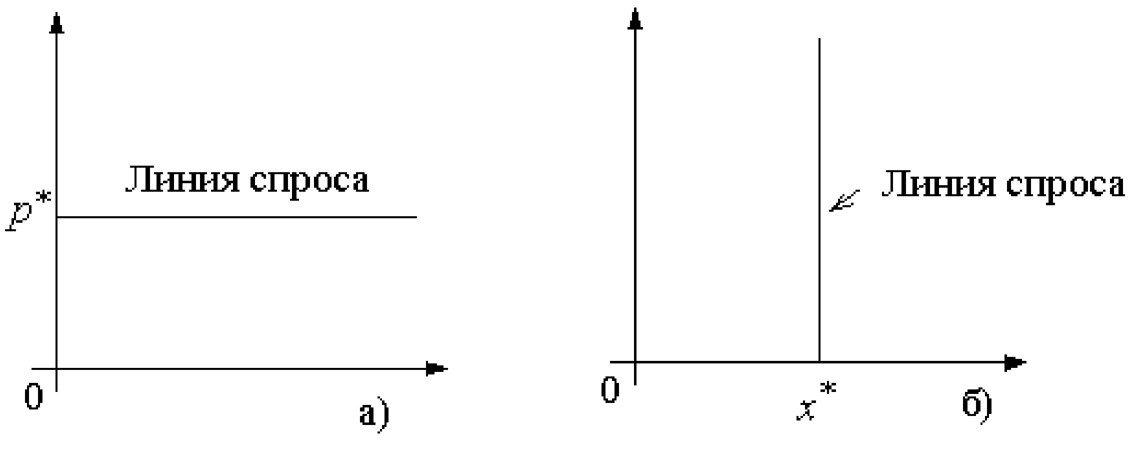

Рис. 2.8.2. Особые случаи эластичности спроса по цене

Кривая же спроса, изображенная на рис.2.8.2(б) совершенно неэластична. Потребитель приобретет фиксированное количество товара x^* независимо от цены.

Координатная запись функции спроса (2.8.3) $x_i^* = x_i^*\left(p_1,...p_n,K\right)$ говорит о том, что спрос на один вид товара зависит, вообще говоря, от цен и других товаров.

Процентное изменение количества товара вида i при однопроцентном увеличении цены товара вида j $(i \neq j)$ называется **перекрестной эластичностью** спроса по цене: $\varepsilon_{p_j}\left(x_i^*\right) = \lim\limits_{\Delta p_j \to 0}\left(\frac{\Delta x_i}{x_i^*}\Big/\frac{\Delta p_j}{p_j}\right) = \frac{\Delta p_j}{x_i^*}\cdot\lim\limits_{\Delta p_j \to 0}\left(\frac{\Delta x_i^*}{\Delta p_j}\right)$

или

$$\varepsilon_{p_j}\left(x_i^*\right) = \frac{\partial x_i^*}{\partial p_j}\cdot\frac{p_j}{x_i^*}. \qquad (2.8.4)$$

Для взаимозаменяемых товаров (таких, как чай и кофе) повышение цены товара j увеличивает спрос на товар i, поэтому перекрестная эластичность положительна. Для взаимодополняющих друг друга товаров (таких, как кофе и сахар) повышение цены одного товара влечет понижение спроса на другой, поэтому перекрестная эластичность отрицательна.

До сих пор мы говорили о **точечной эластичности**, т.е. о эластичности, измеряемой в отдельной точке кривой спроса. Если требуется измерение эластичности на отрезке (точнее, на дуге) кривой спроса, то применяют **дуговую эластичность** спроса по цене:

$$\bar{\varepsilon}_{p_i}\left(x_i^*\right) = \frac{\Delta x_i^*}{\Delta p_i}\cdot\frac{\bar{p}_i}{\bar{x}_i^*}, \qquad (2.8.5)$$

где $\Delta x_i^* = x_i^{*\prime\prime} - x_i^{*\prime}$, $\Delta p_i = p_i'' - p_i'$, $\bar{p}_i = \frac{p_i' + p_i''}{2}$, $\bar{x}_i^* = \frac{x_i^{*\prime} + x_i^{*\prime\prime}}{2}$, $\left(p_i', x_i^{*\prime}\right)$, $\left(p'', x_i^{*\prime\prime}\right)$ - цена и количество товара в начальной (конечной) точке рассматриваемой дуги кривой спроса. Дуговая эластичность тем точнее, чем ближе друг к другу точки $\left(p_i', x_i^{*\prime}\right)$ и $\left(p'', x_i^{*\prime\prime}\right)$. Устремляя расстояние между ними к нулю, очевидно, мы получим формулу точечной эластичности.

Задача 2.8.1. Пусть кривая спроса имеет вид $p = 200 - \left(x^*\right)^2$. Требуется вычислить эластичность спроса по цене при изменении последней от $p' = 136$ до $p'' = 119$.

Решение: Нарисуем кривую спроса (см. рис.2.8.3)

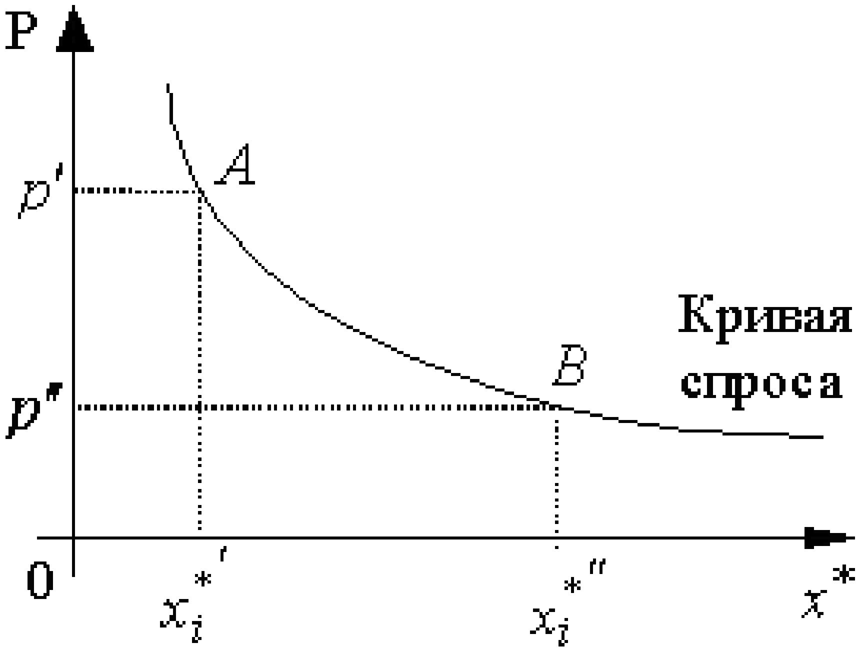

Рис. 2.8.3. Схема задачи 2.8.1

Прежде всего, пользуясь формулой спроса, найдем соответствующие этим ценам количества товаров:

$x^{*\prime} = \pm\sqrt{200 - p'} = \pm\sqrt{200 - 136}$,

$x^{*\prime\prime} = \pm\sqrt{200 - p''} = \pm\sqrt{200 - 119}$.

Отбрасывая отрицательные значения корней, как не имеющих смысла, найдем: $x^{*\prime} = 8$, $x^{*\prime\prime} = 9$.

Теперь наша задача сводится к вычислению дуговой эластичности спроса по цене для участка (дуги) кривой спроса $p = 200 - \left(x^*\right)^2$ от точки *A=(136,8)* до точки *B=(119,9)*.

Пользуясь формулой (2.8.5), получаем: $\bar{\varepsilon}_p\left(x^*\right)=\frac{1}{17}\cdot\frac{127,5}{8,5}=0,88$.

Для сравнения вычислим точечную эластичность в точке A:

$$\varepsilon_p\left(x^*\right)\Big|_{(136,8)}=\frac{dx^*}{dp}\Big|_{(136,8)}\cdot\frac{136}{8}=\frac{d\left(\sqrt{200-p}\right)}{dp}\Bigg|_{p=136}\cdot\frac{136}{8}=\frac{1}{2\sqrt{200-136}}\cdot\frac{136}{8}=$$

$$=\frac{1}{16}\cdot\frac{136}{8}=\frac{136}{128}=1,0625.$$

(Здесь учли неравенство $x^*>0$).

Представляет определенный интерес также **эластичность спроса по доходу**. Это есть процентное изменение количества требуемого товара (спроса) при однопроцентном изменении дохода: $\varepsilon_k\left(x^*\right)=\frac{\partial x^*}{\partial K}\cdot\frac{K}{x^*}$.

Пользуясь схемой проведенного выше анализа эластичности спроса по цене, можно провести анализ эластичности спроса по доходу.

2.9. Парадокс Гиффина. Оптимизация потребительского предпочтения

Для оценки различных ситуаций в сфере потребления применяются предельный спрос и предельная полезность денег по ценам ($\frac{\partial x_i^*}{\partial p_i}$ и $\frac{\partial \lambda^*}{\partial p_i}$) и доходу ($\frac{\partial x_i^*}{\partial K}$ и $\frac{\partial \lambda^*}{\partial K}$). Поэтому желательно иметь формулы для их вычисления. Если общее решение задачи (2.7.1)-(2.7.2) для конкретной функции полезности u найдено в виде функций

$$x_1^*(p,K),..., x_n^*(p,K), \lambda^*(p,K) \tag{2.9.1}$$

от $n+1$ параметра $p_1,..., p_n, K$, то требуемые предельные величины можно найти, вычисляя частные производные функций (2.9.1) по p_i и K. Но эти же предельные величины можно найти и не решая задачу (2.7.1) - (2.7.2) , а сразу из системы необходимых и достаточных условий оптимальности (2.7.5) - (2.7.8).

Зная теперь, что оптимальное решение x^* задачи (2.7.1) - (2.7.2) лежит на бюджетной линии (см.рис. 2.7.2), мы можем априори считать, что доход K будет использован полностью.

Тогда в (2.7.2) будет строгое равенство, и система (2.7.5) - (2.7.8) примет вид:

$$\begin{cases} K - \langle p, x \rangle = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial p} - \lambda p = 0. \end{cases} \tag{2.9.2}$$

Так как эта система зависит от параметров p, K и содержит неизвестные λ, x, то нам удобно ввести обозначения:

$$\begin{aligned} \varphi^1(\lambda, x, p, K) &= K - \langle p, x \rangle, \\ \varphi^2(\lambda, x, p, K) &= \frac{\partial u}{\partial x} - \lambda p. \end{aligned} \tag{2.9.3}$$

Как и ранее, будем предполагать, что функция u дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет условиям (2.5.1) - (2.5.2) .

Система (2.9.2) будет разрешимой относительно $n+1$ переменных $x_1,...,x_n,\lambda$, если определитель матрицы Якоби (матрица первых производных системы (2.9.2)) $I=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi^1}{\partial\lambda} & \dfrac{\partial\varphi^1}{\partial x} \\ \dfrac{\partial\varphi^2}{\partial\lambda} & \dfrac{\partial\varphi^2}{\partial x} \end{pmatrix}$ отличен от нуля.

Покажем, что это так и есть. С учетом обозначений (2.9.3) получаем $I=\begin{pmatrix} 0 & -p \\ -p', & H \end{pmatrix}$, где p' - транспонированный вектор p, H - матрица Гессе (матрица вторых производных системы (2.9.2)).

В координатной форме $I=\begin{pmatrix} 0 & -p_1 & \dots & -p_n \\ -p_1 & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} & \dots & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -p_n & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$ - есть "окаймляющая" ценами товаров матрица Гессе.

По условию (2.5.2) матрица Гессе отрицательно определена и поэтому невырожденна.

Следовательно, определитель матрицы Якоби не равен нулю, и система (2.9.2) имеет решение (по λ и x).

Перейдем к вычислению требуемых предельных величин.

1. Вычисление предельных величин $\dfrac{\partial x_i^*}{\partial K}$ и $\dfrac{\partial \lambda^*}{\partial K}$ (влияние дохода на x^* и λ^*).

Подставим (2.9.1) в систему (2.9.2):

$$\begin{cases} K - \left\langle p, x^*(p,K) \right\rangle = 0 \\ \dfrac{\partial u\left(x^*(p,K)\right)}{\partial x} - \lambda^*(p,K)\,p = 0. \end{cases} \qquad (2.9.4)$$

и продифференцируем ее по K : $\begin{cases} 1 - p\dfrac{\partial x^*}{\partial K} = 0 \\ H\dfrac{\partial x^*}{\partial K} - p\dfrac{\partial \lambda^*}{\partial K} = 0. \end{cases}$

Перепишем эту систему в форме, удобной для перехода к матричной записи: $\begin{cases} -p\dfrac{\partial x^*}{\partial K} = -1 \\ -p\dfrac{\partial \lambda^*}{\partial K} + H\dfrac{\partial x^*}{\partial K} = 0. \end{cases}$

В матричной форме эта система имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & -p \\ -p' & H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \lambda^*}{\partial K} \\ \dfrac{\partial x^*}{\partial K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (2.9.5)$$

где $\dfrac{\partial x^*}{\partial K} = \left(\dfrac{\partial x_1^*}{\partial K}, \ldots, \dfrac{\partial x_n^*}{\partial K} \right)$.

Решая систему (2.9.5), можно найти искомые предельные величины по доходу.

2. Вычисление предельных величин $\dfrac{\partial x_i^*}{\partial p_i}$, $\dfrac{\partial \lambda^*}{\partial p_i}$ (влияние цены p_i на x^* и λ^* при условии постоянства остальных цен p_j $(j \neq i)$ и дохода K).

Дифференцируя систему (2.9.4) по p_i, получаем (в координатной форме):

$$
\begin{cases}
-x_i^* - \sum\limits_{j=1}^{n} p_j \dfrac{\partial x_j^*}{\partial p_i} = 0 \\
\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} \cdot \dfrac{\partial x_k^*}{\partial p_i} - p_j \dfrac{\partial \lambda^*}{\partial p_i} - \lambda^* \delta_{ji} = 0, \quad j = 1,\dots,n,
\end{cases}
\tag{2.9.6}
$$

где $\delta_{ji} = \begin{cases} 1, & если \quad j = i \\ 0, & если \quad j \neq i \end{cases}$ - символ Кронекера.

Запишем систему (2.9.6) сначала в векторной, затем в матричной форме: $\begin{cases} -p\dfrac{\partial x^*}{\partial p} = x^*, \\ -p'\dfrac{\partial \lambda^*}{\partial p} + H\dfrac{\partial x^*}{\partial p} = \lambda^* E_n; \end{cases}$

$$
\begin{pmatrix} 0 & -p \\ -p' & H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \lambda^*}{\partial p} \\ \dfrac{\partial x^*}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^* \\ \lambda^* E_n \end{pmatrix},
\tag{2.9.7}
$$

где $\dfrac{\partial x^*}{\partial K} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1^*}{\partial p_1} & \dots & \dfrac{\partial x_1^*}{\partial p_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial x_n^*}{\partial p_1} & \dots & \dfrac{\partial x_n^*}{\partial p_n} \end{pmatrix}$, $\quad \dfrac{\partial \lambda^*}{\partial K} = \left(\dfrac{\partial \lambda^*}{\partial p_1}, \dots, \dfrac{\partial \lambda^*}{\partial p_n} \right)$, E_n - единичная $n \times n$ - матрица ($E_n = \|\delta_{ij}\|$ - матрица с нулевыми элементами за исключением диагональных, равных 1) .

Решая систему (2.9.7), можно найти искомые предельные величины по цене i-го товара.

Вычисление предельных величин $\left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j}\right)_{comp}$, $\left(\frac{\partial \lambda^*}{\partial p_j}\right)_{comp}$ (влияние цен $p_1,\dots,p_n$ на x^* и λ^* при условии компенсации дохода так, чтобы полезность была неизменной).

Используя систему (2.9.2), найдем полные дифференциалы функций u и K:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx = \lambda\left\langle p, dx\right\rangle,$$

$$dK = d\left\langle p, x\right\rangle = \left\langle p, dx\right\rangle + \left\langle dp, x\right\rangle.$$

Для того чтобы полезность оставалась неизменной, т.е. чтобы $du = 0$, необходимо, чтобы $p \cdot dx = 0$ (так как $\lambda > 0$), а это справедливо, если $dK = \left\langle dp \cdot x\right\rangle = dp_1 x_1 + dp_2 x_2 + \dots + dp_n x_n$. Содержательно это означает, что при возрастании, например, цены p_i до $p_i + dp_i$ приращение дохода, обеспечивающее неизменность полезности, равно $dK = dp_i \cdot x_i$.

Дифференцируя (2.9.4) по p_i, когда $dK = dp_i \cdot x_i$, получаем:

$$\begin{cases} -\sum\limits_{j=1}^{n} p_j \dfrac{\partial x_j^*}{\partial p_i} = 0, \\ \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} \cdot \dfrac{\partial x_k^*}{\partial p_i} - p_j \dfrac{\partial \lambda^*}{\partial p_i} - \lambda^* \delta_{ji} = 0, \quad i = 1,\dots,n. \end{cases}$$

Поясним, что первое уравнение этой системы получается из (2.9.6) при условии $\left\langle p, dx\right\rangle = \sum\limits_{j=1}^{n} p_j \dfrac{\partial x_j^*}{\partial p_i} = 0,$ так как в этом случае из (2.9.6) следует $x_i^* = 0$.

В векторной форме эта система имеет вид:

$$\begin{cases} -p\left(\dfrac{\partial x_i^*}{\partial p}\right)_{comp} = 0, \\ -p\left(\dfrac{\partial \lambda^*}{\partial p}\right)_{comp} + H\left(\dfrac{\partial x^*}{\partial p}\right)_{comp} = \lambda^* E_n, \end{cases}$$

где $(\bullet)_{comp}$ - означает компенсированное изменение цен.

Запишем теперь в матричную форму:

$$\begin{pmatrix} 0 & -p \\ -p' & H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\dfrac{\partial \lambda^*}{\partial p}\right)_{comp} \\ \left(\dfrac{\partial x^*}{\partial p}\right)_{comp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda^* E_n \end{pmatrix}. \qquad (2.9.8)$$

Решая систему (2.9.8), можно найти искомые предельные величины при компенсированном изменении цен.

Все три матричных (2.9.5), (2.9.7) и (2.9.8) могут быть объединены в одно матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 0 & -p \\ -p' & H \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \lambda^*}{\partial K} & \dfrac{\partial \lambda^*}{\partial p} & \left(\dfrac{\partial \lambda^*}{\partial p}\right)_{comp} \\ \dfrac{\partial x^*}{\partial K} & \dfrac{\partial x^*}{\partial p} & \left(\dfrac{\partial x^*}{\partial p}\right)_{comp} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & x^* & 0 \\ 0 & \lambda^* E_n & \lambda^* E_n \end{pmatrix}. \qquad (2.9.9)$$

Это уравнение называется **основным матричным уравнением теории потребления**.

Матрица $\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \lambda^*}{\partial K} & \dfrac{\partial \lambda^*}{\partial p} & \left(\dfrac{\partial \lambda^*}{\partial p}\right)_{comp} \\ \dfrac{\partial x^*}{\partial K} & \dfrac{\partial x^*}{\partial p} & \left(\dfrac{\partial x^*}{\partial p}\right)_{comp} \end{bmatrix}$ называется матрицей сравнительной статики, а ее элементы - **показателями сравнительной статики**. Такое название объясняется тем, что эти показатели характеризуют чувствительность x^* и λ^* к изменениям параметров p и K путем сравнения положения оптимума в статике до и после того, как эти параметры изменились.

Поскольку левая часть уравнения (2.9.9) есть невырожденная матрица (ибо такой является Якобиан), то оно может быть разрешено относительно показателей сравнительной статики. Решение уравнения (2.9.9) связано с понятием уравнения Слуцкого.

Основное матричное уравнение (2.9.9) можно записать следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial\lambda^*}{\partial K} & \frac{\partial\lambda^*}{\partial p} & \left(\frac{\partial\lambda^*}{\partial p}\right)_{comp} \\ \frac{\partial x^*}{\partial K} & \frac{\partial x^*}{\partial p} & \left(\frac{\partial x^*}{\partial p}\right)_{comp} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -p \\ -p' & H \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & x^* & 0 \\ 0 & \lambda^* E_n & \lambda^* E_n \end{pmatrix}. \tag{2.9.10}$$

Решение этой системы относительно показателей сравнительной статики по спросу имеет вид:

$$\frac{\partial x^*}{\partial K} = -\mu H^{-1} p', \tag{2.9.11}$$

$$\frac{\partial x^*}{\partial p} = \left(\mu H^{-1} p'\right) x^* + \left(\mu H^{-1} p'\right) \cdot \left(p' H^{-1} \lambda^*\right) + H^{-1} \lambda^*, \tag{2.9.12}$$

$$\left(\frac{\partial x^*}{\partial p}\right)_{comp} = \left(\mu H^{-1} p'\right) \cdot \left(p' H^{-1} \lambda^*\right) + H^{-1} \lambda^*. \tag{2.9.13}$$

Здесь H^{-1} - обратная матрица Гессе, а $\mu = -\frac{1}{pH^{-1}p'} > 0$ - скалярная величина.

Можно показать, что $\mu = -\frac{\partial \lambda^*}{\partial K} = -\frac{\partial}{\partial K}\left(\frac{\partial u\left(x^*\left(p,K\right)\right)}{\partial K}\right) = -\frac{\partial^2 u^*}{\partial K^2}$, поэтому скаляр μ можно интерпретировать как коэффициент убывания предельной полезности денег.

Сравнивая (2.9.12) и (2.9.13) замечаем, что $\frac{\partial x^*}{\partial p} = \left(\mu H^{-1} p'\right) x^* + \left(\frac{\partial x^*}{\partial p}\right)_{comp}$.

Сопоставляя это уравнение с (2.9.11), получаем,

$$\frac{\partial x^*}{\partial p} = \left(\frac{\partial x^*}{\partial p}\right)_{comp} + \frac{\partial x^*}{\partial K} \cdot x^*. \tag{2.9.14}$$

Равенство (2.9.14) называется **уравнением Слуцкого**. Это же уравнение называют основным уравнением теории ценности.

В координатной форме уравнение Слуцкого выглядит так:

$$\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i} = \left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i}\right)_{comp} - \frac{\partial x_j^*}{\partial K} \cdot x_i^*, \quad i, j = 1,...,n. \tag{2.9.15}$$

Левую часть уравнения принято называть **общим эффектом** (от влияния цены на спрос), первое слагаемое в правой части - **влиянием замены** (т.е. компенсированного изменения цены на спрос), второе слагаемое - **влиянием дохода** (влияние изменения дохода на спрос).

Перепишем уравнение следующим образом:

$$\left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i}\right)_{comp} = \frac{\partial x_j^*}{\partial p_i} + \frac{\partial x_j^*}{\partial K} \cdot x_i^*, \quad i, j = 1,...,n. \tag{2.9.16}$$

Из (2.9.13) следует, что матрица влияния замены симметрична и отрицательно определена. Из отрицательной определенности следует

$$\left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_j}\right)_{comp} < 0, \quad j = 1,...,n. \tag{2.9.17}$$

Отсюда вывод - компенсированное возрастание цены товара приводит к уменьшению спроса на этот товар.

Их симметричности матрицы влияния замены и уравнения (2.9.16) получаем: $\dfrac{\partial x_j^*}{\partial p_i} + \dfrac{\partial x_j^*}{\partial K} \cdot x_i^* = \dfrac{\partial x_i^*}{\partial p_j} + \dfrac{\partial x_i^*}{\partial K} \cdot x_j^*, \quad i, j = 1, \ldots, n$.

Поэтому уравнение Слуцкого, в частности, означает, что:

$$\frac{\partial x_j^*}{\partial p_j} = \left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_j}\right)_{comp} - \frac{\partial x_j^*}{\partial K} \cdot x_j^*, \quad j = 1, \ldots, n. \qquad (2.9.18)$$

Здесь производная $\dfrac{\partial x_j^*}{\partial p_j}$ называется влиянием на спрос (на j-й товар) изменения частной цены (цены j-го товара). Равенство (2.9.18) используют для характеристики типов товаров.

Определение 2.9.1. Товар вида j называется **нормальным**, если $\dfrac{\partial x_j^*}{\partial p_j} < 0$; **товаром Гиффина**, если $\dfrac{\partial x_j^*}{\partial p_j} > 0$; **ценным**, если $\dfrac{\partial x_j^*}{\partial K} > 0$; **малоценным**, если $\dfrac{\partial x_j^*}{\partial K} < 0$. Два товара i и j являются **взаимозаменяемыми**, если $\left(\dfrac{\partial x_i^*}{\partial p_j}\right)_{comp} > 0$; **взаимодополняемыми**, если $\left(\dfrac{\partial x_i^*}{\partial p_j}\right)_{comp} < 0$.

Как следует из (2.9.17) и (2.9.18), должно быть $\dfrac{\partial x_j^*}{\partial p_j} + \dfrac{\partial x_j^*}{\partial K} \cdot x_j^* < 0$.

С учетом условия $x_j^* \geq 0$ приходим к следующим выводам:

а) если $\frac{\partial x_j^*}{\partial p_j} > 0$, то обязательно $\frac{\partial x_j^*}{\partial K} < 0$;

б) если $\frac{\partial x_j^*}{\partial K} > 0$, то обязательно $\frac{\partial x_j^*}{\partial p_j} < 0$.

Отсюда, товар Гиффина не может быть ценным, т.е. он обязательно малоценный.

В общем случае каждый товар попадает в одну из следующих категорий.

1. Нормальный и ценный ($\frac{\partial x_j^*}{\partial p_j} < 0$; $\frac{\partial x_j^*}{\partial K} > 0$);

2. Нормальный и малоценный ($\frac{\partial x_j^*}{\partial p_j} < 0$; $\frac{\partial x_j^*}{\partial K} < 0$);

3. Товар Гиффина и малоценный ($\frac{\partial x_j^*}{\partial p_j} > 0$; $\frac{\partial x_j^*}{\partial K} < 0$).

Существование товара Гиффина кажется не вполне реальным. Действительно, его определение противоречит закону о спросе (спрос есть убывающая функция цены). Однако когда какой-либо популярный среди населения товар продается по слишком низкой цене, появляется подозрение о его качестве. Это может оказаться причиной снижения спроса на него. Последующее же поднятие цены может повысить спрос на этот товар.

Нормальный и ценный товар отличается от нормального малоценного товара высоким качеством. Например, фрукты южных сортов по питательным и вкусовым качествам превосходят северные сорта, но они и дороже; масло дороже маргарина, так как качество его выше; вычислительная техника завода-изготовителя, как правило, качественнее и поэтому дороже, чем та же техника, но лицензионной сборки и т.д.).

Умножим обе части равенства (2.9.13) на вектор p:

$$\left(\frac{\partial x^*}{\partial p}\right)_{comp} \cdot p' = -p\left(\frac{1}{pH^{-1}p'} \cdot \mu H^{-1}p'\right) \cdot \left(pH^{-1}\lambda^*\right) + pH^{-1}\lambda^* =$$

$$= -pH^{-1}\lambda^* + pH^{-1}\lambda^* = 0.$$

Следовательно, в координатной форме имеем:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i}\right)_{comp} \cdot p_i' = 0, \quad i = 1,...,n. \tag{2.9.19}$$

Принимая во внимание положительность всех цен и неравенство (2.9.17), приходим к выводу о том, что для каждого j существует i ($i \neq j$) такое, что $\left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i}\right)_{comp} > 0$.

Таким образом, в наборе $x^* = \left(x_1^*,...,x_n^*\right)$ каждому товару соответствует по крайней мере один такой товар, который составляет с ним взаимозаменяемую пару.

Из уравнения Слуцкого (2.9.14) и равенства (2.9.19) получаем $\frac{\partial x^*}{\partial p} \cdot p' = -\frac{\partial x^*}{\partial K}\left\langle p, x^*\right\rangle$ или $\frac{\partial x^*}{\partial p} \cdot p' + \frac{\partial x^*}{\partial K}K = 0$.

Запишем это равенство в координатной форме $\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i}p_i + \frac{\partial x_j^*}{\partial K}K = 0, \quad i = 1,...,n$ и разделим обе части каждого из n равенств на $x_j^* > 0$: $\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i} \cdot \frac{p_i}{x_j^*} + \frac{\partial x_j^*}{\partial K} \cdot \frac{K}{x_j^*} = 0, \quad j = 1,...,n$.

В обозначениях эластичности (см. (2.6.2) , (2.8.4)) имеем: $\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_{p_i}\left(x_j^*\right) + \varepsilon_K\left(x_j^*\right) = 0, \quad i = 1,...,n$.

Отсюда вывод: для каждого товара j сумма всех n перекрестных эластичностей спроса по цене и эластичности спроса по доходу должна быть равна нулю, т.е. сумма всех эластичностей по цене равна отрицательной эластичности по доходу.

Умножая (2.9.11) на вектор цен p, получим $p \cdot \frac{\partial x^*}{\partial K} = \frac{pH^{-1}p'}{pH^{-1}p'} = 1$ - **условие агрегации Энгеля**.

В координатной форме имеем:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \cdot \frac{\partial x_j^*}{\partial K} = 1. \qquad (2.9.20)$$

Отсюда должно быть $\frac{\partial x_j^*}{\partial K} > 0$ для некоторого $j = 1,...,n$.

Следовательно, в наборе $x^* = \left(x_1^*,...,x_n^*\right)$ все товары одновременно не могут быть малоценными.

С учетом (2.9.19) и (2.9.20) из уравнения Слуцкого можно получить $p\frac{\partial x^*}{\partial p} + x^* = 0$ **условие агрегации Курно**.

В координатной форме имеем: $x_i^* = -\sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial x_j^*}{\partial p_i}, \quad i = 1,...,n$.

Отсюда вывод: значение спроса на товар вида i равно отрицательной взвешенной сумме изменений спроса на все товары по отношению к цене товара i , в которой в качестве весов выступают цены товаров.

Изучая уравнение Слуцкого можно получить и другие выводы по интересующим исследователя проблемам теории ценности и потребления.

В завершение параграфа приведем геометрическую интерпретацию изложенного выше материала для $n=2$ (рис. 2.9.1). Пусть p_1 возрастает до $\bar{p}_1$, а $\bar{x}^*$ - решение задачи потребителя для параметров $\bar{p}_1$, p_2, K. Тогда $\bar{x}^*$ лежит в пересечении бюджетной линии, проходящей через точки $\left(\frac{K}{p_1}, 0\right)$ и

$\left(0, \dfrac{K}{p_2}\right)$ с кривой безразличия $u = u\left(\bar{x}^*\right)$. Общий эффект $\dfrac{\partial x_1^*}{\partial p_1}$ изменения p_1 выражается отрезком $\left[x^*, \bar{x}^*\right]$.

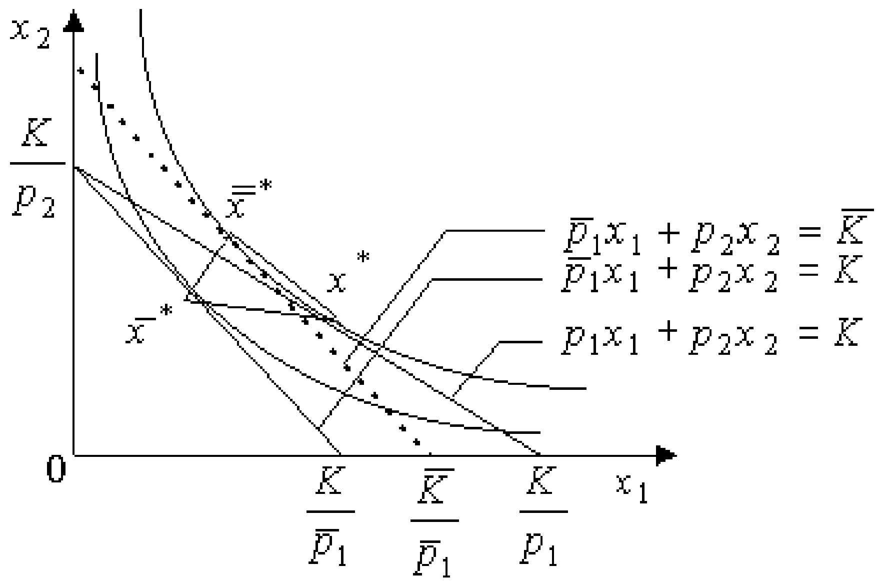

Рис. 2.9.1. Геометрическая иллюстрация уравнения Слуцкого

Точка $\bar{x}^*$ лежит левее x^* (т.к. $\bar{x}_1^* < x^*$ из-за $\bar{p}_1 > p_1$), т.е. при возрастании цены первого товара спрос на него снизился. Следовательно, товар 1 нормален $\left(\dfrac{\partial x_1^*}{\partial p_1} < 0\right)$. Предположим теперь, что происходит компенсированное увеличение цены p_1 до $\bar{p}_1$. Через $\bar{K}$ обозначим соответствующее компенсированное изменение (увеличение) дохода, т.е. $u\left(x^*\left(\bar{p}_1, p_2, \bar{K}\right)\right) = u\left(x^*\left(p_1, p_2, K\right)\right)$.

Геометрически бюджетная линия изменится (пройдет через $\left(\dfrac{\bar{K}}{p_1}, 0\right)$, $\left(0, \dfrac{\bar{K}}{p_2}\right)$), а точка $\bar{x}^* = x^*\left(\bar{p}_1, p_2, \bar{K}\right)$ будет лежать в пересечении этой бюджетной линии с кривой безразличия $u = u\left(x^*\right)$ (по определению компенсированного изменения цены p_1).

Так как бюджетная линия $\bar{p}_1 x_1 + p_2 x_2 = \bar{K}$ параллельна бюджетной линии $\bar{p}_1 x_1 + p_2 x_2 = K$ (один и тот же наклон $\frac{\bar{p}_1}{p_2}$), то точка $\bar{\bar{x}}^*$ будет лежать левее точки x^*. Это подтверждение того, что влияние замены отрицательно. Влияние замены ($\left(\frac{\partial x_1^*}{\partial p_1}\right)_{comp}$) выражается отрезком $\left[x^*, \bar{\bar{x}}^*\right]$, а влияние дохода $\left(\frac{\partial x_1^*}{\partial K}\right)$ выражается отрезком $\left[\bar{\bar{x}}^*, \bar{x}^*\right]$. Точка $\bar{x}^*$ лежит левее точки $\bar{\bar{x}}^*$ ($\bar{x}_1^* < \bar{\bar{x}}_1^*$), т.е. при возрастании дохода (от K до $\bar{K}$) спрос на товар 1 увеличился. Следовательно, товар 1 является ценным ($\frac{\partial x_1^*}{\partial K} > 0$).