Содержание

Глава 4. Теория игр.

Введение

Организационно-экономическое моделирование — это наука, которая использует математический аппарат в качестве метода исследования экономических систем и явлений.

Таким образом, объектом изучения (или предметной областью) организационно-экономического моделирования является экономика.

Как и другие науки, изучающие экономику в целом или ее составные части, математическая экономика пользуется определенной методологией и имеет свою специфику. Специфика организационно-экономического моделирования, его методологическая особенность заключается в том, что оно изучает не сами экономические объекты и явления как таковые, а их **математические модели**.

Математической моделью реального объекта (явления) называется ее упрощенная, идеализированная схема, составленная с помощью математических символов и операций (соотношений).

Цель организационно-экономического моделирования - получение объективной экономической информации и выработка имеющих важное практическое значение рекомендаций.

Формально организационно-экономическое моделирование можно отнести как к экономической, так и к математической наукам. В первом случае ее следует понимать как тот раздел экономики, который изучает количественные и качественные категории, а также поведенческие аспекты экономических субъектов. Считая же организационно-экономическое моделирование одним из направлений математики, можно отнести ее к тем разделам прикладной математики, которые занимаются оптимизационными задачами и задачами принятия решения.

По своей природе экономика — самая близкая к математике из неестественных наук. Уже в определении самого понятия экономики, ее главных задач можно увидеть математические понятия и терминологию.

Действительно, экономика - это общественная наука об использовании ограниченных ресурсов с целью максимального удовлетворения неограниченных материальных потребностей населения. Центральные проблемы экономической науки — рациональное ведение хозяйства, оптимальное распределение ограниченных ресурсов, изучение экономических механизмов управления, разработка методов экономических расчетов — по существу являются задачами, решаемыми в рамках математических наук. Количественные и качественные методы математики являются наилучшим вспомогательным аппаратом для получения ответов на основные вопросы экономики:

- что должно производиться (т. е. какие товары и услуги и в каком количестве надо производить)?
- как будут производиться товары (т. е. кем и с помощью каких ресурсов и какой технологии)?
- для кого предназначены эти товары (т.е. кем и как будут потребляться эти товары)?

Наконец, задача экономической теории, связанная с приведением в систему, истолкованием и обобщением поведения участников экономики в процессе производства, обмена и потребления, восходит к математическим проблемам оптимизации и принятия решения.

С учетом сказанного выше можно говорить о следующих основных задачах, стоящих перед организационно-экономическим моделированием:

- разработка математических моделей экономических объектов, систем и явлений (общих и частных задач экономики при различных условиях, предпосылках и на различных уровнях);
- изучение поведения участников экономики (условий существования оптимальных решений и их признаков, а также методов их вычисления в моделях потребления, фирмы, совершенной и несовершенной конкуренции и др.);

- изучение описательных моделей экономики (модели планирования, "затраты-выпуск", расширяющейся экономики, экономики благосостояния и роста и др.);
- анализ экономических величин и статистических данных (эластичности, средних и предельных величин, регрессионный и корреляционный анализ и прогнозирование экономических факторов и показателей).

Важным фактором, определяющим роль математики в различных приложениях, является возможность описания наиболее существенных черт и свойств изучаемого объекта на языке математических символов и соотношений. Такое описание принято называть математическим моделированием или формализацией.

Итак, для получения математической модели сначала вводится система буквенных обозначений элементов реального объекта и затем, на основе изучения существующих взаимосвязей между этими элементами, составляются отражающие их математические соотношения (уравнения, неравенства и др.).

Для чего составляется математическая модель, и какова ее роль в исследовании экономических задач?

Любое ответственное решение в экономике требует проведения эксперимента. Семь раз отмерь, один раз отрежь — так гласит основной принцип одного из разделов прикладной математики. При наличии математической модели мы избавляемся от необходимости дорогостоящих экспериментов, как правило, сопровождаемых многократными пробами и ошибками. Это можно делать на модели, которую, условно говоря, можно резать и перекраивать неоднократно без всяких капиталовложений. Это одно достоинство модели. Другое заключается в том, что формализация дает возможность сформулировать реальную задачу как математическую и позволяет воспользоваться для анализа универсальным и мощным математическим аппаратом, который не зависит от конкретной природы объекта. Математика проводит детальный количественный анализ модели, помогает предсказать, как поведет себя объект в различных условиях и дает рекомендации для выбора наилучших вариантов решения проблемы. Построение формальных моделей, их анализ и вывод практических рекомендаций — одна из важнейших задач прикладной математики.

Сложность экономических систем превышает порог, до которого стоится точная математическая теория. Поэтому неудивительно, что сколько-нибудь универсальных методов построения математических моделей в экономике не существует. Можно говорить лишь о некоторых общих принципах и требованиях к таким моделям. Перечислим наиболее основные из них:

1) адекватность (соответствие модели своему оригиналу),
2) объективность (соответствие научных выводов реальным условиям),
3) простота (не засоренность модели второстепенными факторами),
4) чувствительность (способность модели реагировать изменению начальных параметров),
5) устойчивость (малому возмущению исходных параметров должно соответствовать малое изменение решения задачи),
6) универсальность (широта области применения).

Комментируя первое свойство, можно заметить, что математическая модель нетождественна самому объекту, а является его приближенным отражением. Говоря об объективности, следует иметь в виду, что никакая отдельно взятая модель не может вполне правильно отразить все свойства сложной экономической действительности. Поэтому формализация экономической задачи проводится наряду с принятием некоторых предварительных условий, предположений, ограничений. Стремление к простоте модели продиктовано ограниченными возможностями вычислительной техники и экономии временных ресурсов при исследовании модели. Практическое значение модель приобретает тогда, когда ее изучение имеющимися средствами более доступно, чем изучение самого объекта. Требования чувствительности и устойчивости являются отражением объективных характеристик экономических процессов. Одна и та же математическая модель может применяться для исследования экономических задач различного содержания. Это свойство и называется универсальностью.

Разработка новой модели — это сложный творческий процесс, требующий больших умственных и временных затрат. Для экономии этих ресурсов полезно обращаться к существующему "банку" моделей для проверки пригодности их к новой задаче.

Для того чтобы математическая модель удовлетворяла всем тем требованиям, которые перечислены выше, необходимо тщательно изучить предметную область, собрать и проанализировать большой объем информации. Только в результате такого предварительного изучения самого объекта можно отличить цели от средств их достижения, следствия от причин их породивших, основные факторы от второстепенных.

В любой науке по тем или иным признакам (в зависимости от целей исследования или по характеру рассматриваемого круга вопросов) можно выделить отдельные направления, разделы и части. Математика, возможно как никакая другая наука, объединяет в себе большое количество предметов — от классической линейной алгебры и математического анализа до современной актуарной математики. Процесс развития новых направлений продолжается. Некоторые из них изучаются в высших учебных заведениях, а другие в настоящее время даже не имеют общепринятого названия.

Наиболее укрупненной классификацией математической науки является ее деление на теоретическую (или "чистую") и прикладную математику. "Чистая" математика занимается теми вопросами, которые развивают саму математику как науку (т. е. она занимается внутренними вопросами). К прикладной математике относятся те разделы и методы, которые специально созданы или наилучшим образом подходят для решения задач, возникающих на практике (т.е. вне математики). Однако такое деление математической науки на две части является условным. Действительно, какой-то метод, будучи применен для решения практической задачи, не становится раз и навсегда прикладным, точно также, любой теоретический результат когда-то может быть привлечен для решения прикладной проблемы.

Экономическая наука для изучения микроэкономических проблем поднимается на высоту птичьего полета и "обозревает лес в целом", а для исследования макроэкономических понятий опускается на землю и "изучает деревья". Подобно этому прикладная математика более приземлена и менее абстрактна, чем "чистая" математика. Она проникает в различные сферы нашей жизни, приспосабливая к ним свой многофункциональный инструмент. Отсюда и появляются такие прикладные направления как математическая экономика, математическая социология, математическая экология, математическая лингвистика, финансовая математика.

К числу наиболее крупных разделов прикладной математики, применяемых в экономических исследованиях, следует отнести такой предмет как исследование операций.

Исследование операций — это наука, которая занимается построением математических моделей реальных задач и процессов, происходящих в различных сферах жизни (экономических, социальных, технических, военных и др.), их анализом и применениями. Большинство этих моделей связано с выработкой рекомендаций по принятию оптимальных (в том или ином смысле) решений.

Вопросы, посвященные основам моделирования — общие принципы, требования к математическим моделям, этапы формализации, элементы математической модели, виды математических моделей — составляют общий (вводный) раздел исследования операций.

Исследование операций занимается так называемыми экстремальными задачами, суть которых состоит в отыскании максимального или минимального значения заданной функции (целевой функции) на заданном множестве значений ее аргументов (множества допустимых решений). Если множество допустимых решений задается (описывается) с помощью некоторых уравнений или неравенств, называемых ограничениями задачи, то экстремальные задачи называются задачами *математического программирования*. В зависимости от характера этих ограничений и целевой функции возникают задачи *линейного программирования, нелинейного программирования, динамического программирования* и некоторые их разновидности. Здесь термин "программирование" имеет смысл "планирования", "сравнения вариантов", "оптимизации". Поэтому его не надо путать с термином программирования на языках ЭВМ. Экстремальные задачи еще называют оптимизационными задачами или задачами оптимизации.

Не будет преувеличением сказать, что многие из перечисленных теорий возникли благодаря и для решения экономических задач. Ярким примером в этом смысле является **теория игр** — раздел исследования операций, изучающий конфликтные задачи принятия решений. Свидетельство тому — название первой фундаментальной монографии по теории игр: "Теория игр и экономической поведение", написанная создателями этой науки Дж. фон Нейманом и О.Моргенштерном в 1953 году.

Названные разделы исследования операций наиболее приспособлены для исследования так называемых статистических задач, т. е. для исследования экономики в некотором зафиксированным или "застывшем" состоянии, без учета динамики. Для учета влияния временного фактора привлекаются другие разделы прикладной математики. В первую очередь — это **теория оптимального управления (динамическое программирование)**, сформировавшаяся благодаря фундаментальным результатам Л.С.Понтрягина и Р. Беллмана. Эта теория помогает исследовать модели экономической динамики и выработать наилучшие управленческие решения с учетом дискретного и непрерывного учета фактора времени.

При моделировании многих экономических задач возникает необходимость учета случайных факторов и возмущений. В этом случае наиболее подходящим инструментом является аппарат **теории вероятностей** — математической науки, изучающей закономерности в случайных явлениях.

В экономико-математических исследованиях важную роль играют статистические данные. Они нужны для изучения взаимосвязей и взаимозависимостей между экономическими факторами и показателями, для прогнозирования экономического развития на основе прошлого и настоящего опыта. Эти вопросы являются предметом **математической статистики**.

На экономических факультетах высших учебных заведений базовые математические знания преподаются обычно под названием "Высшая математика". В этот предмет входят основные разделы **математического анализа**, **линейной алгебры**, **дифференциального исчисления** и некоторые другие. Все эти дисциплины необходимы как для освоения выше приведенных разделов прикладной математики, так и для их применения непосредственно в экономико-математических исследованиях в качестве инструментария.

В математике названия классов задач часто несут полезную информацию. Они служат ориентиром в иерархии задач, подчеркивая различные уровни общности и сложности, и играют роль адреса при аналитических исследованиях и создании вычислительных методов.

Приведем те "классические" задачи принятия решения, которые, благодаря их типичности, встречаются во многих математических учебниках для экономистов. Некоторые из них относятся к начальному периоду возникновения теории оптимизации. Примеры служат для иллюстрации некоторых видов задач принятия решения и не претендуют на реалистичность в последней инстанции. Это учебные задачи. Естественно задачи и модели, представляющие непосредственный практический интерес, будут более подробными, глубокими и сложными. Учебные задачи — это первое приближение к реальным (практическим) задачам, их упрощенный аналог.

Задача оптимального раскроя материала. Фирма изготовляет изделие, состоящее из p деталей. Причем в одно изделие эти детали входят в количествах $k_1, k_2, ..., k_r$. С этой целью производится раскрой m партий материала. В i-ой партии имеется b_i единиц материала. Каждую единицу материала можно раскроить на детали n способами. При раскрое единицы i-ой партии j-м способом получается a_{ijr} деталей r-го вида. Требуется составить такой план раскроя материала, чтобы из них получить максимальное число изделий.

Транспортная задача. Имеется n поставщиков и m потребителей одного и того же продукта. Известны выпуск продукции у каждого поставщика и потребности в ней каждого потребителя, затраты на перевозки продукции от поставщика к потребителю. Требуется построить план транспортных перевозок с минимальными транспортными расходами с учетом предложения поставщиков и спроса потребителей.

Задача о назначениях на работу. Имеется n работ и n исполнителей. Стоимость выполнения работы i исполнителем j равна c_{ij}. Нужно распределить исполнителей на работы так, чтобы минимизировать затраты на оплату труда.

Задача о смесях (о рационе). Из m видов исходных материалов, каждый из которых состоит из n компонент, составить смесь, в которой содержание компонент должно быть не меньше $b_1, b_2, ..., b_n$. Известны цены единиц материалов $c_1, c_2, ..., c_m$ и удельный вес j-го компонента в единице i-го материала. Требуется составить смесь, в которой затраты будут минимальными.

Задача о рюкзаке. Имеется n предметов. Вес предмета i равен p_i, ценность – c_i $(i=1,...,n)$. Требуется при заданной ценности груза выбрать совокупность предметов минимального веса.

Задача о коммивояжере. Имеется n городов и заданы расстояния c_{ij} между ними $(i=1,...,n;\ j=1,...,n)$. Выезжая из одного (исходного) города, коммивояжер должен побывать во всех остальных городах по одному разу и вернуться в исходный город. Нужно определить в каком порядке следует объезжать города, чтобы суммарное пройденное расстояние было наименьшим.

Задача о станках. На универсальном станке обрабатываются одинаковые партии из n деталей. Переход от обработки детали i к обработке детали j требует переналадки станка, которая занимает c_{ij} времени. Требуется определить последовательность обработки деталей, при которой общее время переналадок станка при обработке партии деталей минимально.

Задача о распределении капиталовложений. Имеется n проектов, причем для каждого проекта j известны ожидаемый эффект η от его реализации и необходимая величина капиталовложений g_j. Общий объем капиталовложений не может превышать заданной величины b. Требуется определить, какие проекты необходимо реализовать, чтобы суммарный эффект был наибольшим.

Задача о размещении производства. Планируется выпуск m видов продукции, которые могли бы производиться на n предприятиях $(n>m)$. Издержки производства и сбыта единицы продукции, плановый объем годового производства продукции и плановая стоимость единицы продукции каждого вида известны. Требуется из n предприятий выбрать такие m, каждое из которых будет производить один вид продукции.

Попытка математического описания поведения людей приводит к формализации принципов поведения. В рамках такой формализации описывается не всякое поведение, а поведение разумных людей, связанное с принятием решения. При этом отправными точками являются следующие факты. Во-первых, люди принимают решение (ЛПР) не от нечего делать, а для достижения какой-то цели (достижение определенного уровня благосостояния, выполнение плана или взятых на себя обязательств и т. д.); во-вторых, если существуют различные варианты (пути) достижения цели, то естественно стремиться к такому решению, которое наилучшим образом способствует достижению поставленной цели (в смысле выгодности, справедливости, устойчивости). Поэтому можно предложить следующее определение.

В задаче принятия решения под **принципом оптимальности** понимается та совокупность правил, при помощи которых ЛПР определяет свое действие (решение, альтернативу, стратегию), наилучшим образом способствующее достижению преследуемой им цели. Решение ЛПР, удовлетворяющее выбранному принципу оптимальности, называется **оптимальным решением.**

Конечная цель исследования любой задачи принятия решения — это **нахождение оптимальных решений** для всех ЛПР.

Принцип оптимальности выбирается исходя из учета конкретных условий принятия решения: количества участников, их возможностей и целей, характера столкновения интересов. Формализация оптимального поведения — один из сложных этапов математического моделирования.

Разработка любого принципа оптимальности оправдана, если он отвечает следующим требованиям:

- адекватное отражение понятия оптимальности на содержательном (интуитивном) уровне;
- существование оптимальных решений (возможно при дополнительных предположениях);

- возможность выявления отличительных признаков оптимальных решений для их обнаружения (необходимых и достаточных признаков оптимальности);
- наличие метода вычисления оптимальных решений (точного или приближенного).

В теории принятия решения (особенно в теории игр), разработано большое число формальных принципов оптимального поведения.

Итак, организационно-экономическое моделирование изучает экономические вопросы с применением математического аппарата. Оно исследует не сами объекты, а их математические модели. Полученные теоретические результаты интерпретируются на языке исходной экономической задачи и применяются на практике. С помощью математических методов исследуются сложные экономические задачи описательного, оптимизационного и управленческого типов, которые нельзя решить с помощью других более простых методов или основываясь только лишь на опыте и "здравом смысле". Математическое моделирование можно применить только в том случае, если экономическая проблема достаточно хорошо освоена на содержательном уровне. Практическое значение модель приобретает только тогда, когда ее изучение имающимися средствами более доступно, чем изучение самого объекта. В организационно-экономическом моделировании применяются подходы и методы из различных разделов исследования операций, методов оптимизации, теории вероятностей, математического анализа, линейной алгебры, дифференциальных уравнений.

Дисциплина Организационно-экономическое моделирование является завершающей в условном блоке экономико-математических дисциплин учебного плана направления подготовки магистров 27.04.06 – организация и управление наукоемкими производствами.

Глава 1. Математические методы и применение ЭВМ как стандарт современного экономического образования.

1.1. Основные причины, возможности и условия применения математических методов и ЭВМ в экономике

Такие науки, как физика, химия, биология изучают непосредственно сам реальный объект (возможно в уменьшенных масштабах и в лабораторных условиях). Научные результаты, после необходимой проверки, также непосредственно можно применить на практике. Математика же изучает не сами объекты, а их модели. "Строительным материалом" для модели являются буквенные обозначения, математические символы и соотношения. То есть описание объекта и формулировка проблемы переводятся с обычного языка на "язык математики" (формализуются), в результате чего и получается математическая модель. Далее эта модель исследуется как математическая задача. Полученные научные результаты нельзя сразу применить на практике, так как они сформулированы на математическом языке. Поэтому осуществляется обратный процесс — содержательная интерпретация (на языке исходной проблемы) полученных математических результатов. Только после этого решается вопрос об их применении на практике.

Для возможного проникновения математики в ту или иную область, последняя должна достичь определенного уровня содержательной зрелости. Применение математических методов не полезно, а вредно до тех пор, пока реальное явление не освоено на гуманитарном (доматематическом) уровне. Следует отметить также, что не все элементы и факторы экономической системы могут быть формализованы. Таковы, например, психологические и эмоциональные факторы, настроения людей. Многие задачи просто "не решаются" на уровне должной строгости. Поэтому математическая модель (как и всякая модель) представляет собой не более чем упрощение действительности. Однако в том и заключается методология прикладной математики, что для нее характерны менее формальные подходы (по сравнению с "чистой" математикой), категории не чисто качественные, но и не чисто количественные, свои приемы и методы (экспертные оценки, имитационное моделирование и др.).

Итак, неотъемлемой частью методики прикладной математики является всесторонний анализ реальной проблемы, предшествующий ее математическому моделированию. В целом системный анализ проблемы, предполагает выполнение следующих этапов:

- гуманитарный (доматематический) анализ проблемы;
- математическое исследование проблемы;
- применение полученных результатов на практике.

Проведение такого системного анализа каждой конкретной проблемы должно осуществляться исследовательской группой, включающей экономистов (как постановщиков проблемы или заказчиков), математиков, юристов, социологов, психологов, экологов и т. д. Причем математики, как основные исследователи, должны участвовать не только в "решении" задачи, но и в ее постановке, а также во внедрении результатов на практике.

Для проведения математических исследований экономической задачи требуется выполнение следующих основных этапов:

1) изучение предметной области и определение цели исследования;
2) формулировка проблемы;
3) сбор данных (статистических, экспертных и прочих);
4) построение математической модели;
5) выбор (или разработка) вычислительного метода и построение алгоритма решения задачи;
6) программирование алгоритма и отладка программы;
7) проверка качества модели на контрольном примере;
8) внедрение результатов на практике.

Этапы **1**—**3** относятся к доматематической части исследования. Очень важно, чтобы предметная область была досконально изучена самими экономистами для того, чтобы они, как заказчики, могли четко сформулировать проблему и определить цели перед исследователями. Исследователям должны быть предоставлены все необходимые документальные и статистические данные в исчерпывающем объеме. Сбор статистических данных или иной информации - не дело математиков, их дело — организация хранения, анализ и обработка данных, предоставленных им в удобной (электронной) форме заказчиками.

Этапы **4—7** относятся к математической части исследований. Результатом этапа **4** должна быть формулировка исходной проблемы в виде строгой математической задачи. Редко математическую модель можно "подобрать" из числа имеющихся, известных моделей. Процесс подбора параметров модели таким образом, чтобы она соответствовала изучаемому объекту, называется идентификацией модели. Исходя из характера полученной модели (задачи) и цели исследования выбирают либо известный метод, либо приспосабливают (модифицируют) известный метод, либо разрабатывают новый. После этого составляют алгоритм (порядок решения задачи) и программу для ЭВМ. Полученные с помощью этой программы результаты анализируют: решают тестовые задачи, вводят необходимые изменения и исправления в алгоритм и программу.

Если для "чистой" математики традиционным является однократный выбор математической модели и однократная формулировка допущений в самом начале исследования, то в прикладных работах часто бывает полезно вернуться к модели и внести в нее исправления после того, как первый тур пробных расчетов уже произведен. Более того, часто оказывается плодотворным своеобразный "спор" моделей, когда одно и то же явление описывается не одной, а несколькими моделями. Если выводы оказываются одними и теми же (приблизительно) при разных моделях, разных методах исследования — это весомое свидетельство правильности расчетов, адекватности модели самому объекту, объективности выдаваемых рекомендаций.

Заключительный этап **8** проводится совместными усилиями заказчиков и разработчиков модели.

Результаты математических (как и всяких научных) исследований, как бы они хороши не были, являются лишь рекомендацией к использованию на практике. Окончательное решение этого вопроса — применять или нет — зависит от заказчика, т. е. от лица ответственного за исход и за последствия, к которым приведет применение рекомендуемых результатов.

Для построения математической модели конкретной экономической задачи (проблемы) рекомендуется выполнение следующей последовательности работ:

1) определение известных и неизвестных величин, а также существующих условий и предпосылок (что дано и что требуется найти?);
2) выявление важнейших факторов проблемы;
3) выявление управляемых и неуправляемых параметров;
4) математическое описание посредством уравнений, неравенств, функций и иных отношений взаимосвязей между элементами модели (параметрами, переменными), исходя из содержания рассматриваемой задачи.

Известные параметры задачи относительно ее математической модели считаются **внешними** (заданными априори, т. е. до построения модели). В экономической литературе их называют **экзогенными переменными**. Значение же изначально неизвестных переменных вычисляются в результате исследования модели, поэтому по отношению к модели они считаются **внутренними**. В экономической литературе их называют **эндогенными переменными**.

В пункте **2** под важнейшими понимаются факторы, которые играют существенную роль в самой задаче и которые так или иначе влияют на конечный результат. В пункте **3** управляемыми называются те параметры задачи, которым можно придавать произвольные числовые значения исходя из условий задачи; неуправляемыми считаются те параметры, значение которых зафиксировано и не подлежит изменению.

С точки зрения назначения, можно выделить **описательные модели** и **модели принятия решения**. **Описательные модели** отражают содержание и основные свойства экономических объектов как таковых. С их помощью вычисляются числовые значения экономических факторов и показателей.

Модели принятия решения помогают найти наилучшие варианты плановых показателей или управленческих решений. Среди них наименее сложным являются оптимизационные модели, посредством которых описываются (моделируются) задачи типа планирования, а наиболее сложными — игровые модели, описывающие задачи конфликтного характера с учетом пересечения различных интересов. Эти модели отличаются от описательных тем, что в них имеется возможность выбора значений управляющих параметров (чего нет в описательных моделях).

В математической экономике трудно переоценить роль моделей принятия решения. Наиболее частое применение находят те из них, которые сводят исходные задачи оптимального планирования производства, рационального распределения ограниченных ресурсов и эффективной деятельности экономических субъектов к экстремальным задачам, к задачам оптимального управления и к игровым задачам. Какова же общая структура таких моделей?

Любая задача принятия решения характеризуется наличием лица или лиц, преследующих определенные цели и имеющих для этого определенные возможности. Поэтому для выявления основных элементов модели принятия решения требуется ответить на следующие вопросы:

- кто принимает решение?
- каковы цели принятия решения?
- в чем состоит принятие решения?
- каково множество возможных вариантов достижения цели?
- при каких условиях происходит принятие решения?

Итак, перед нами некая общая задача принятия решения. Для построения ее формальной схемы (модели) введем общие обозначения.

Буквой N обозначим множество всех, принимающих решение сторон. Пусть $N=\{1,2,...,n\}$, т.е. имеется всего n участников идентифицируемых только номерами. Каждый элемент $i \in N$ называется **лицом, принимающим решение** (ЛПР) (например, отдельная личность, фирма, плановый орган большого концерна, правительства и др.).

Предположим, что множество всех допустимых решений (альтернатив, стратегий) каждого ЛПР предварительно изучено и описано математически (например, в виде системы неравенств). Обозначим их через $X_1, X_2, ..., X_n$. После этого процесс принятия решения всеми ЛПР сводится к следующему формальному акту: каждое ЛПР выбирает конкретный элемент из своего допустимого множества решений $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, ..., x_n \in X_n$. В результате получается набор $x=(x_1, x_2, ..., x_n)$ выбранных решений, который мы называем **ситуацией**.

Для оценки ситуации x с точки зрения преследуемых целей ЛПР строятся функции $f_1, f_2, ..., f_n$ (называемыми **целевыми функциями** или **критериями качества**), ставящие в соответствие каждой ситуации x числовые оценки $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ (например, доходы фирм в ситуации x, или их затраты и т. д.). Тогда цель i-го ЛПР формализуется следующим образом: выбрать такое свое решение $x_i \in X_i$, чтобы в ситуации $x=(x_1, x_2, ..., x_n)$ число $f_i(x)$ было как можно большим (или меньшим). Однако достижение этой цели от него зависит частично в виду наличия других сторон, влияющих на общую ситуацию x с целью достижения своих собственных целей. Этот факт пересечения интересов (конфликтность) отражается в том, что функция f_i помимо x_i зависит и от остальных переменных x_j ($j \neq i$). Поэтому в моделях принятия решения со многими участниками их цели приходится формализовать иначе, чем максимизация или минимизация значений функции $f_i(x)$.

Наконец, пусть нам удалось математически описать все те условия, при которых происходит принятие решения (описание связей между управляемыми и неуправляемыми переменными, описание влияния случайных факторов, учет динамических характеристик и т.д.). Совокупность всех этих условий для простоты обозначим одним символом $\sum$.

Таким образом, общая схема задачи принятия решения может выглядеть так:

$$\left\langle N, X_1,..., X_n; f_1(x),..., f_n(x), \sum \right\rangle \tag{1.1.1}$$

Конкретизируя элементы модели (1.1.1), уточняя их характеристики и свойства, можно получить тот или иной конкретный класс моделей принятия решения. Так если в (1.1.1) N состоит только из одного элемента ($n=1$), а все условия и предпосылки исходной реальной задачи можно описать в виде множества допустимых решений этого единственного ЛПР, то из (1.1.1) получаем структуру оптимизационной (экстремальной) задачи: $\left\langle X, f \right\rangle$. В этой схеме ЛПР может рассматриваться как планирующий орган. С помощью данной схемы можно написать экстремальные задачи двух видов: задача на максимум $f(x) \to \max\limits_{x \in X}$ и задача на минимум $f(x) \to \min\limits_{x \in X}$.

Если в экстремальной задаче явно учитывается фактор времени, то она называется **задачей оптимального управления**. Если $n \geq 2$, то (1.1.1) является общей схемой задачи принятия решения в условиях конфликта, т. е. в тех ситуациях, когда имеет место пересечение интересов двух или более сторон.

Часто у ЛПР имеется не одна, а несколько целей. В этом случае из (1.1.1) получаем схему $\left\langle X, f_1(x),..., f_n(x), \sum \right\rangle$, где все функции $f_1(x), f_2(x),..., f_n(x)$ определены на одном и том же множестве X . Такие задачи называются **задачами многокритериальной оптимизации**.

Имеются классы задач принятия решения, получившие свои названия исходя из их назначения: системы массового обслуживания, задачи управления запасами, задачи сетевого и календарного планирования, теория надежности и др. Перечисленные здесь разновидности моделей и задач изучаются в разделах исследования операций с соответствующими названиями.

Если элементы модели (1.1.1) не зависят явно от времени, т. е. процесс принятия решения сводится к мгновенному акту выбора точки из заданного множества, то задача называется **статической**. В противном случае, т. е. когда принятие решения представляет собой многоэтапный дискретный или непрерывный во времени процесс, задача называется **динамической**. Если элементы модели (1.1.1) не содержат случайных величин и вероятностных явлений, то задача называется **детерминированной**, в противном случае — **стохастической**.

Организационно-экономическое моделирование означает формулировку реальной задачи на математическом языке. Образно говоря, морфология этого языка направлена на обозначение реальных величин (в нашем случае экономических) специальными символами, а синтаксис - на формальное описание взаимосвязей между этими величинами. Здесь мы напомним исходные понятия этого языка.

Для вывода общих закономерностей удобно работать не с конкретными числами, а с их буквенными обозначениями. Например, говорят "число a", имея ввиду, что a есть какое-то конкретное число (отрицательное, положительное или нуль). Как правило, известные числа обозначаются начальными буквами из латинского алфавита: $a,b,c,...$ или греческого алфавита $\alpha,\beta,\gamma,...$, а неизвестные величины – латинскими буквами x,y,z или греческими буквами η,θ,ξ. Так как для обозначения разных величин всех букв не хватает, то часто пользуются индексами x_i, y^k, α_{ij}. Например, набор продуктов, состоящий из 25 видов, количество которых известно, удобнее обозначить ($a_1, a_2, ..., a_{25}$), а если их количество не известно, то - ($x_1, x_2, ..., x_{25}$). Здесь каждый индекс $i = 1, 2, ...25$ заменяет название определенного продукта.

Для удобства совокупность чисел обозначается одной буквой: $x = \left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$; x называют **вектором**, числа x_i, $i = 1, 2, ..., n$ - **компонентами** этого вектора, а число n всех компонент - **размерностью** этого вектора. Вектор размерности n называют еще точкой n-мерного пространства и пишут $x \in R^n$. Таким образом, R^n обозначает множество всех векторов размерности n. Множество векторов, удовлетворяющих тем или иным условиям (свойствам, ограничениям) обозначают заглавными буквами. Например, множество всевозможных наборов продуктов n видов, которых можно приобрести за определенную сумму денег, обозначим через B. В этом случае пишут $B \subset R^n$ и говорят, что B есть **подмножество** n-мерного пространства R^n. Теперь вместо общей записи $x \in R^n$ можно записать более конкретно: $x \in B \subset R^n$ (или просто $x \in B$).

Не все экономические величины можно задавать числами или векторами. Например, нам нужно составить план перевозок некоторого материала с трех складов в пять объектов строительства. Обозначим через a_{ij} - количество перевозимого материала с i-го склада ($i = 1, 2, 3$) в j-ый объект строительства ($j = 1, ..., 5$). Тогда весь план перевозок можно представить в виде таблицы:

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	1
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	2
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	3
1	2	3	4	5	

номера складов

номера объектов строительства

Для удобства совокупность таких чисел обозначают одной буквой:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

и называют матрицей. Числа a_{ij} называются элементами матрицы. Число строк (m) и число столбцов (n) называют размерностью матрицы. Сокращенно матрицу размерности $m\times n$ записывают как $A=\left\|a_{ij}\right\|_{m\times n}$. Матрицу можно рассматривать как совокупность векторов - столбцов или векторов - строк.

Задача 1.1.1. Пусть некоторый экономический регион производит несколько (n) видов продуктов исключительно своими силами и только для населения данного региона. Предполагается, что технологический процесс отработан, а спрос населения на эти товары изучен. Надо определить годовой объем выпуска продуктов, с учетом того, что этот объем должен обеспечить как конечное, так и производственное потребление.

Решение: Составим математическую модель этой задачи. По ее условию даны: виды продуктов, спрос на них и технологический процесс; требуется найти объем выпуска каждого вида продукта.

Обозначим известные величины:

c_i — спрос населения на i-й продукт ($i=1,\dots,n$);

a_{ij} — количество i-го продукта, необходимое для выпуска единицы j-го продукта по данной технологии ($i=1,\dots,n$; $j=1,\dots,n$).

Обозначим неизвестные величины:

x_i — объем выпуска i-го продукта ($i=1,\dots,n$);

совокупность $c=\left(c_1,\dots,c_n\right)$ называется вектором спроса, числа a_{ij} — технологическими коэффициентами, а совокупность $x=\left(x_1,\dots,x_n\right)$ — вектором выпуска.

По условию задачи вектор x распределяется на две части: на конечное потребление (вектор c) и на воспроизводство (вектор $x-c$). Вычислим ту часть вектора x которая идет на воспроизводство.

По нашим обозначениям для производства x_j количества j-го товара идет $a_{ij}x_j$ количества i-го товара. Тогда сумма $a_{i1}x_1+...+a_{in}x_n$ показывает ту величину i-го товара, которая нужна для всего выпуска $x=\left(x_1,...,x_n\right)$.

Следовательно, должно выполняться равенство:

$$x_i-c_i=a_{i1}x_1+...+a_{in}x_n.$$

Распространяя это рассуждение на все виды продуктов, приходим к искомой модели:

$$\begin{array}{l} x_1-c_1=a_{11}x_1+...+a_{1n}x_n \\ x_2-c_2=a_{21}x_2+...+a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n-c_n=a_{n1}x_n+...+a_{nn}x_n. \end{array}$$

Решая эту систему из n линейных уравнений относительно $x_1,...,x_n$ и найдем требуемый вектор выпуска.

Для того чтобы написать эту модель в более компактной (векторной) форме, введем обозначения:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Квадратная $(n\times n)$ —матрица A называется технологической матрицей. Легко проверить, что наша модель теперь запишется так: $x-c=Ax$ или $x-Ax=c$.

Мы получили классическую модель "затраты-выпуск", автором которой является известный экономист В.Леонтьев.

Задача 1.1.2. Нефтеперерабатывающий завод располагает двумя сортами нефти: сортом А в количестве 10 единиц, сортом В — 15 единиц. При переработке из нефти получаются два материала: бензин (обозначим Б) и мазут (М). Имеется три варианта технологического процесса переработки:

I: 1ед.А + 2ед.В дает 3ед.Б + 2ед.М

II: 2ед.А + 1ед.В дает 1ед.Б + 5ед.М

III: 2ед.А + 2ед.В дает 1ед.Б + 2ед.М

Цена бензина — 10 долл. за единицу, мазута — 1 долл. за единицу. Требуется определить наиболее выгодное сочетание технологических процессов переработки имеющегося количества нефти.

Решение: Перед моделированием уточним следующие моменты. Из условия задачи следует, что "выгодность" технологического процесса для завода следует понимать в смысле получения максимального дохода от реализации своей готовой продукции (бензина и мазута). В связи с этим понятно, что "выбор (принятие) решения" завода состоит в определении того, какую технологию и сколько раз применить. Очевидно, что таких возможных вариантов достаточно много.

Обозначим неизвестные величины: x_i - количество использования i-го технологического процесса ($i=1,2,3$).

Остальные параметры модели (запасы сортов нефти, цены бензина и мазута) известны.

Теперь одно конкретное решение завода сводится к выбору одного вектора $X=(x_1,x_2,x_3)$, для которого выручка завода равна $(32x_1+15x_2+12x_3)$ долл. Здесь 32 долл. — это доход, полученный от одного применения первого технологического процесса (10 долл.·3ед.Б + 1 долл. ·2ед.М = 32 долл.). Аналогичный смысл имеют коэффициенты 15 и 12 для второго и третьего технологических процессов соответственно. Учет запаса нефти приводит к следующим условиям:

для сорта А: $x_1+2x_2+2x_3\le 10$

для сорта В: $2x_1+x_2+2x_3\le 15$,

где в первом неравенстве коэффициенты 1, 2, 2 — это нормы расхода нефти сорта А для одноразового применения технологических процессов I, II, III соответственно. Коэффициенты второго неравенства имеют аналогичный смысл для нефти сорта В.

Математическая модель в целом имеет вид: найти такой вектор $X=(x_1,x_2,x_3)$ чтобы максимизировать $f(x)=32x_1+15x_2+12x_3$ при выполнении условий: $\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3\le 10 \\ 2x_1+x_2+2x_3\le 15 \end{cases}$ $x_i\ge 0, i=1,2,3.$

Сокращенная форма этой записи такова:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3\le 10 \\ 2x_1+x_2+2x_3\le 15 \end{cases}$$
$$x_i\ge 0, i=1,2,3 \qquad (1.1.2)$$
$$f(x)=32x_1+15x_2+12x_3\to \max.$$

Мы получили так называемую задачу линейного программирования. Модель (1.1.2) является примером оптимизационной модели детерминированного типа (с вполне определенными элементами).

Задача 1.1.3. На базе торговой организации имеется n типов одного из товаров ассортиментного минимума. В магазин должен быть завезен только один из типов данного товара. Требуется выбрать тот тип товара, который целесообразно завести в магазин. Если товар типа j будет пользоваться спросом, то магазин от его реализации получит прибыль p_j, если же он не будет пользоваться спросом - убыток q_j.

Решение: Перед моделированием обсудим некоторые принципиальные моменты. В данной задаче лицом принимающим решение (ЛПР) является магазин. Однако исход (получение максимальной прибыли) зависит не только от его решения, но и от того, будет ли завезенный товар пользоваться спросом, т. е. будет ли выкуплен населением (предполагается, что по какой-то причине у магазина нет возможности изучить спрос населения). Поэтому население может рассматриваться как второе ЛПР, выбирающее тип товара согласно своего предпочтения. Наихудшим для магазина "решением" населения является: "завезенный товар не пользуется спросом". Так что, для учета всевозможных ситуаций, магазину нужно считать население своим "противником" (условно), преследующим противоположную цель — минимизировать прибыль магазина.

Итак, имеем задачу принятия решения с двумя участниками, преследующими противоположные цели. Уточним, что магазин выбирает один из типов товаров для продажи (всего n вариантов решений), а население — один из типов товаров, который пользуется наибольшим спросом (n вариантов решений).

Для составления математической модели нарисуем таблицу с n строками и n столбцами (всего n^2 клеток) и условимся, что строки соответствуют выбору магазина, а столбики — выбору населения. Тогда клетка (i, j) соответствует той ситуации, когда магазин выбирает i-й тип товара (i-ю строку), а население выбирает j-й тип товара (j-ю столбик). В каждую клетку запишем числовую оценку (прибыль или убыток) соответствующей ситуации с точки зрения магазина:

	1	2	……	j	……	n
1	p_1	$-q_1$	…..	$-q_1$	…..	$-q_1$
2	$-q_2$	p_2	…..	$-q_2$	…..	$-q_2$
⋮	…..	…..	…..	…..	…..	…..
i	$-q_i$	$-q_i$	…..	$-q_i$	…..	$-q_i$
⋮	…..	…..	…..	…..	…..	…..
n	$-q_n$	$-q_n$	…..	$-q_n$	…..	p_n

выбор магазина

выбор населения

Числа q_i написаны с минусом для отражения убытка магазина; в каждой ситуации "выигрыш" населения (условно) равен "выигрышу" магазина, взятому с обратным знаком.

Сокращенный вид этой модели таков:

$$A = \begin{pmatrix} p_1 & -q_1 & \dots & -q_1 \\ -q_2 & p_2 & \dots & -q_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -q_n & -q_n & \dots & p_n \end{pmatrix}.$$

Мы получили так называемую матричную игру.

1.2. Прикладные экономические задачи: расчет предельных отношений

Основа основ любой экономики - это производство, т.к. оно, производя продукцию, позволяет людям удовлетворять свои многочисленные потребности. Экономистам все время приходится решать одну глобальную задачу - как можно больше произвести, и при этом, как можно меньше затратить ограниченных ресурсов.

Дифференциальное исчисление — широко применяемый для экономического анализа математический аппарат. Базовой задачей экономического анализа является изучение экономических величин, записываемых в виде функций. В каком направлении изменится доход государства при увеличении налогов или при введении импортных пошлин? Увеличится или уменьшится выручка фирмы при повышении цены на ее продукцию? В какой пропорции дополнительное оборудование может заменить выбывающих работников? Для решения подобных задач должны быть построены функции связи входящих в них переменных, которые затем изучаются с помощью методов дифференциального исчисления.

В экономике очень часто требуется найти наилучшее, или оптимальное значение того или иного показателя: наивысшую производительность труда, максимальную прибыль, максимальный выпуск, минимальные издержки и т.д. Каждый показатель представляет собой функцию одного или нескольких аргументов. Например, выпуск можно рассматривать как функцию затрат труда и капитала (как это делается в производственных функциях). Таким образом, нахождение оптимального значения показателя сводится к нахождению экстремума (максимума или минимума) функции одной или нескольких переменных. Подобные задачи порождают класс экстремальных задач в экономике, решение которых требует использования методов дифференциального исчисления. Если экономический показатель y нужно максимизировать или минимизировать как функцию другого показателя x (например, задача на максимум прибыли как функции объема-выпуска), то в оптимальной точке (т.е. в точке максимума) отношение приращения функции y к приращению аргумента x должно стремиться к нулю, когда приращение аргумента стремится к нулю. Иначе, если такое отношение стремится к некоторой положительной или отрицательной величине, рассматриваемая точка не является оптимальной, поскольку увеличив или уменьшив аргумент x, можно изменить величину y в нужном направлении. В терминах дифференциального исчисления это означает, что необходимым условием экстремума функции $y = f(x)$ является равенство нулю **ее производной**.

В экономике часто приходится решать задачи на экстремум функций нескольких переменных, поскольку экономические показатели обычно зависят от многих факторов. Такие задачи хорошо изучены теорией функций нескольких переменных, использующей методы дифференциального исчисления. Многие задачи включают не только максимизируемую (минимизируемую) функцию, но и ограничения (скажем, бюджетное ограничение в задаче потребительского выбора). Это — задачи математического программирования, для решения которых разработаны специальные методы, также опирающиеся на дифференциальное исчисление. Важный раздел методов дифференциального исчисления, используемых в экономике, называется **методами предельного анализа.** Предельный анализ в экономике — совокупность приемов исследования изменяющихся величин затрат или результатов при изменениях объемов производства, потребления и т.п. на основе анализа, их предельных значений. Предельный показатель (показатели) функции $y = f(x)$— это ее производная (в случае функции одной переменной) или частные производные (в случае функции нескольких переменных).

В экономике широко используются средние величины: средняя производительность труда, средние издержки, средний доход, средняя прибыль и т.д. Но часто требуется узнать, на какую величину вырастет результат, если будут увеличены затраты или, наоборот, насколько уменьшится результат, если затраты сократятся. С помощью средних величин ответ на этот вопрос получить невозможно. В подобных задачах требуется определить предел отношения приростов результата и затрат, т.е. найти предельный эффект. Следовательно, для их решения необходимо применение методов дифференциального исчисления — нахождение производной в случае функции одной переменной и частных производных, если функция зависит от нескольких аргументов.

Так, например, если задана производственная функция: $y=f\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$, где x_i — объем затрачиваемого i-го ресурса $i=1,2,\ldots,n$, y — максимальный объем выпуска, который можно получить, затрачивая ресурсы соответственно в объемах $x_1,x_2,\ldots,x_n$, то предельный эффект от использования i-го ресурса (p_i) определяется следующим образом:

$$p_i=\frac{f\left(x_1,\ldots,x_i+\Delta x_i,\ldots,x_n\right)-f\left(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n\right)}{\Delta x_i}.$$

Здесь величина p_i равна дополнительному объему выпуска, который получается в результате затраты дополнительной величины Δx_i i-го ресурса при неизменных объемах остальных ресурсов.

Показатель предельного эффекта в оптимизационных моделях применяется для нахождения оптимального объема производства при заданных ресурсах, а также для определения оптимального распределения ограниченных ресурсов по различным направлениям их использования. Если максимизируемый показатель (например, прибыль) есть разность результата и издержек (в данном случае результат представлен выручкой), то в оптимальной точке предельная выручка должна равняться предельным издержкам. Такое равенство должно выполняться по каждому из факторов, определяющих выручку и издержки, что вытекает из необходимости равенства нулю частных производных прибыли по всем этим факторам.

Необходимые и достаточные условия оптимума во многих экономических задачах записываются с помощью частных производных и дифференциалов.

Так, если решается задача на максимум выпуска, описываемого с помощью приведенной выше производственной функции, при наличии ограничения по общему расходу денежных средств на используемые в производстве ресурсы, то в оптимальной точке должны быть равны между собой отношения предельных производительностей ресурсов и их цен. Иными словами, для всех ресурсов должен быть одинаков предельный эффект в расчете на единицу дополнительно расходуемых на эти ресурсы денежных средств.

В задаче потребительского выбора отношение предельных полезностей благ должно быть равно отношению их цен. Иначе говоря, предельная полезность в расчете на одну денежную единицу должна быть в оптимальной точке одинакова по всем благам; в противном случае бюджет потребителя мог бы быть перераспределен с увеличением его благосостояния. Таким образом, методы дифференциального исчисления позволяют не только решить различные экономические задачи, но и записать необходимые или достаточные условия оптимума в этих задачах, которые позволяют дать ответ на те или иные конкретные вопросы.

Широко используется в экономическом анализе понятие дифференциала, или главной линейной части приращения функции. Так, если некоторая величина y есть функция двух аргументов x_1 и x_2, то с использованием дифференциала легко рассчитать предельную норму замены между этими аргументами, т.е. величину, показывающую, сколько нужно фактора 2 для замены одной единицы фактора 1 с сохранением значения функции y.

Предельная норма замены важна в задачах потребительского выбора (взаимозаменяемость благ), в задачах оптимизации производства (взаимозаменяемость труда и капитала) и в ряде других задач. Пусть

$y = f\left(x_1, x_2\right)$. Если мы хотим сохранить значение функции y неизменным, то это означает, что приращение y, а значит и его главная линейная часть должны быть равны нулю. Иными словами, $0 = dy = y'_{x_1} \cdot dx_1 + y'_{x_2} \cdot dx_2$. Отсюда предельная норма замены $-\dfrac{dx_1}{dx_2} = \dfrac{y'_{x_2}}{y'_{x_1}}$ равняется отношению частных производных функции y по первому и второму факторам.

Методы дифференциального исчисления широко применяются не только для анализа взаимодействия отдельных экономических факторов, определения их взаимозаменяемости или оптимального сочетания, но и в сложных моделях экономики, в частности — в моделях экономической динамики. Дифференциальное исчисление — это не только аппарат, позволяющий находить решения задач с использованием таких моделей, но и необходимый составной элемент для их построения. Динамические модели применяются для решения таких задач, как определение оптимальной или равновесной траектории развития экономической системы, ее состояний в заданные моменты времени, анализ системы на устойчивость, анализ структурных сдвигов и т.п.

Из рассмотренных направлений применения дифференциального исчисления в экономике важнейшим является вопрос нахождения и анализа взаимосвязей экономических переменных, определяющих функционирование экономического объекта или протекание экономического явления.

В чем же состоит экономический смысл производной? Если фирма наращивает объем использования только некоторых или только одного из факторов производства, то прирост выпуска, приносимый дополнительными объемами этих факторов, в конце концов, начнет снижаться. Очень важной производственной задачей является умение определить при каком объеме производства удельные затраты будут минимальными и **до каких пределов** можно расширять производство.

В экономической теории активно используется понятие **«маржинальный»,** что означает **«предельный»**. Введение этого понятия в научный оборот в XIX веке позволило создать совершенно новый инструмент исследования и описания экономических явлений - инструмент, посредством которого стало возможно ставить и решать новый класс научных проблем.

Предельные или пограничные величины характеризуют процесс, изменение экономического объекта. Следовательно, производная выступает как интенсивность изменения некоторого экономического объекта (процесса) по времени или относительно другого исследуемого фактора.

Экономика не всегда позволяет использовать предельные величины в силу прерывности (дискретности) экономических показателей во времени (например, годовых, квартальных, месячных и т.д.). В то же время во многих случаях можно отвлечься от дискретности и эффективно использовать **предельные величины**. Предельная величина — это изменение величины одного экономического показателя в результате увеличения на единицу другого фактора, от которого зависит данный показатель.

Например, два рабочих в час производят 100 игрушек. Если к ним добавить еще одного рабочего, то количество изготовленных игрушек возрастет до 160. Значит, третий рабочий обеспечил прирост продукции на 60 штук. Эта величина называется дополнительной, или предельной.

Экономисты рассчитывают и анализируют следующие предельные показатели:

1. Предельная полезность — это дополнительная полезность, полученная потребителем при увеличении количества потребляемого блага на одну единицу.
2. Предельный продукт труда — прирост продукции, который обеспечивает дополнительный работник.
3. Предельные издержки — дополнительные затраты, необходимые для увеличения производства продукции на одну единицу.

4. Предельный доход (выгода) — это прирост выручки, полученной производителем от продажи дополнительной единицы товара.
5. Предельная прибыль — дополнительная прибыль, полученная в результате производства и продажи еще одной единицы продукции.

Сущность предельного анализа заключается в оценке того, какие дополнительные затраты и выгоды повлекут за собой увеличение производства, продажи или потребления блага на одну единицу.

Следовательно: **предельный анализ** — это метод нахождения наилучшего, оптимального варианта соотношения дополнительных затрат и выгод, вариант производства (или потребления), при котором предельные выгоды равны предельным затратам, считается оптимальным, наилучшим.

Это главное правило предельного анализа, а также принцип экономического мышления и рационального поведения людей.

Разумный человек не должен принимать неэффективные решения. К примеру, покупать для себя еще один билет в театр (предельная выгода равна нулю) или делать уроки поздним вечером (предельная выгода меньше предельных затрат). Любое предприятие и государство при разработке планов экономического развития обязано учитывать правило равенства предельных затрат и выгод. Фирма может построить в деревне многоэтажный дом, но предельная выгода, скажем от возведения пятого этажа будет меньше предельных затрат, поскольку сельские жители предпочитают жить в отдельном доме. Правительство может несколько раз в год брать взаймы у международных финансовых организаций, однако, предельная выгода от дополнительного кредита будет намного ниже предельных затрат. В лучшем случае правительство погасит некоторую часть внешнего или внутреннего долга, который значительно вырастет за счет очередных заимствований.

Рассмотрим в качестве примера **соотношения между средним и предельным доходом** в условиях монопольного и конкурентного рынков. Суммарный доход (выручку) от реализации продукции r можно определить как произведение цены единицы продукции p на количество продукции q, т.е. $r = p \cdot q$.

В условиях монополии одна фирма полностью контролируют предложение определенной продукции, а, следовательно, и цены на них. При этом, как правило, с увеличением цены спрос на продукцию падает. Будем полагать, что это происходит по прямой, т.е. кривая спроса $p(q)$ - есть линейная убывающая функция $p = aq + b$, где $a > 0$, $b < 0$. Тогда суммарный доход от реализованной продукции составит $r = (aq + b)q = aq^2 + bq$. В этом случае средний доход на единицу продукции $r_{cp} = \frac{r}{q} = aq + b$, а предельный доход составит $r'_q = 2aq + b$. Следовательно, в условиях монопольного рынка с ростом количества реализованной продукции предельный доход снижается, что приводит к уменьшению (с минимальной скоростью) среднего дохода.

В условиях совершенной конкуренции, когда число участников рынка велико, и каждая фирма не способна контролировать уровень цен, устойчивая продажа товаров возможна по преобладающей рыночной цене, например, $p = b$. При этом суммарный доход составит $r = qb$ и соответственно средний доход $r_{cp} = \frac{r}{q} = b$ и предельный доход $r'_q = b$. Таким образом, в условиях свободного конкурентного рынка средний и предельный доходы совпадают.

В экономических исследованиях для обозначения производных часто пользуются специфической терминологией. Например, если $f(x)$ есть производственная функция, выражающая зависимость выпуска какой-либо продукции от затрат фактора x, то $f'(x)$ называют **предельным продуктом**; если $g(x)$ есть функция издержек, т. е. функция $g(x)$ выражает зависимость общих затрат от объема продукции x, то $g'(x)$ называют **предельными издержками**.

Предельный анализ в экономике - совокупность приемов исследования изменяющихся величин затрат или результатов при изменении объемов производства, потребления и т.п. на основе анализа их предельных значений. Большей частью плановые расчеты, основывающиеся на обычных статистических данных, ведутся в форме суммарных показателей. При этом анализ заключается главным образом в вычислении средних величин. Однако в некоторых случаях оказывается необходимым более детальное исследование с учетом предельных значений. Например, при выяснении издержек производства зерна в районе на перспективу принимают во внимание, что издержки могут быть различными в зависимости, при прочих равных условиях, от предполагаемых объемов сбора зерна, так как на вновь вовлекаемых в обработку худших землях издержки производства будут выше, чем по району в среднем.

Если зависимость между двумя показателями v и x задана аналитически: $v = f(x)$ - то **средняя величина** представляет собой отношение $\frac{v}{x}$, а **предельная** – производную $\frac{dv}{dx}$.

Нахождение производительности труда. Пусть известна функция $u = u(t)$, выражающая количество произведенной продукции u за время работы t. Вычислим количество произведенной продукции за время $Dt = t_1 - t_0$: $\Delta u = u(t_1) - u(t_0) = u(t_0 + Dt) - u(t_0)$.

Средней производительностью труда называется отношение количества произведенной продукции к затраченному времени, т.е. $z_{cp} = \frac{\Delta u}{\Delta t}$.

Производительностью труда рабочего $z(t_0)$ в момент t_0 называется предел, к которому стремится z_{cp} при $\Delta t \to 0$: $z = \lim\limits_{\Delta t \to 0} z_{cp} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t}$.

Вычисление производительности труда, таким образом, сводится к вычислению производной: $z(t_0)=u'(t_0)$.

Издержки производства K однородной продукции есть функция количества продукции x. Поэтому можно записать $K=K(x)$. Предположим, что количество продукции увеличивается на Δx. Количеству продукции $x+\Delta x$ соответствуют издержки производства $K(x+\Delta x)$. Следовательно, приращению количества продукции Dx соответствует приращение издержек производства продукции $\Delta K=K(x+\Delta x)-K(x)$.

Среднее приращение издержек производства есть $\frac{\Delta K}{\Delta x}$. Это приращение издержек производства на единицу приращения количества продукции.

Предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta K}{\Delta x}=K'(x)$ называется **предельными издержками производства**.

Если обозначить через $u(x)$ выручку от продажи x единиц товара, то $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'(x)$ и называется **предельной выручкой**.

С помощью производной можно вычислить приращение функции, соответствующее приращению аргумента. Во многих задачах удобнее вычислять процент прироста (относительное приращение) зависимой переменной, соответствующий проценту прироста независимой переменной. Это приводит нас к понятию эластичности функции (иногда ее называют относительной производной).

Итак, пусть дана функция $y=f(x)$, для которой существует производная $y'=f'(x)$. **Эластичностью функции** $y=f(x)$ относительно переменной x называют предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y/y}{\Delta x/x}=\frac{x}{y}f'(x)$.

Его обозначают $E_x(y)=\frac{x}{y}f'(x)=\frac{x}{y}\cdot\frac{dy}{dx}$.

Эластичность относительно x есть приближенный процентный прирост функции (повышение или понижение), соответствующий приращению независимой переменной на 1%. Экономисты измеряют степень чуткости, или чувствительности, потребителей к изменению цены продукции, используя концепцию ценовой эластичности. Для спроса на некоторые продукты характерна относительная чуткость потребителей к изменениям цен, небольшие изменения в цене приводят к значительным изменениям в количестве покупаемой продукции. Спрос на такие продукты принято называть **относительно эластичным** или просто эластичным. Что касается других продуктов, потребители относительно нечутки к изменению цен на них, то есть существенное изменение в цене ведет лишь к небольшому изменению в количестве покупок. В таких случаях спрос **относительно неэластичен** или просто неэластичен. Термин **совершенно неэластичный** спрос означает крайний случай, когда изменение цены не приводит ни к какому изменению количества спрашиваемой продукции. Примером может служить спрос больных острой формой диабета на инсулин или спрос наркоманов на героин. И наоборот, когда при самом малом снижении цены покупатели увеличивают покупки до предела своих возможностей - тогда мы говорим, что спрос является **совершенно эластичным**.

1.3. Прикладные экономические задачи: метод наименьших квадратов для аналитического сглаживания экспериментальных зависимостей

Экономико-математические модели, в которых случайные факторы не учитываются, называются детерминированными моделями, в противном случае - стохастическими моделями. Из-за влияния неучтенных факторов в стохастической модели значение $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ показателя f, соответствующее конкретным фиксированным значениям факторов $x_1, x_2, ..., x_n$, будет уже неоднозначным. Например, в детерминированной модели спрос на товар однозначно определен его ценой, а в стохастической - под влиянием неценовых (часто случайных) факторов, таких как инфляция, мода, сезон, одной и той же цене будет соответствовать множество значений спроса. Поэтому о каждом из возможных значений спроса можно говорить лишь с некоторой вероятностью или же можно говорить о некотором среднем значении спроса.

Случайной величиной называется переменная, которая в результате испытания может принимать различные значения, причем каждое конкретное значение реализуется с известной вероятностью.

Мы будем рассматривать только **дискретные случайные величины,** т.е. те, которые принимают отдельные изолированные значения. При этом будем считать, что множество всех возможных значений конечно.

Дискретная случайная величина задается с помощью множества возможных значений и соответствующих им вероятностей (1.3.1).

Значения случайной величины R	r_1	r_2	$\dots$	r_n
Вероятности	p_1	p_2	$\dots$	p_n

(1.3.1)

Такая таблица называется распределением дискретной случайной величины.

Две случайные величины называются **независимыми**, если их распределения не зависят друг от друга; в противном случае они называются

зависимыми. Здесь имеется в виду уже не функциональная, а **статистическая зависимость**. Так называется зависимость, при которой изменение одной из величин влечет изменение распределения другой. Например, если случайная величина R зависит от случайных факторов S_1, S_2, V_1, V_2, а случайная величина Q зависит от случайных факторов S_1, S_2, U_1, то между R и Q имеется статистическая зависимость, так как среди случайных факторов есть общие S_1 и S_2.

Частным случаем статистической зависимости является корреляционная зависимость. Так называется зависимость, когда изменение одной величины влечет изменение среднего значения другой. Пусть Q - урожай зерна, R - количество удобрений. Под влиянием таких случайных факторов, как осадки, температура воздуха, с одинаковых по площади участков земли при равных количествах внесенных удобрений снимают различный урожай. Поэтому между R и Q нет функциональной зависимости. Вместе с тем, как показывает опыт, средний урожай является функцией от количества удобрений, т.е. Q связан с R корреляционной зависимостью.

Как видно из (1.3.1), в распределении даются характеристики отдельных значений случайной величины. Для описания случайной величины "в целом" используют ряд числовых характеристик: математическое ожидание, дисперсия и среднеквадратическое отклонение.

Сначала мы напомним классические или теоретико-вероятностные определения этих понятий.

Пусть случайная величина R задана законом распределения (1.3.1). Для простоты будем предполагать, что при одном испытании величина R принимает одно и только одно значение. Тогда k событий: $R=r_1,...,R=r_k$ образуют полную группу, и поэтому $p_1+...+p_k=1$.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины R называется число

$$M(R)=\sum_{i=1}^{k} r_i p_i\,. \tag{1.3.2}$$

Так как математическое ожидание приблизительно представляет среднее арифметическое $\frac{1}{k}(r_1+...+r_k)$, то его часто называют средним значением случайной величины, т.е. это есть приблизительная числовая характеристика случайной величины.

Разности $r_i - M(R),\ i=1,...,k$ (или $R-M(R)$) показывают "отклонение" случайной величины R от своего среднего значения. Для одних i она положительна, для других - отрицательна. Поэтому удобно работать с квадратом отклонения $\left[R-M(R)\right]^2$. Как видно, это тоже есть случайная величина, и можно говорить о среднем значении отклонения, т.е. о математическом ожидании $M\left(\left[R-M(R)\right]^2\right)$.

Дисперсией дискретной случайной величины R называется число

$$D(R)=\sum_{i=1}^{k}\left[r_i - M(R)\right]^2 \cdot p_i\,. \tag{1.3.3}$$

Положительный квадратный корень из дисперсии называется **средне-квадратическим отклонением** $\sigma(R)=\sqrt{D(R)}$.

Среднеквадратическое отклонение имеет тот же смысл, что и дисперсия, но с ним удобнее работать, чем с дисперсией.

Теперь приведем некоторые основные свойства числовых характеристик случайной величины.

Пусть R - фиксированная случайная величина, а $C=const$.

Тогда

$$\begin{aligned} &M(C)=C, \quad M(C\cdot R)=C\cdot M(R),\\ &D(C)=0, \quad D(C\cdot R)=C^2\cdot D(R). \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

Для любых дискретных случайных величин $R_1,...,R_m$

$$M\left(\sum_{j=1}^{m} R_j\right) = \sum_{j=1}^{m} M\left(R_j\right). \qquad (1.3.5)$$

Если эти величины взаимно независимы, то

$$M\left(\prod_{j=1}^{m} R_j\right) = \prod_{j=1}^{m} M\left(R_j\right),$$

$$D\left(\sum_{j=1}^{m} R_j\right) = \sum_{j=1}^{m} D\left(R_i\right), \quad D\left(R_j + R_i\right) = D\left(R_j\right) + D\left(R_i\right), \qquad (1.3.6)$$

$$\sigma\left(\sum_{j=1}^{m} R_j\right) = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \sigma^2\left(R_j\right)}.$$

Приведенные выше характеристики случайной величины, видоизменив, можно применять и при анализе статистических данных.

Статистические данные представляют собой сведения о многократно наблюдаемых объектах или явлениях, образующих однородные совокупности. В экономике эти совокупности представляют собой, например, рабочих на промышленном предприятии, выборочные измерения урожая с одного квадратного метра, цену товара на рынке, контролируемые размеры партии деталей и т.д. Наблюдаемые значения признаков у однородных объектов варьируют (изменяются) от одного объекта к другому и представляют собой случайные величины. Вероятности значений, которые принимают такие случайные величины, определяются в процессе повторяющихся наблюдений, если общий комплекс условий остается одним и тем же.

Методами обработки и анализа статистических данных занимается раздел прикладной математики, называемый математической статистикой. Она занимается формальной стороной методов количественного исследования статистических совокупностей безотносительно к их специфической природе. Экономическое приложение математической статистики, когда исследуемые совокупности имеют экономическое происхождение, называется эконометрикой.

Первая задача математической статистики - указать способы сбора и группировки статистических сведений. Исследуемое с точки зрения интересующего признака множество объектов в целом называется **генеральной совокупностью**. На практике изучение каждого объекта часто бывает затруднительно. Поэтому выводы о закономерностях, которым подчиняются рассматриваемые объекты, основываются на изучении выборочной совокупности объектов. **Выборочной совокупностью**, или просто **выборкой**, называется конечное множество случайно отобранных из генеральной совокупности объектов.

Пусть для изучения генеральной совокупности извлечена выборка из n объектов. Предположим, что интересующий нас параметр (случайная величина) может принять k значений $r_1,...,r_k$. Эти числа называются **вариантами**. Пусть далее в n объектах значение r_1 наблюдалось n_1 раз, r_2 - n_2 раз и т.д., r_k - n_k раз, где $n_1+...+n_k=n$. Число $w_i=\frac{n_i}{n}$ называется **частотой** значения r_i.

Статистическим распределением случайной величины называется таблица

Варианты (значения случайной величины)	r_1	r_2	…	r_n
Частоты	p_1	p_2	…	p_n

(1.3.7)

Таким образом, если в теории вероятностей под распределением случайной величины понимается соответствие между возможными ее значениями и их вероятностями, то в математической статистике - соответствие между наблюдаемыми вариантами и их частотами.

Случайную величину, представленную распределением (1.3.7), обозначим через R.

Выборочной средней случайной величины R называется средняя взвешенная ее значений с весами, равными частотам:

$$\bar{r} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k} n_j \cdot r_j, \tag{1.3.8}$$

где n - объем выборки.

Заметим, что выборочная средняя будет разной для разных выборок одного и того же объема. Поэтому ее можно рассматривать как случайную величину. Можно показать, что математическое ожидание выборочной средней равно генеральной средней. В этом случае говорят, что $\bar{r}$ есть несмещенная оценка генеральной средней.

Выборочной дисперсией случайной величины R называется число

$$D = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k} n_j \cdot \left(r_j - \bar{r} \right)^2. \tag{1.3.9}$$

Известно, что выборочная дисперсия является смещенной оценкой генеральной дисперсии, т.е. ее математическое ожидание не равно генеральной дисперсии. Поэтому в качестве оценки генеральной дисперсии принимают так называемую **исправленную дисперсию**

$$D' = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{k} n_j \cdot \left(r_j - \bar{r} \right)^2, \tag{1.3.10}$$

которая и является несмещенной оценкой генеральной дисперсии.

Соответственно исправленное среднеквадратическое отклонение есть

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{k} n_j \cdot \left(r_j - \bar{r} \right)^2}. \tag{1.3.11}$$

Однако σ не является несмещенной оценкой.

Очевидно, что при достаточно больших значениях n объема выборки, выражения (1.3.9) - (1.3.10) различаются мало. На практике пользуются исправленной дисперсией, если примерно $n < 30$.

Для описания совокупности двух случайных величин, кроме их математических ожиданий, дисперсий и среднеквадратических отклонений пользуются и другими числовыми характеристиками - **ковариацией** (корреляционным моментом) и **коэффициентом корреляции.**

Выборочной ковариацией случайных величин R_1 и R_2 называется величина

$$\sigma_{12}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}n_j\cdot r_i^1\cdot r_j^2-r^{-1}\cdot r^{-2}, \qquad (1.3.12)$$

где n - объем выборки, n_{ij} - частота наблюдавшейся пары $\left(r_i^1,r_j^2\right)$, r^{-1} и r^{-2} - выборочные средние R_1 и R_2.

Ковариация служит для характеристики тесноты связи между случайными величинами. Если $\sigma_{12}=0$, то R_1 и R_2 - независимые случайные величины, если $\sigma_{12}\neq 0$ - зависимые.

Коэффициентом корреляции случайных величин R_1 и R_2 называется отношение ковариации к произведению средних квадратических отклонений этих величин

$$r_{12}=\frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\cdot\sigma_2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}n_{ij}\cdot r_i^1\cdot r_j^2-n\cdot r^{-1}\cdot r^{-2}}{n\cdot\sigma_1\cdot\sigma_2}, \qquad (1.3.13)$$

где σ_1 и σ_2- среднеквадратические отклонения R_1 и R_2. Содержательный смысл коэффициента корреляции тот же, что и ковариации. Преимущество его состоит в том, что он не зависит от выбора единиц измерения случайных величин, т.е. это безразмерная величина.

Две случайные величины R_1 и R_2 называются коррелированными, если $r_{12}\neq 0$. В этом случае R_1 и R_2 будут зависимыми. Обратное верно не всегда, т.е. две зависимые величины могут быть как коррелированными, так и некоррелированными.

В экономико-математических исследованиях часто требуется установить и оценить корреляционные зависимости между случайными величинами. Исходя из определения такой зависимости, для двух случайных величин R_1 и R_2 мы можем установить две корреляционные зависимости:

$$M\left(R_1\right)=\varphi\left(R_2\right),\ M\left(R_2\right)=\psi\left(R_1\right),$$

где $M\left(R_i\right)$ - математическое ожидание R_i. Первое **называется уравнением регрессии** R_1 на R_2, второе - уравнением регрессии R_2 на R_1; функция φ называется **регрессией** R_1 на R_2, функция ψ - регрессией R_2 на R_1.

Раздел математической статистики, который занимается корреляционными зависимостями, называется теорией корреляции. Ее первая задача - **регрессионный анализ**, т.е. установление форм корреляционных связей (вида функции регрессии). Наиболее часто функции регрессии оказываются линейными. Если обе функции φ, ψ оказываются линейными, то корреляция называется линейной; в противном случае - нелинейной. Вторая задача теории корреляции - **корреляционный анализ**, т.е. оценка тесноты корреляционной связи между случайными величинами. Теснота корреляционной зависимости R_1 и R_2 оценивается по величине рассеяния значений R_1 вокруг среднего значения $M\left(R_2\right)$ (т.е. по дисперсии или среднеквадратическому отклонению). Большое рассеяние свидетельствует о слабой зависимости R_1 и R_2, либо об отсутствии зависимости. Малое рассеяние указывает наличие достаточно сильной зависимости.

Одним из часто применяемых в практических исследованиях методов регрессионного анализа является **метод наименьших квадратов.** Объясним этот метод для линейной регрессии.

Рассмотрим две случайные величины X и Y с наблюдаемыми значениями $\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ и $\left(y_1,\ldots,y_n\right)$ соответственно. Модель линейной регрессии Y на X имеет вид:

$$y_i=\alpha+\beta x_i+\varepsilon_i,\quad i=1,\ldots,n.$$

Здесь α и β - параметры, подлежащие оценке, ε_i - ошибка (погрешность), равная разнице между фактическими значениями и значениями модели (случайная ненаблюдаемая величина). Из этих уравнений выразим ошибки:

$$\varepsilon_i = y_i - (\alpha + \beta x_i), \quad i = 1,\dots,n$$

и возведем в квадрат обе части:

$$\varepsilon_i^2 = \left[y_i - (\alpha + \beta x_i) \right]^2, \quad i = 1,\dots,n.$$

Суть метода наименьших квадратов заключается в поиске таких значений параметров (α, β), которые минимизируют сумму квадратов регрессионных ошибок:

$$S(\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (\alpha + \beta x_i) \right]^2 \to \min.$$

Для нахождения точки минимума (α^*, β^*) в этой задаче безусловной оптимизации используем необходимый признак оптимальности первого порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial \alpha} = -2\sum\limits_{i=1}^{n} \left(y_i - \alpha - \beta x_i \right) = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial \beta} = -2\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \left(y_i - \alpha - \beta x_i \right) = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему относительно α и β, найдем:

$$\alpha^* = \bar{y} - \beta \cdot \bar{x}, \; \beta^* = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x} \right) \cdot \left(y_i - \bar{y} \right)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x} \right)^2},$$

где $\bar{y} = M(Y), \; \bar{x} = M(X)$.

Итак, мы получили **уравнение регрессии** $Y = \alpha^* + \beta^* X$, график которого (**линия регрессии**) приведен на рис. 1.3.1.

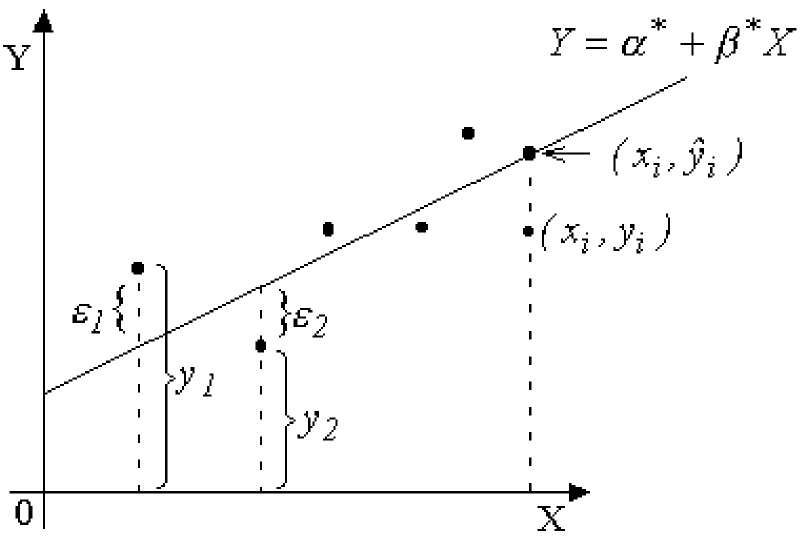

Рис. 1.3.1. Линия регрессии

На линии регрессии фактическому значению x_i соответствует **расчетное значение** $\hat{y}_i$ величины y_i:

$$\hat{y}_i = \alpha^* + \beta^* x_i, \ \ i = 1, \ldots, n.$$

Остаток наименьших квадратов $\hat{\varepsilon}_i$ выражается как разность фактического и расчетного значений:

$$\hat{\varepsilon}_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - \left(\alpha^* + \beta^* x_i\right), \ i = 1, \ldots, n,$$

т.е. остаток есть расчетное значение случайной ошибки.

В качестве меры адекватности регрессионной модели часто используют коэффициент корреляции. Чем больше значение этого коэффициента, тем выше степень адекватности уравнения регрессии (при достаточно большом числе наблюдений).

1.4. Прикладные экономические задачи: графические представления.

В основе многих математических исследований лежит выяснение зависимостей между различными экономическими величинами. Здесь недостаточно констатировать, что одна величина зависит от другой или ряда других. Нужно выяснить природу или закономерности этой взаимосвязи, иначе говоря, описать математически эту взаимосвязь.

Например, нас интересует рыночная стоимость какого-то товара. Обозначим ее буквой p. В числе основных факторов, от которых зависит эта величина, мы можем назвать вложенные в производство этого товара материальные (обозначим x_1) и трудовые (обозначим x_2) затраты, а так же спрос (обозначим x_3). В математике зависимую величину (p) называют **функцией**, а независимые величины (x_1, x_2, x_3) - **аргументами** и пишут $p = p(x_1, x_2, x_3)$. Эта запись означает, что каждым конкретным числовым значениям аргументов x_1, x_2, x_3 соответствует определенное числовое значение $p(x_1, x_2, x_3)$ функции p. Остается выяснить конкретный вид функций p, отражающий природу этой зависимости.

В математике изучаются различные виды функций, отличающихся друг от друга как по количеству аргументов, по внешнему (аналитическому) виду так и по свойствам.

Наиболее простыми являются функции, зависящие от одного аргумента: $f = f(x)$, $x \in R^1$. Часто указывается область $B \subset R^1$ допустимых значений аргумента (открытый или замкнутый интервал или множество дискретных (отдельных) точек на числовой оси). Так что функция f определена (имеет смысл) только для $x \in B$. На практике функции одного аргумента применяются при сравнительно неглубоких исследованиях.

Например, известно, что спрос, как платежеспособная потребность является функцией от цены товара и бюджета потребителя. То есть спрос -

это функция двух аргументов: $f = f\left(x_1, x_2\right)$. Но если нас интересует зависимость спроса только от цены товара, то "с некоторой натяжкой" можно считать, что спрос есть функция одного аргумента (цены): $f = f\left(x\right)$.

Поэтому напомним необходимые в дальнейшем определения как для функции одного аргумента, так и для функций многих аргументов. Функция $f = f\left(x\right)$, $x \in R^1$, называется **линейной функцией,** если ее можно представить в виде $f\left(x\right) = ax + b$, где a, b - *const* (постоянные числа).

Графиком линейной функции является прямая линия, причем при $b = 0$ она проходит через начало координат (рис. 1.4.1).

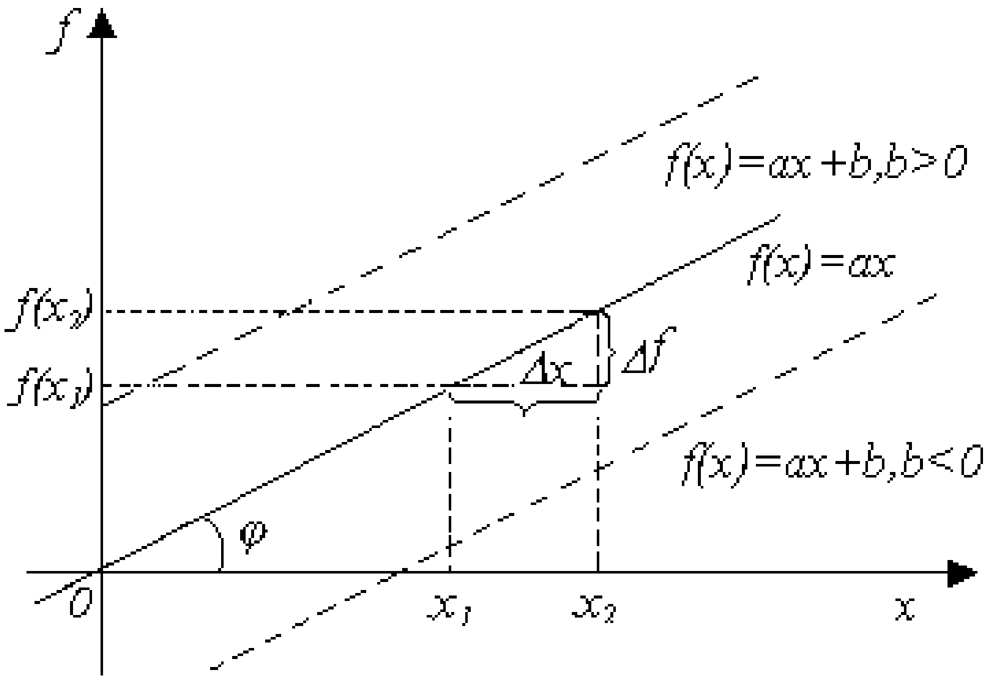

Рис. 1.4.1. График линейной функции

Наклон этой линии относительно положительного направления оси Ox зависит от величины коэффициента a.

Пусть $b = 0$ и $x_1, x_2 \in R^1$.

Обозначим $x_2 - x_1 = \Delta x$, $f\left(x_2\right) - f\left(x_1\right) = \Delta f$.

Тогда $a=\frac{\Delta f}{\Delta x}$ (отношение "противолежащего катета" к "прилежащему катету" относительно угла φ (см. рис.1.4.1)).

Поэтому $a=tg\varphi$ называется угловым коэффициентом – чем больше a, тем больше угол наклона φ и наоборот.

Функция многих переменных $f=f\left(x_1,...,x_n\right)$, $x=x_1,...,x_n$, называется линейной функцией, если ее можно представить в виде $f\left(x\right)=a_1x_1+...+a_nx_n+b$, где $a_1,...,a_n,b$ - *const*. Графическое изображение такой функции можно представить только при $n=2$ и им является двумерная плоскость в пространстве R^3, которое при $b=0$ проходит через начало координат; при $n>2$ функцию нельзя изобразить графически.

Линейные функции отражают прямо пропорциональную или обратно пропорциональную зависимость между экономическими показателями и факторами. Строго говоря, в экономике нет линейных зависимостей в чистом виде. Поэтому линейные функции весьма приближенно описывают существующие взаимосвязи. В то же время они находят широкое применение как в теории, так и в практике.

Для описания сложных экономических взаимосвязей применяются **нелинейные функции**. Из этого класса функций в математической экономике чаще других применяются степенные функции (содержащие элементы вида x^a, где a - *const*), показательные функции(содержащие элементы вида a^x, где a - *const*), логарифмические функции(содержащие элементы вида $\log_a x$, где a - *const*). Примеры графиков таких функций на плоскости показаны на рис.1.4.2.

Рис. 1.4.2. Графики нелинейных функций

Множество всех точек, для которых $f(x) = c$, где c-*const*, называется **линией уровня** функции f. Каждому числу c соответствует своя линия уровня функции f. Поэтому у любой функции существует бесконечное множество линий уровня. На рис.1.4.3 показано расположение линий уровня функции $f = x_1^2 + x_2$ в пространстве переменных x_1, x_2. Это есть парабола, описываемая уравнениями $x_1^2 + x_2 = c$ для различных c. Можно показать, что такие кривые заполняют всю плоскость R^2. Иначе говоря, для любой точки $\bar{x} \in R^2$ найдется такое число $\bar{c}$, что тогда $\bar{x}$ удовлетворяет уравнению $\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2 = \bar{c}$, то есть кривая $x_1^2 + x_2 = c$ проходит через точку $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$.

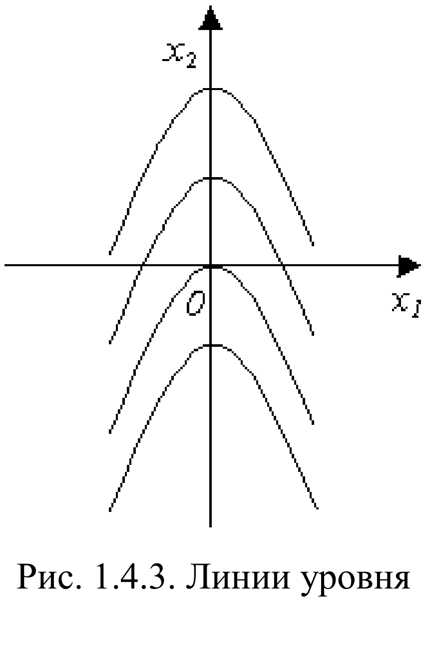

Рис. 1.4.3. Линии уровня

Для построения функций, описывающих взаимосвязи экономических величин, важную роль играют статистические данные, которые при их достаточном количестве указывают на закономерность взаимосвязей этих величин.

Функции могут быть построены исходя из логических соображений, вытекающих из условия реальной задачи, а также с использованием известных закономерностей и формул из области естествознания.

Задача 1.4.1. Наблюдение за рынком показало, что в течение шести месяцев спрос, предложение и цена на говядину в некотором регионе изменились следующим образом:

Экономические величины	М Е С Я Ц Ы					
	1	2	3	4	5	6
Спрос (тонна)	55	47.5	40	32.5	25	17.5
Предложение (тонна)	4.9	14.05	23.2	32.35	41.5	50.65
Цена (руб.)	30	35	40	45	50	55

Показать в виде функции следующие зависимости:

1. спроса от цены;
2. предложения от цены;
3. цены от спроса и предложения.

Решение: Для этого введем следующие обозначения: x_1 - спрос, x_2 - предложение, p - цена. Построим сначала функцию спроса x_1 от цены p. Построив по точкам (цена, спрос) видим, что функция спроса на плоскости $x_1 0 p$ изображается прямой линией (рис.1.4.4). Для первых двух месяцев имеем $\frac{\Delta x_1}{\Delta p} = \frac{55-47.5}{30-35} = -1.5$ Можно показать, что для остальных пар месяцев отношение $\frac{\Delta x_1}{\Delta p}$ имеет то же самое значение. Линия спроса пересекает ось

$0x_1$ в точке (0,100). Таким образом, мы получаем $x_1 = -1.5p + 100$. Рассуждая аналогично, получим аналитический вид функции предложения от цены $x_2 = 1.83p - 50$. Для определения вида функции цены от спроса и предложения, из полученных уравнений выразим цену: $p = 3.03(x_1 + x_2) - 151.5$.

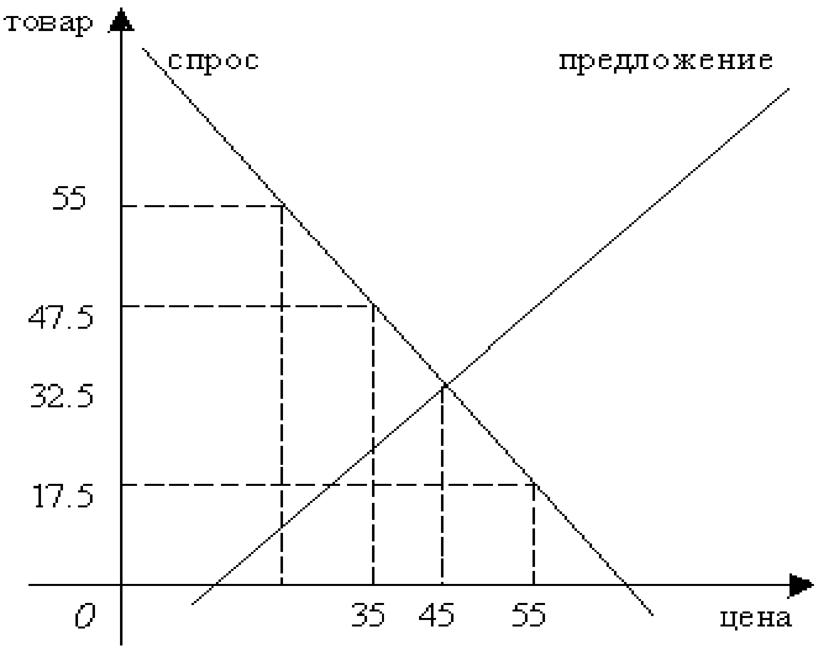

Рис. 1.4.4. Графическое изображение статистических данных из задачи 1.4.1

В задаче 1.4.1 показано, как можно построить функции с помощью статистических данных.

Определим еще один класс функций, имеющих применение в экономико-математических моделях. Это многозначные функции.

Функция f, заданная на некотором множестве $B \subset R^n$ и ставящее в соответствие каждой точке $x \in B$ не одно число $f(x) \in R^1$, а множество чисел $\{f(x)\} \in R^1$, называется **многозначной функцией**.

Задача 1.4.2. Необходимые покупателю товары двух видов имеются на рынке в количествах a_1 и a_2. Ему нужно купить как можно большее количество этих товаров, но обязательно в соотношении 1:2. Построить функцию, отражающую интерес данного покупателя по отношении к этим товарам.

Решение: Через x_i обозначим количество i-го товара. Тогда $B=\left\{x\in R^2 /\ \ 0\le x_1\le a_1, 0\le x_2\le a_2\right\}$ есть множество всех наборов из двух видов товаров.

Теперь искомую функцию на множестве B можно задать следующим образом: $f\left(x\right)=\begin{cases} y, & \text{\textit{если}} \quad x_1\le \min\limits_{y\in B}\left\{y_1, \frac{1}{2}y_2\right\} \\ 0, & \text{\textit{в противном случае.}} \end{cases}$

Для любой точки $x=\left(x_1,x_2\right)$, принадлежащей множеству B и удовлетворяющий условию $x_1:x_2=1:2$, всем значениям построенной функции соответствует отрезок прямой xz (рис. 1.4.5), то есть это есть многозначная функция.

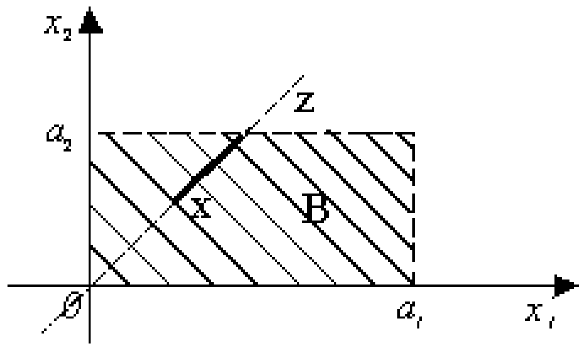

Рис. 1.4.5. Множество значений функции f из задачи 1.4.2

Обратим внимание на то, что каждое конкретное "значение" полученной выше функции выражается вектором $\left(x_1,x_2\right)$ (точкой отрезка xz). Поэтому это есть так называемая вектор-функция.

Так как в математической экономике любые множества и функции описывают ту или иную структуру и взаимосвязь между экономическими величинами, то любые их формальные (теоретические) свойства являются отражением или следствием фактов, имеющих место в реальной экономике.

Поэтому мы напомним только те свойства функций и множеств, которые допускают содержательную экономическую интерпретацию. При этом, в основном, будем говорить о функциях многих переменных, так как все приводимые ниже определения легко трансформируются на случай функции одной переменной.

Пусть функция f определена на множестве $B \subset R^n$, то есть $f: B \to R^1$.

Функция f называется **непрерывной в точке** $x^0 \in B$, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что при $\left|x - x^0\right| < \delta$ выполняется неравенство $\left|f(x) - f\left(x^0\right)\right| < \varepsilon$. Если функция f непрерывна в каждой точке $x \in B$, то она называется **непрерывной на множестве** B.

Экономический смысл непрерывной функции заключается в том, что при малом изменении значений факторов зависящий от них показатель изменяется незначительно. В качестве примера непрерывных функций в условиях стабильной экономики можно привести спрос и предложение на рынке товаров (как функций от цен товаров), прибыль предприятия (как функции от объемов выпуска и затрат), рентабельность производственных фондов (как функция от прибыли, стоимости основных фондов и оборотных средств) и так далее. Напротив, зависимость курса валют или ценных бумаг от политических или социальных факторов нельзя назвать непрерывной.

Хотя непрерывность экономических величин и является желательным свойством (с точки зрения предсказуемости, описуемости, управляемости), но в экономике имеют место и "сугубо" разрывные функции. Такова, например, величина денежного потока, как функция от времени: на одном отрезке времени - это положительная величина (приток денег), на следующем отрезке времени - отрицательная (отток денег).

Функция f называется **неубывающей (невозрастающей)** на множестве B, если из $x_1, x_2 \in B$ и $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) \le f(x_2)$ $\left(f(x_1) \ge f(x_2)\right)$.

Если эти неравенства строгие, то соответственно получаем определения **строго возрастающей** и **строго убывающей функций.**

Согласно известных экономических законов, спрос является убывающей функцией от цен товаров, а предложение, напротив, возрастающей функцией от тех же аргументов. Желательно, чтобы функции описывающие доход были возрастающими функциями своих аргументов, а затраты - убывающими функциями.

Функция f называется выпуклой (вогнутой) на множестве *B*, если для любых $x_1, x_2 \in B$ и $0 \le \alpha \le 1$ имеет место неравенство

$$f\left(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2\right) \le \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$$

$$\left(f\left(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2\right) \ge \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)\right). \qquad (1.4.1)$$

Здесь точка $\bar{x} = \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2$ называется выпуклой комбинацией точек x_1 и x_2, а число $\bar{f} = \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$ - выпуклой оболочкой двух чисел $f(x_1)$ и $f(x_2)$.

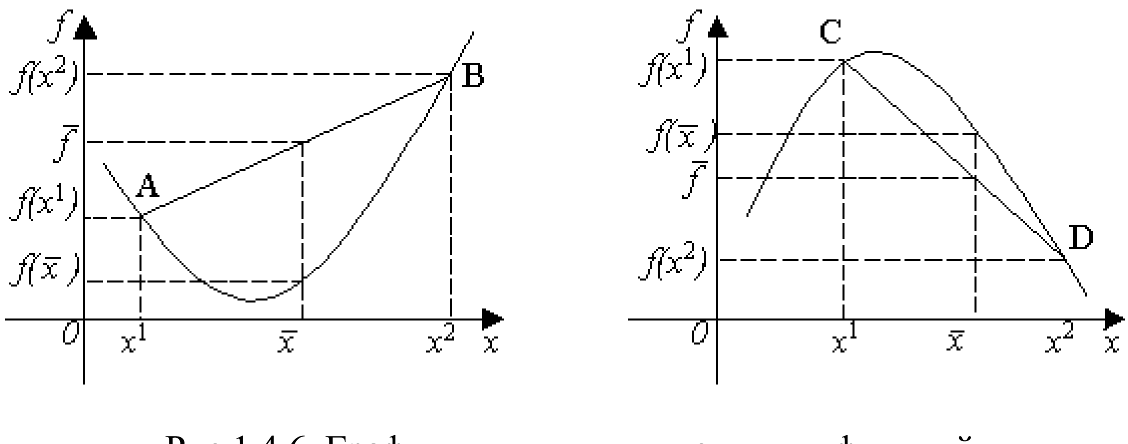

Рис 1.4.6. Графики выпуклых и вогнутых функций

Как видно из рис.1.4.6, для выпуклой (вогнутой) функции любая хорда AB (CD) лежит выше (ниже) дуги графика, которую она стягивает.

Для линейной функции (см.рис.1.4.1) в соотношениях (1.4.1) выполняется строгое равенство. Поэтому линейная функция является одновременно выпуклой и вогнутой функцией. Данные свойства имеют важное значение в так называемых оптимизационных моделях. Например, если доход выражается вогнутой функцией, то легко найти его наибольшее значение (соответствует верхней точке графика) и порождающие это значение факторы.