СОДЕРЖАНИЕ

Введение

В связи со вступлением в силу 30 июня 2015 года Федерального закона от 31.12.2014 N 488-ФЗ "О промышленной политике в Российской Федерации" [8], нормы которого имеют в основном бланкетный характер, возникла необходимость принятия или уточнения большого числа нормативно-правовых актов, в том числе в области мер стимулирования производства промышленной продукции посредством закупок товаров промышленного производства для обеспечения государственных нужд, как на территории Российской Федерации в целом, так и в отдельно взятых регионах.

Данные вопросы рамочно определены в данном федеральном законе в статье 18. «Меры стимулирования производства промышленной продукции на территории Российской Федерации, осуществляемые при осуществлении закупок товаров, работ, услуг для обеспечения государственных и муниципальных нужд и осуществлении таких закупок отдельными видами юридических лиц:

1. При осуществлении закупок товаров, работ, услуг для обеспечения государственных и муниципальных нужд и закупок товаров, работ, услуг отдельными видами юридических лиц, указанных в Федеральном законе от 18 июля 2011 года N 223-ФЗ "О закупках товаров, работ, услуг отдельными видами юридических лиц", устанавливается приоритет промышленной продукции, произведенной на территории Российской Федерации, на континентальном шельфе Российской Федерации, в исключительной экономической зоне Российской Федерации, перед промышленной продукцией, произведенной на территориях иностранных государств.» [8].

При этом законодатель четко определил ответственного за реализацию промышленной политики в разрезе федеральных законов от 5 апреля 2013 года N 44-ФЗ "О контрактной системе в сфере закупок товаров, работ, услуг для обеспечения государственных и муниципальных нужд" [5] и от 18 июля 2011 года N 223-ФЗ "О закупках товаров, работ, услуг отдельными видами юридических лиц" [4] – Правительство Российской Федерации:

«3. Правительство Российской Федерации вправе устанавливать требования по включению в контракты, заключаемые при осуществлении закупок товаров, работ, услуг для государственных и муниципальных нужд или закупок товаров, работ, услуг отдельными видами юридических лиц, указанных в Федеральном законе от 18 июля 2011 года N 223-ФЗ "О закупках товаров, работ, услуг отдельными видами юридических лиц", дополнительных условий по обеспечению развития производства промышленной продукции на территории Российской Федерации, на континентальном шельфе Российской Федерации, в исключительной экономической зоне Российской Федерации или внедрению в производство промышленной продукции на территории Российской Федерации, на континентальном шельфе Российской Федерации, в исключительной экономической зоне Российской Федерации новых технологий.» [8].

В научных статьях ряда авторов, таких как В.И. Еременко [2], Ю.А. Васильев [1], Э. Цыганков [19] посвященных вступлению в силу Федерального закона от 31.12.2014 N 488-ФЗ "О промышленной политике в Российской Федерации" [8] рассматриваются многие положения данного закона, но, к сожалению, вопросам прямой государственной поддержки предприятий промышленности через систему закупок внимания практически не уделяется. При этом необходимо отметить, что статья 8 Конституции Российской Федерации: «1. В Российской Федерации гарантируются единство экономического пространства, свободное перемещение товаров, услуг и финансовых средств, поддержка конкуренции, свобода экономической деятельности» [3] устанавливает единство экономического пространства, которое подразумевает возможность для хозяйствующих субъектов осуществлять экономическую деятельность на всей территории России по единым правилам без необходимости получения каких-либо дополнительных разрешений. Из этого следует, что органы государственной власти субъектов Российской Федерации, государственных предприятий и учреждений субъектов Российской Федерации не имеют возможности устанавливать дополнительные условия по обеспечению развития производства промышленной продукции на территории субъекта Российской Федерации.

В то же время наполнение и рост доходов бюджета субъекта Российской Федерации является важной задачей для его руководителя, который должен прямыми и косвенными методами стимулировать экономическое развитие вверенного ему региона. Была поставлена задача разработать предложения по стимулированию производства в субъекте Российской Федерации путем предоставления дополнительных законных возможностей для участия промышленных предприятий в проведении закупок промышленной продукции во время проведения закупок.

Разработанные предложения не носят характер проекта нормативно-правового акта, а могут быть использованы для обсуждения принципиального подхода с дальнейшим написанием проекта нормативного документа, и базируются на следующих принципах:

1. Соблюдение законодательства Российской Федерации и законодательства субъекта Российской Федерации.
2. Приоритет интересов субъекта Российской Федерации в закупке наиболее качественных товаров для нужд субъекта Российской Федерации.
3. Приоритет интересов субъекта Российской Федерации в максимально полном использовании промышленного потенциала субъекта Российской Федерации.
4. Приоритет интересов субъекта Российской Федерации в максимально полном использовании потенциала возможностей некоммерческих организаций субъекта Российской Федерации, объединяющих предприятия промышленности.
5. Приоритет интересов субъекта Российской Федерации в максимальной занятости населения в субъекте Российской Федерации.

Для формулирования предложений было решено использовать термины «передел» и «глубина передела». Термины «передел» и «глубина передела» достаточно часто встречаются в экономической литературе и периодически в нормативно-правовых и нормативных актах, а также в решениях арбитражных судов, в постановлениях и решениях административных комиссий ФАС и ФТС. Тем не менее, применение данных терминов вызывает сомнения, т.к. юридически они однозначно не определены. Так как не определено понятие «передела», то нет смысла говорить об определении понятия «глубины передела».

Понятие передела в интерпретации наук об экономике и организации производства встречается в следующих нормативно-правовых и нормативных актах в укрупненных группах:

А. Металлургическая и нефтехимическая промышленность:

- Постановление Совмина СССР от 22.08.1956 N 1173 (ред. от 27.09.1990) "Об утверждении списков производств, цехов, профессий и должностей, работа в которых дает право на государственную пенсию на льготных условиях и в льготных размерах": «20. Металлургические и химико-металлургические цехи, отделения, переделы, установки редкометаллической и титано-магниевой промышленности…» [16].
- Постановление Госгортехнадзора РФ от 24.04.2003 N 27 "Об утверждении "Правил безопасности при производстве свинца и цинка" (Зарегистрировано в Минюсте РФ 16.05.2003 N 4549): «2.10. Гидрометаллургический передел цинкового производства» [14].
- Постановление Госкомтруда СССР, Секретариата ВЦСПС от 29.10.1987 N 653/29-118 "Об утверждении разъяснения "О порядке применения утвержденных Постановлением Совета Министров СССР от 22 августа 1956 г. N 1173 Списков производств, цехов, профессий и должностей, работа в которых дает право на государственную пенсию на льготных условиях и в льготных размерах, к профессиям рабочих, наименования которых изменены в Едином тарифно-квалификационном справочнике

работ и профессий рабочих (выпуски ЕТКС N 1 - 72 утверждены Постановлениями Госкомтруда СССР и Секретариата ВЦСПС в 1983 - 1986 гг.)": «Металлургические и химико-металлургические цехи, отделения, переделы, установки редкометаллической и титаномагниевой промышленности» [15].

- Приказ Минтопэнерго РФ от 17.11.1998 N 371 (ред. от 12.10.1999) "Об утверждении Инструкции по планированию, учету и калькулированию себестоимости продукции на нефтеперерабатывающих и нефтехимических предприятиях": Приложение N 10 ПЕРЕЧЕНЬ ВАЖНЕЙШИХ КОМПЛЕКСНЫХ НЕФТЕХИМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ (ПРОИЗВОДСТВ), ПЕРЕДЕЛОВ И ПОРЯДОК КАЛЬКУЛИРОВАНИЯ СЕБЕСТОИМОСТИ НЕФТЕХИМИЧЕСКОЙ ПРОДУКЦИИ» [12].
- "ОК 004-93. Общероссийский классификатор видов экономической деятельности, продукции и услуг" (утв. Постановлением Госстандарта России от 06.08.1993 N 17) (ред. от 12.12.2012) (Часть III раздел D (коды 2430000 - 3440000)): «2713000 ИЗДЕЛИЯ ДАЛЬНЕЙШЕГО ПЕРЕДЕЛА ИЗ ПРОКАТА» [18].

Б. Концепции и стратегии:

- Распоряжение Правительства РФ от 08.12.2011 N 2227-р «Об утверждении Стратегии инновационного развития Российской Федерации на период до 2020 года»: «Содействие формированию и развитию технологических платформ направлено на решение следующих задач: …. расширение научно-производственной кооперации, формирование новых партнерств в инновационной сфере, новых цепочек формирования добавленной стоимости и производства продукции (услуг) более высокого передела…» [17].
- Распоряжение Правительства РФ от 17.11.2008 N 1662-р (ред. от 08.08.2009) «О Концепции долгосрочного социально-экономического развития Российской Федерации на период до 2020 года»: «Инновационный социально ориентированный тип экономического

развития Российской Федерации имеет ряд качественных и количественных характеристик. Во-первых, он опирается на модернизацию традиционных секторов российской экономики (нефтегазового, сырьевого, аграрного и транспортного), опережающее увеличение объема продукции отраслей высоких переделов, которые…» [6].

B. Финансы и бухгалтерская отчетность:

- Приказ Минфина России от 01.12.2010 N 157н (ред. от 29.08.2014) "Об утверждении Единого плана счетов бухгалтерского учета для органов государственной власти (государственных органов), органов местного самоуправления, органов управления государственными внебюджетными фондами, государственных академий наук, государственных (муниципальных) учреждений и Инструкции по его применению" (Зарегистрировано в Минюсте России 30.12.2010 N 19452): «137. Продукция (работы), не прошедшая всех стадий (фаз, переделов), предусмотренных технологическим процессом, а также изделия неукомплектованные, не прошедшие испытания и технической приемки, относятся к незавершенному производству.» [11].
- Приказ Минфина РФ от 28.12.2001 N 119н (ред. от 24.12.2010) "Об утверждении Методических указаний по бухгалтерскому учету материально-производственных запасов" (Зарегистрировано в Минюсте РФ 13.02.2002 N 3245): «146. Применение организацией программ автоматизации учетных работ должно обеспечить формирование необходимых регистров бухгалтерского учета материалов, основными из которых могут быть: … ведомость расхода материалов по заказам, сериям, переделам, другим калькуляционным единицам;…» [13].

Таким образом, термин «передел» имеет в соответствии с законодательством России, в котором он часто употребляется, определение аналога калькуляционной единицы, что дает возможность дать ему в рамках калькуляционной единицы собственное определение.

В соответствии с Приказом Росстандарта от 31.01.2014 N 14-ст "О принятии и введении в действие Общероссийского классификатора видов экономической деятельности (ОКВЭД2) ОК 029-2014 (КДЕС Ред. 2) и Общероссийского классификатора продукции по видам экономической деятельности (ОКПД2) ОК 034-2014 (КПЕС 2008)" (современная редакция от 16.10.2018.) [7] в Российской Федерации введены ОКВЭД2 с 6 разрядами видов экономической деятельности (то есть миллион вариантов) и ОКПД2 с 9 категориями (подкатегориями) продукции по видам экономической деятельности (то есть миллиард вариантов).

Производство в любой отрасли промышленности имеет результатом получения из сырья (нескольких видов сырья) продукта (продуктов). Таким образом, сырье (несколько видов сырья) и/или полуфабрикат(ы) должно(ы) иметь каждое свое (свои) девятизначное(ые) значение(я) согласно ОКПД2. Продукт (продукты) и/или полуфабрикат(ы) также должен(ны) иметь свое (свои) девятизначное(ые) значение(я) согласно ОКПД2. Производство, то есть преобразование сырья (нескольких видов сырья) и/или полуфабриката(ов) в продукт (продукты) и/или полуфабрикат(ы) происходит через вид (ряд видов) экономической деятельности, каждый(ые) из которых соответствует(ют) свое(свои) шестизначное(ые) значение(я) согласно ОКВЭД2.

Каждому виду экономической деятельности в области промышленного производства должно соответствовать то или иное оборудование, а также специалисты или работники определенного уровня квалификации. При этом технология производства в виде регламента технологического процесса или иного документа должна быть стандартизована как минимум локальным нормативным актом организации – приказом, который должен регламентировать при данном конкретном виде экономической деятельности вид сертифицированного оборудования и уровень квалификации рабочих (специалистов). И так для каждого производственного процесса вплоть до добычи сырья.

Таким образом, можно дать определение переделу в рамках нормативно-правовых и нормативных актов Российской Федерации (с дальнейшим возможным закреплением его нормативно-правовым актом субъекта Российской Федерации):

ПЕРЕДЕЛ – это как минимум один вид экономической деятельности с соответствующим ОКВЭД по преобразованию как минимум одного вида сырья (полуфабриката) с соответствующим ОКПД в как минимум один вид готовой продукции (полуфабриката) с иным ОКПД, использующий стандартизованные оборудование и труд соответствующего уровня квалификации рабочих (специалистов).

Соответственно «глубина передела», как макроэкономическая категория, будет измеряться количеством переделов при производстве продукции внутри данного государства, федерального округа, субъекта федерации.

Таким образом, оптимизация процессов управления наукоемкими производствами представляет собой двойственную задачу: с одной стороны оптимизацию каждого конкретного передела в рамах производства конкретной продукции, а с другой стороны оптимизацию всех переделов в целом при производстве всех видов продукции предприятием. Естественно при этом возникает множество промежуточных задач, как например оптимизация всех переделов при производстве конкретной продукции на данном предприятии. При этом именно руководителю производства необходимо выбрать как тот конкретный вид передела/переделов которые подлежат оптимизации, так и глубину оптимизации, что и будет рассмотрено в дальнейшем в данном учебнике.

Таким образом, никакие компьютерные модели не заменят человека – конкретного руководителя производства: решение всегда будет за ним. А модели оптимизации процессов управления наукоемким производством являются тем аппаратом, который ему необходимо использовать при принятии управленческих решений.

Дисциплина «Оптимизации процессов управления наукоемким производством» при подготовке магистров по направлению 27.04.06 – Организация и управление наукоемкими производствами охватывает различные области прикладной математики, такие как целочисленное линейное программирование, теорию игр и приближенные методы решения, теорию вероятностей. В каждом конкретном случае при моделировании процессов именно лицо, принимающее решения – руководитель производства, определяет, каким математическим аппаратом он будет пользоваться. Естественно список методов решения прикладных задач не исчерпывается приведенными в учебнике, поэтому в конце учебника приведен список рекомендуемых математических методов для самостоятельного изучения и рекомендуемая литература по разделам, которая частично использована и в разделах данного учебника.

Автор выражает благодарность исполняющему обязанности директора Института передовых производственных технологий Салкуцану С.В.; профессору Аркину П.А.; доцентам: Аркиной К.Г., Левенцову В.А., Мухановой Н.В.; старшим преподавателям Лаврову А.С., Щеголеву В.В.; магистрам Иванову М.Б., Овчару Б.А., Фарберу Э.М., совместные материалы, опубликованные с которыми [20 - 30], послужили основой для написания данного учебника.

1. **Применение аппарата целочисленного линейного программирования при оптимизации процессов управления наукоемким производством**

1.1. **Методические вопросы оптимизации процессов управления**

Рост глубины передела промышленной продукции на предприятиях [9] требует оптимизации производственного планирования, автоматизации и компьютеризации процессов управления, которые охватывают как инженерно-экономические процессы управления производством, такие как автоматизация сетевого планирования, диспетчирования и оперативного контроля производств на базе современных оптимизационных моделей, так и роботизацию и компьютеризацию производств (создание и внедрение программно-аппаратных управляющих комплексов) в разных отраслях промышленности.

На сегодняшний день существует несколько распространенных программных продуктов, позволяющих в той или иной степени выполнять задачи по планированию и диспетчеризации производства. Есть, в том числе, и российские производители, однако ни один из этих продуктов не удовлетворяет одновременно следующим требованиям:

1. Полный цикл планирования, начиная от конструкторско-технологической подготовки и заканчивая формированием сменно-суточных заданий.

2. Диспетчеризация производства с учетом уже имеющейся загрузки рабочих центров.

3. Программное решение, выполненное на самой распространенной в Российской Федерации отечественной программной платформе «1С:Предприятие 8» (более 1 млн. организаций).

4. Интеграция с программно-аппаратными комплексами, необходимыми для обеспечения бесперебойной и мгновенной передачи данных о состоянии технического парка и стадии выполнения производственной программы.

Первоначально многими в качестве методики оптимизации рассматривалась теория ограничений (теория критического пути) — популярная методика проектного менеджмента, разработанная в 1980-е годы Элияху Голдраттом, в основе которой лежит нахождение и управление ключевым ограничением системы [3], которое предопределяет успех и эффективность всей системы в целом. Основной особенностью методики является то, что делая усилия над управлением очень малым количеством аспектов системы, достигается эффект, намного превышающий результат одновременного воздействия на все или большинство проблемных областей системы сразу. Главная мысль Голдратта состоит в том, чтобы не бороться за тотальную производительность, а сосредоточиться на определении узких мест в производстве, продаже и начать бороться с ними. Узкое место найти весьма сложно, в книгах Голдратта эти узкие места зачастую находятся вслепую, а не с помощью экономико-математических оптимизационных методов.

Действительно известен ряд научных работ, в которых Голдратта активно цитируют, что правда не говорит о его признании в научных кругах [11, 12, 13, 14, 17]. При этом в англоязычной литературе теория ограничений разрабатывалась давно как теория критического пути и экономико-математическое моделирование в проектном менеджменте [15, 16, 18, 20]. Более подробно обоснование не научности теории ограничений можно посмотреть в статье Дана Трича «Почему критический путь с другим названием будет на вкус менее сладок? На пути к целостному подходу к PERT / CPM» [19].

Там же Дан Трич отсылает нас к первоисточникам теории ограничений – трудам советских математиков В.М. Португала и А.А. Первозванского. Так А.А. Первозванский в монографии о математических моделях в управлении производством [7] рассматривает аналитическое решение поточного производства с узким местом и обсуждает связь между ограничениями ресурса и истинным критическим путем в проектах задолго до Голдратта.

Один из основных тезисов теории ограничений заключается в том, что если в системе имеется дефицит ресурса – «узкое место», то потери мощности других ресурсов несущественны. Трич показывая, что многокритериальность вредна, ссылается на работы другого советского математика В.М. Португала [8], показавшего в СССР еще в 1970-е годы пагубное влияние многозадачности на производительность для любых проектов. Точно также математические программные принципы и модели (например, линейное программирование, за создание в 1939 году аналитической техники которого (описана в [4]) Л.В. Канторович получил премию Банка Швеции имени А. Нобеля) заменяет теорию ограничений. Таким образом, теория оптимального распределения ресурсов и теория двойственности в линейном программировании, базис которых заложил в 1939 году в Советском Союзе Л.В. Канторович, опередили выводы Голдратта об ошибках традиционного учета почти на пол века. Выбрав в качестве основы оптимизации математический аппарат линейного программирования, необходимо отметить следующее. Трудности в решении задач линейного программирования зависят не от количества переменных $\boldsymbol{n}$, а от количества ограничений $\boldsymbol{m}$, определяющих число итераций симплекс-метода. Поэтому, если прямая задача линейного программирования, еще не приведенная к стандартной форме, содержит большое количество ограничений ($\boldsymbol{m}>\boldsymbol{n}$), как это чаше всего бывает в оптимизационных задачах в области организации производства, то в этом случае целесообразно перейти к двойственной задаче и использовать аппарат теории двойственности.

Теоретическое исследование позволило «наложить» на оптимизационные расчеты с помощью теории двойственности теорию великого русского математика академика Императорской Санкт-Петербургской Академии наук А.А. Маркова, использовав аппарат Марковского процесса, то есть процесса, протекающего в некоторой системе, при котором для каждого момента времени поведение системы в будущем зависит только от состояния системы в данный момент и не зависит от того, каким образом система пришла в это состояние. Случайный процесс $X(t)$ с дискретным временем и дискретным множеством значений называется в теории А.А. Маркова случайной цепью, а случайная цепь, для которой в каждый момент времени закон распределения $X(t_k)$ вполне определяется значением $X(t_{k-1})$ и не зависит от предыдущих значений простой Марковской цепью [6]. При этом Марковская задача принятия решений – это задача математического программирования к многошаговым задачам принятия решений в условиях риска, в которой процесс изменения состояния любой изучаемой системы является Марковским процессом с конечным множеством возможных состояний и дискретным временем. Математические модели, приводящие к таким задачам, называют Марковскими моделями принятия решений. Основная цель — определение оптимальной стратегии (оптимального решения), максимизирующей ожидаемый доход за конечное или бесконечное число этапов Марковского процесса изменения состояния системы. Ожидаемый доход при этом связан лишь с переходами системы из одного возможного состояния в другое при фиксированном допустимом решении.

В качестве принципа оптимальности, совпадающего с критерием оптимальности, используется максимизация ожидаемого дохода за N этапов. При этом специфика решения задач прежде всего связана с тем, будет ли число этапов N конечным или нет. В соответствии с этим рассматривают задачи принятия решений с конечным горизонтом планирования, когда $N < \infty$, или с бесконечным горизонтом планирования, когда $N = \infty$ [1].

Необходимо отметить, что лицо, принимающее решения, может интересовать величина ожидаемого дохода при заранее определенной стратегии поведения в случае того или иного состояния системы. Так, например, лицо, принимающее решения, может считать, что если после

(i–1)-го этапа система находится в состоянии S_j, то безотносительно к конкретному значению j всегда необходимо принимать решение $X^* \in G$. В этом случае говорят, что процесс принятия решений описывается стационарными стратегиями. При конечном горизонте планирования $N < \infty$ Марковскую задачу принятия решений представляют как задачу динамического программирования.

Поскольку решение реальных оптимизационных задач с аппаратом двойственности линейного программирования [10] является громоздким, механизм работы алгоритма представлен далее на простом примере производства кирпичей при $N = 2$.

Задача 1.1.1 (N = 1): Кирпичный завод выпускает кирпичи двух марок М1 и М2. Для производства кирпича применяется глина трех видов – А; В; С. Нормы расхода глины каждого вида на 1 кирпич М1 равны 4; 2; 1 условных единиц (далее – УЕ); на один кирпич М2 – 2; 3; 4 условных единиц. Общие запасы глины А, В и С составляют 320; 480; 360 условных единиц. Прибыль от реализации одного кирпича марки М1 – 5 УЕ; а от марки М2 – 8 УЕ. Сколько нужно выпустить изделий каждого вида, чтобы прибыль была наибольшей?

Решение: Для наглядности представим исходную информацию в таблице1.1.1.

Таблица 1.1.1

Исходная информация к Задаче 1.1.1

	Кирпич М1	Кирпич М2	Запасы
Глина А	4	2	320
Глина В	2	3	480
Глина С	1	4	360
Прибыль	5	8	

Пусть x_1 (шт.) - количество кирпичей М1, x_2 (шт.) - количество кирпичей М2. Тогда математическая модель выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 320 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 480 \\ x_1 + 4x_2 \le 360 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

$$F(X) = 5x_1 + 8x_2 \to \max$$

Решим прямую задачу линейного программирования симплексным методом [5].

Определим максимальное значение целевой функции F(X) = $5x_1$ + $8x_2$ при следующих условиях-ограничениях:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 320 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 480 \\ x_1 + 4x_2 \le 360 \end{cases}$$

Для построения первого опорного плана систему неравенств приведем к системе уравнений путем введения дополнительных переменных (переход к канонической форме [2]).

В 1-м неравенстве смысла (≤) вводим базисную переменную x_3. В 2-м неравенстве смысла (≤) вводим базисную переменную x_4. В 3-м неравенстве смысла (≤) вводим базисную переменную x_5.

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 320 \\ 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 = 480 \\ x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 = 360 \end{cases}$$

Базисные переменные это переменные, которые входят только в одно уравнение системы ограничений и притом с единичным коэффициентом. Переменные x_1, x_2, которые у нас были до введения базисных, называются свободными переменными. Экономический смысл базисных переменных: дополнительные переменные задачи линейного программирования обозначают излишки сырья, времени, других ресурсов, остающихся в производстве данного оптимального плана.

Теперь переходим непосредственно к основному алгоритму симплекс-метода и последовательно решаем задачу. Решение объемное, мы его опустим. Приведем лишь последнюю симплекс-таблицу.

Таблица 1.1.2

Итоговые значения решения задачи 1 симплекс-методом

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	40	1	0	$^{2}/_{7}$	0	$^{-1}/_{7}$
x_4	160	0	0	$^{-5}/_{14}$	1	$^{-4}/_{7}$
x_2	80	0	1	$^{-1}/_{14}$	0	$^{2}/_{7}$
F(X3)	840	0	0	$^{6}/_{7}$	0	$1^{4}/_{7}$

Получаем следующее оптимальное решение для нашей задачи:

$x_1 = 40,\ x_2 = 80$

$F(X) = 5 \cdot 40 + 8 \cdot 80 = 840$

Таким образом, мы получили, что максимальную прибыль мы получим, если при существующих запасах материалов мы выпустим 40 кирпичей М1 и 80 кирпичей М2.

Теперь построим двойственную задачу по следующим правилам.

1. Количество переменных в двойственной задаче равно количеству неравенств в исходной.

2. Матрица коэффициентов двойственной задачи является транспонированной к матрице коэффициентов исходной.

3. Система ограничений двойственной задачи записывается в виде неравенств противоположного смысла неравенствам системы ограничений прямой задачи.

Столбец свободных членов исходной задачи является строкой коэффициентов для целевой функции двойственной. Целевая функция в одной задаче максимизируется, в другой минимизируется.

Таблица 1.1.3

Перевод исходной задачи в двойственную

Исходная задача I		Двойственная задача II
$x_1 \geq 0$	$\leftrightarrow$	$4y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 5$
$x_2 \geq 0$	$\leftrightarrow$	$2y_1 + 3y_2 + 4y_3 \geq 8$
$5x_1 + 8x_2 \to \max$	$\leftrightarrow$	$320y_1 + 480y_2 + 360y_3 \to \min$
$4x_1 + 2x_2 \leq 320$	$\leftrightarrow$	$y_1 \geq 0$
$2x_1 + 3x_2 \leq 480$	$\leftrightarrow$	$y_2 \geq 0$
$x_1 + 4x_2 \leq 360$	$\leftrightarrow$	$y_3 \geq 0$

Итак, математическая модель двойственной задачи выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} 4y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 5 \\ 2y_1 + 3y_2 + 4y_3 \geq 8 \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0$$

$$Z(Y) = 320y_1 + 480y_2 + 360y_3 \to \min$$

Оптимальный план двойственной задачи равен:

$$y_1 = \frac{6}{7},\ y_2 = 0,\ y_3 = 1\frac{4}{7}$$

$$Z(Y) = 320 \cdot \frac{6}{7} + 480 \cdot 0 + 360 \cdot 1\frac{4}{7} = 840$$

В соответствии с критерием оптимальности если существуют такие допустимые решения X и Y прямой и двойственной задач, для которых выполняется равенство целевых функций F(x) = Z(y), то эти решения X и Y являются оптимальными решениями прямой и двойственной задач соответственно. Решение двойственной задачи дает оптимальную систему оценок ресурсов. Используя вторую теорему двойственности [2] определим дефицитные и недефицитные (избыточные) ресурсы. Для этого подставим оптимальный план прямой задачи в систему ограниченной математической модели:

$$\begin{cases} 4\cdot 40 + 2\cdot 80 = 320 = 320 \\ 2\cdot 40 + 3\cdot 80 = 320 < 480 \\ 1\cdot 40 + 4\cdot 80 = 360 = 360 \end{cases}$$

1-ое ограничение прямой задачи выполняется как равенство. Это означает, что 1-ый ресурс полностью используется в оптимальном плане, является дефицитным и его оценка согласно второй теореме двойственности отлична от нуля ($y_1 \neq 0$).

2-ое ограничение выполняется как строгое неравенство, т.е. ресурс 2-го вида израсходован не полностью. Значит, этот ресурс не является дефицитным и его оценка в оптимальном плане $y_2 = 0$. Неиспользованный экономический резерв ресурса 2 составляет 160 (480-320). Этот резерв не может быть использован в оптимальном плане, но указывает на возможность изменений в объекте моделирования (например, резерв ресурса можно продать или сдать в аренду).

3-ое ограничение прямой задачи выполняется как равенство. Это означает, что 3-ый ресурс полностью используется в оптимальном плане, является дефицитным и его оценка согласно второй теореме двойственности отлична от нуля ($y_3 \neq 0$).

Двойственные оценки отражают сравнительную дефицитность различных видов ресурсов в отношении принятого в задаче показателя эффективности. Оценки показывают, какие ресурсы являются более дефицитными, (они будут иметь самые высокие оценки), какие менее дефицитными и какие совсем недефицитны (избыточны) - они будут равны нулю. При подстановке оптимальных двойственных оценок в систему ограничений двойственной задачи мы обосновываем эффективность оптимального плана, получаем:

$$\begin{cases} 4\cdot\frac{6}{7}+2\cdot 0+1\cdot 1\frac{4}{7}=5=5 \\ 2\cdot\frac{6}{7}+3\cdot 0+4\cdot 1\frac{4}{7}=8=8 \end{cases}$$

1-ое ограничение двойственной задачи выполняется как равенство. Это означает, что 1-ый продукт экономически выгодно производить, а его использование предусмотрено оптимальным планом прямой задачи (x_1>0). 2-ое ограничение двойственной задачи выполняется как равенство. Это означает, что 2-ый продукт экономически выгодно производить, а его использование предусмотрено оптимальным планом прямой задачи (x_2>0).

Проведем анализ устойчивости оптимального плана и оценим степень влияния изменения ресурсов на значение целевой функции. Так как любые изменения коэффициентов целевой функции оказывают влияние на оптимальность полученного ранее решения, то наша цель - найти такие диапазоны изменения коэффициентов в целевой функции (рассматривая каждый из коэффициентов отдельно), при которых оптимальные значения переменных остаются неизменными.

Чувствительность решения к изменению коэффициентов целевой функции.

Пусть каждое значение параметра целевой функции изменится на $\Delta\ c_i$. Найдем интервалы, при которых будет экономически выгодно использование ресурсов. Допустимые диапазоны изменения коэффициентов в целевой функции определятся из соотношений:

1-ый параметр целевой функции может изменяться в пределах: $\Delta c^-_1 = \min\ [y_k/d_{1k}]$ для $d_{1k}>0$.

$\Delta c^+_1 = |\max[y_k/d_{1k}]|$ для $d_{1k}<0$.

$$\Delta c_1^- = min[\frac{\frac{6}{7}}{\frac{2}{7}}, +\infty] = 3$$

$$\Delta c_1^+ = |max[\frac{\frac{11}{7}}{\frac{-1}{7}}, -\infty]| = 11$$

где в знаменателе коэффициенты столбцов свободных переменных в оптимальном плане (см. таблицу 1.1.2).

Таким образом, 1-параметр может быть уменьшен на 3 или увеличен на 11.

Интервал изменения равен: $(c_1 - \Delta c_1^-; c_1 + \Delta c_1^+)$=[5-3; 5+11] = [2;16]

Если значение c_1 будет лежать в данном интервале, то оптимальный план не изменится.

2-ый параметр целевой функции может изменяться в пределах: $\Delta c^-_2 = \min [y_k/d_{2k}]$ для $d_{2k}>0$.

$\Delta c^+_2 = |\max[y_k/d_{2k}]|$ для $d_{2k}<0$.

$$\Delta c_2^- = min[\frac{\frac{11}{7}}{\frac{2}{7}}, +\infty] = \frac{11}{2}$$

$$\Delta c_2^+ = |max[\frac{\frac{6}{7}}{\frac{-1}{14}}, -\infty]| = 12$$

Таким образом, 2-параметр может быть уменьшен на $^{11}/_2$ или увеличен на 12. Интервал изменения равен: $(c_2 - \Delta c_2^-; c_2 + \Delta c_2^+)=[8-^{11}/_2; 8+12]=[^5/_2;20]$. Если значение c_2 будет лежать в данном интервале, то оптимальный план не изменится.

Чувствительность решения к изменению запасов сырья.

Найдем такие интервалы изменения каждого из свободных членов системы ограничений исходной задачи линейного программирования, в которых оптимальный план двойственной задачи не менялся бы 1-ый запас может изменяться в пределах:

$\Delta b^-_1 = \min[x_k/d_{k1}]$ для $d_{k1}>0$.

$\Delta b^+_1 = |\max[x_k/d_{k1}]|$ для $d_{k1}<0$.

$$\Delta b_1^- = min[\frac{40}{\frac{2}{7}}, +\infty] = 140$$

$$\Delta b_1^+ = |max[\frac{160}{\frac{-5}{14}}, \frac{80}{\frac{-1}{14}}, -\infty]| = 448$$

Таким образом, 1-ый запас может быть уменьшен на 140 или увеличен на 448 Интервал изменения равен: $(b_1 - \Delta b^-_1;\ b_1 + \Delta b^+_1)$=[320-140; 320+448] = [180;768]

2-ой запас может меняться в пределах.

Нижняя граница для: Δb^-_2

$\Delta b^-_2 = \min[x_k/d_{k2}]$ для $d_{k2}>0$.

$$\Delta b_2^- = min[\frac{160}{1}, +\infty] = 160$$

Таким образом, 2-ый запас может быть уменьшен на 160. 2-ой вид ресурса в оптимальном плане недоиспользован, является недефицитным. Увеличение данного ресурса приведет лишь к росту его остатка. При этом структурных изменений в оптимальном плане не будет, так как двойственная оценка $y_2 = 0$.

Другими словами, верхняя граница $b^+_2 = +\infty$

$$\Delta b_2^+ = +\infty$$

Интервал изменения равен: $(b_2 - \Delta b^-_2; +\infty)$=[480-160; +∞] = [320;+∞].

3-ий запас может изменяться в пределах:

$\Delta b^-_3 = \min[x_k/d_{k3}]$ для $d_{k3}>0$.

$\Delta b^+_3 = |\max[x_k/d_{k3}]|$ для $d_{k3}<0$.

$$\Delta b_3^- = min[\frac{80}{\frac{2}{7}}, +\infty] = 280$$

$$\Delta b_3^+ = |max[\frac{40}{\frac{-1}{7}}, \frac{160}{\frac{-4}{7}}, -\infty]| = 280$$

Таким образом, 3-ый запас может быть уменьшен или увеличен на 280 Интервал изменения равен: $(b_3 - \Delta b^-_3;\ b_3 + \Delta b^+_3)$=[360-280; 360+280] = [80;640].

При выполнении оптимальной производственной программы первый и третий ресурсы используются полностью, т.е. образуют «узкие места производства». Их следует заказать дополнительно. Найдем объем приобретения дополнительных ресурсов, удовлетворяющих указанным условиям и вычислим дополнительную возможную прибыль. Обозначим $T=(t_1,t_2,t_3)$ - вектор дополнительных объемов ресурсов. Причем уже известно, что $t_2=0$. При этом, для сохранения структуры производственной программы, должно выполняться условие устойчивости двойственных оценок: $H+Q^{-1}T\geq 0$,

Где $H=\begin{pmatrix}40\\160\\80\end{pmatrix}$, $Q^{-1}=\begin{pmatrix}2/7 & 0 & -1/7\\ -5/14 & 1 & -4/7\\ -1/1 & 0 & 2/7\end{pmatrix}$

Запишем и преобразуем матричное неравенство:

$$\begin{pmatrix}40\\160\\80\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2/7 & 0 & -1/7\\ -5/14 & 1 & -4/7\\ -1/1 & 0 & 2/7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}t_1\\0\\t_3\end{pmatrix}\geq 0$$

Получаем систему неравенств: $\begin{cases}40+\frac{2}{7}t_1-\frac{1}{7}t_3\geq 0\\ 160-\frac{5}{14}t_1-\frac{4}{7}t_3\geq 0\\ 80-\frac{1}{14}t_1+\frac{2}{7}t_3\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\frac{2}{7}t_1+\frac{1}{7}t_3\leq 40\\ \frac{5}{14}t_1+\frac{4}{7}t_3\leq 160\\ \frac{1}{14}t_1-\frac{2}{7}t_3\leq 80\end{cases}.$

Дополнительные объемы ресурсов по смыслу задачи не могут быть отрицательны.

Таким образом, задача свелась к тому, чтобы найти вектор $T=(t_1,0,t_3)$ максимизирующий суммарный прирост прибыли $W(T)=\frac{6}{7}t_1+1\frac{4}{7}t_3\to\max$

И перед нами новая задача линейного программирования:

$$\begin{cases} -\frac{2}{7}t_1+\frac{1}{7}t_3\le 40 \\ \frac{5}{14}t_1+\frac{4}{7}t_3\le 160 \\ \frac{1}{14}t_1-\frac{2}{7}t_3\le 80 \end{cases}$$

$t_1\ge 0, t_3\ge 0$

$W(T)=\frac{6}{7}t_1+1\frac{4}{7}t_3\to\max$

Решим задачу симплекс методом и получим, что программа «расшивки», т.е. размер дополнительных ресурсов имеет вид: $T=(0,0,280)$, а рост прибыли $W(T)=1\frac{4}{7}\cdot 280=440.$

Или, если у нас будет еще 280 единиц глины С, то можно рассчитывать на дополнительную прибыль в 440 условных единиц.

Теперь сформулируем новую задачу с учетом «расшивки» (N = 2).

Задача 1.1.2 (N = 2): Кирпичный завод выпускает кирпичи двух марок М1 и М2. Для производства кирпича применяется глина трех видов – А; В; С. Нормы расхода глины каждого вида на 1 кирпич М1 равны 4; 2; 1 условных единиц; на один кирпич М2 – 2; 3; 4 условных единиц. Общие запасы глины А, В и С составляют 320; 480; 360+280 условных единиц. Прибыль от реализации одного кирпича марки М1 – 5 УЕ; а от марки М2 – 8 УЕ. Сколько нужно выпустить изделий каждого вида, чтобы прибыль была наибольшей?

Решение: Представим исходную информацию в таблице 1.1.4.

Таблица 1.1.4

Исходная информация к Задаче 2

	Кирпич М1	Кирпич М2	Запасы
Глина А	4	2	320
Глина В	2	3	480
Глина С	1	4	640
Прибыль	5	8	

Пусть x_1 (шт.) - количество кирпичей М1, x_2 (шт.) - количество кирпичей М2. Тогда математическая модель выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 320 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 480 \\ x_1 + 4x_2 \le 640 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

$$F(X) = 5x_1 + 8x_2 \to \max$$

Решим задачу линейного программирования симплекс-методом аналогично задаче 1. Получим следующее оптимальное решение для нашей задачи:

$x_1 = 0$, $x_2 = 260$

$F(X) = 5 \cdot 0 + 8 \cdot 260 = 1280$.

Как и предполагалось, наша прибыль увеличится на 1280-840=440 условных единиц. Но получится она в результате выпуска только кирпичей М2. С задачей 1.1.2 можно повторить используя аппарат двойственности, операцию расшивки еще раз и посмотреть, как еще можно добиваться увеличения прибыли. В итоге разработанная модель планирования и диспетчеризации производства с одной стороны включает все необходимые инструменты, обеспечивающие технологичность и другие оптимальные значения показателей производственного процесса. С другой стороны, учтены практические ограничения, часто встречающиеся на промышленных предприятиях и не укладывающиеся в классическую модель.

1.2. Линейное программирование: некоторые экономические и технические задачи, сводимые к задачам линейного программирования

Задачи оптимального планирования, связанные с отысканием оптимума заданной целевой функции при наличии ограничений в виде линейных уравнений или линейных неравенств относятся к задачам линейного программирования.

Линейное программирование - наиболее разработанный и широко применяемый раздел математического программирования. Это объясняется следующим:

- математические модели очень большого числа экономических задач линейны относительно искомых переменных;
- эти типы задач в настоящее время наиболее изучены;
- для них разработаны специальные конечные методы, с помощью которых эти задачи решаются, и соответствующие стандартные программы для их решения на компьютере;
- многие задачи линейного программирования, будучи решенными, нашли уже сейчас широкое практическое применение;
- некоторые задачи, которые в первоначальной формулировке не являются линейными, после ряда дополнительных ограничений и допущений могут стать линейными или могут быть приведены к такой форме, что их можно решать методами линейного программирования.

Итак, **линейное программирование** – это направление математического программирования, изучающее методы решения экстремальных задач, которые характеризуются линейной зависимостью между переменными и линейным критерием.

Необходимым условием постановки задачи линейного программирования являются ограничения на наличие ресурсов, величину спроса, производственную мощность предприятия и другие производственные факторы.

Сущность линейного программирования состоит в **нахождении точек наибольшего или наименьшего значения некоторой функции** при определенном наборе ограничений, налагаемых на аргументы и образующих систему ограничений, которая имеет, как правило, бесконечное множество решений. Каждая совокупность значений переменных (аргументов функции ***F***), которые удовлетворяют системе ограничений, называется **допустимым планом** задачи линейного программирования. Функция ***F***, максимум или минимум которой определяется, называется **целевой функцией** задачи. Допустимый план, на котором достигается максимум или минимум функции ***F***, называется **оптимальным планом** задачи.

Система ограничений, определяющая множество планов, диктуется условиями производства. Задачей линейного программирования (***ЗЛП***) является выбор из множества допустимых планов наиболее выгодного (оптимального).

В общей постановке задача математического программирования выглядит следующим образом:

Имеются какие-то переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и функция этих переменных $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, которая носит название **целевой** функции. Ставится задача: найти экстремум (максимум или минимум) целевой функции $f(x)$ при условии, что переменные x принадлежат некоторой области G:

$$\begin{cases} f(x) \Rightarrow ext \\ x \in G \end{cases} \qquad (1.2.1)$$

В зависимости от вида функции $f(x)$ и области G и различают разделы математического программирования.

Линейное программирование характеризуется тем, что а) функция $f(x)$ является **линейной** функцией переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, б) область G определяется системой **линейных** равенств или неравенств.

Математическая модель любой задачи линейного программирования включает в себя:

- максимум или минимум целевой функции (критерий оптимальности);
- систему ограничений в форме линейных уравнений и неравенств;
- требование неотрицательности переменных.

Примеры задач линейного программирования.

а) задача по использованию сырья

Таблица 1.2.1

Виды сырья	Запасы сырья	Виды продукции	
		$П_1$	$П_2$
S_1	b_1	a_{11}	a_{12}
S_2	b_2	a_{21}	a_{22}
S_3	b_3	a_{31}	a_{32}
S_4	b_4	a_{41}	a_{42}
Стоимость 1 ед. продукции		C_1	C_2

a_{ij} – количество единиц сырья вида S_i, расходуемого на производство одной единицы продукции вида $П_j$ ($i = 1, \ldots 4$, $j = 1, 2$).

Реализация x_1 единиц продукции вида $П_1$ и x_2 единиц продукции вида $П_2$.

Конечная цель решаемой задачи – получение максимальной прибыли при реализации продукции.

$$F(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 \to \max$$

при условиях

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &\le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &\le b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 &\le b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 &\le b_4 \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

б) задача о диете

Таблица 1.2.2

Питательные вещества	Кол-во единиц питательных веществ, содержащихся в единице продукции вида				Количество питательного вещества в диете
	B_1	B_2	…	B_n	
N_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	b_1
N_2	a_{21}	a_{22}	….	a_{2n}	b_2
…	…	…	…	…	…
N_n	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	b_m
Стоимость единицы продукта	C_1	C_2	….	C_n	

a_{ij} - количество единицы питательного вещества вида N_i, содержащегося в одной единице продукта вида B_j.

$x_1 ед \to B_1;$

$x_2 ед \to B_2;$

…

$x_n ед \to B_n$

$$F(x) = c_1x_1 + ... + c_nx_n \to \min \qquad (1.2.2)$$

при ограничениях

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n &\ge b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &\ge b_2 \\ &\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n &\ge b_m \end{aligned}\right\} \qquad (1.2.3)$$

В других ситуациях могут возникать задачи с большим количеством переменных, в систему ограничений которых, кроме неравенств, могут входить и равенства. Поэтому в наиболее общей форме задачу линейного программирования формулируют следующим образом:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \{\le\ge=\} b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \{\le\ge=\} b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \{\le\ge=\} b_m \end{cases} \qquad (1.2.4)$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, ..., x_n \ge 0 \qquad (1.2.5)$$

$$F(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to (\max)\min \qquad (1.2.6)$$

Коэффициенты a_{ij}, b_i, c_j, *j = 1,2,... , n, i =1, 2, ... , m* – любые действительные числа (возможно 0).

Итак, решения, удовлетворяющие системе ограничений (1.2.4) условий задачи и требованиям неотрицательности (1.2.5), называются **допустимыми**, а решения, удовлетворяющие одновременно и требованиям минимизации (максимализации) (1.2.6) целевой функции, - **оптимальными**.

1.3. Виды задач линейного программирования и способы перехода от одного вида к другому

Выше описанная задача линейного программирования (ЗЛП) представлена в общей форме, но одна и та же (ЗЛП) может быть сформулирована в различных эквивалентных формах. Наиболее важными формами задачи линейного программирования являются **каноническая** и **стандартная**.

В **канонической форме** ЗЛП является задачей на максимум (минимум) некоторой линейной функции ***F***, ее система ограничений состоит только из равенств (уравнений). При этом переменные задачи x_1, x_2, ..., x_n являются неотрицательными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.3.1}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, ..., x_n \geq 0 \tag{1.3.2}$$

$$F(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to (\max)\min \tag{1.3.3}$$

К канонической форме можно преобразовать любую задачу линейного программирования.

Чтобы перейти от одной формы записи задачи линейного программирования к другой, нужно в общем случае уметь, во-первых, сводить задачу минимизации к задаче максимизации, во-вторых, переходить от ограничений-неравенств к ограничениям-равенствам и наоборот, в-третьих, заменять переменные, которые не подчинены условию неотрицательности.

Правило приведения ЗЛП к каноническому виду:

1. Если в исходной задаче некоторое ограничение (например, первое) было неравенством, то оно преобразуется в равенство, введением в левую часть некоторой неотрицательной переменной, причем для неравенства «≤» вводится дополнительная неотрицательная переменная со знаком «+»; в случае неравенства «≥» - со знаком «-»

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1. \tag{1.3.4}$$

Вводим переменную

$$x_{n+1} = b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - ... - a_{1n}x_n. \tag{1.3.5}$$

Тогда неравенство запишется в виде:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1. \tag{1.3.6}$$

В каждое из неравенств вводится своя “**уравнивающая**” переменная, после чего система ограничений становится системой уравнений.

Число вводимых дополнительных неотрицательных переменных при преобразовании ограничений-неравенств в ограничения-равенства равно числу преобразуемых неравенств.

Вводимые дополнительные переменные имеют вполне определенный экономический смысл. Так, если в ограничениях исходной задачи линейного программирования отражаются расход и наличие производственных ресурсов, то числовое значение дополнительной переменной в плане задачи, записанной в основной форме, равно объему неиспользуемого соответствующего ресурса.

2. Если в исходной задаче некоторая переменная не подчинена условию неотрицательности, то ее заменяют (в целевой функции и во всех ограничениях) разностью неотрицательных переменных

3. Если в ограничениях правая часть отрицательна, то следует умножить это ограничение на (-1).

4. Наконец, если исходная задача была задачей на минимум, а нам удобнее по каким-либо причинам решать задачу на максимум, то введением новой целевой функции $F_1 = -F$ мы преобразуем нашу задачу на минимум функции F в задачу на максимум функции F_1.

Таким образом, всякую задачу линейного программирования можно сформулировать в канонической форме.

В **стандартной форме** ЗЛП является задачей на максимум (минимум) линейной целевой функции. Система ограничений ее состоит из одних линейных неравенств типа "$\le$" или "$\ge$". Все переменные задачи неотрицательны.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le (\ge) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le (\ge) b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le (\ge) b_m \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, ..., x_n \ge 0 \qquad (1.3.7)$$

$$F(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to (\max)\min$$

Всякую задачу линейного программирования можно сформулировать в **стандартной форме.**

Приведение к стандартной форме необходимо, так как большинство методов решения задач линейного программирования разработано именно для стандартной формы.

Для приведения к стандартной форме задачи линейного программирования может потребоваться выполнить следующие действия:

- перейти от минимизации целевой функции к ее максимизации;

- изменить знаки правых частей ограничений;

- перейти от ограничений-равенств к неравенствам;

- избавиться от переменных, не имеющих ограничений на знак.

Таблица 1.3.1

Каноническая (основная) форма	Стандартная (симметрическая) форма	Общая форма
1) ограничения		
Уравнения $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_j,$ $i = 1,\dots,m$	Неравенства $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le (\ge) b_j,$ $i = 1,\dots,m$	Уравнения и неравенства $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \begin{pmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{pmatrix} b_j,\ i = 1,\dots,m$
2) условия неотрицательности		
Все переменные $x_j \ge 0,\ j = 1,\dots,n$	Все переменные $x_j \ge 0,\ j = 1,\dots,n$	Часть переменных $x_j \ge 0,\ j = 1,\dots,s\ (s \le n)$
3) цель задачи $F(x) = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j$		
max или min	max или min	max или min

Задача 1.3.1. Привести к каноническому виду задачу

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge 1 \\ x_1 - 2x_2 \le 1 \\ x_1 + x_2 \le 3 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$
$$F = x_1 + 2x_2 \to \max$$

Решение. Введем дополнительные переменные x_3, x_4, x_5. Причем в первое неравенство введем неотрицательную переменную x_3 со знаком минус, а во второе и в третье – со знаком плюс переменные x_4, x_5 запишем задачу в виде:

$$\begin{cases} -x_3 = 1 - x_1 + x_2 \\ x_4 = 1 - x_1 + 2x_2 \\ x_5 = 3 - x_1 - x_2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 3 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,\ldots,5 \qquad\qquad x_j \ge 0,\ j = 1,\ldots,5$$

$$F(x) = x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \to \max$$

что и дает эквивалентную задачу в канонической форме.

Задача 1.3.2. Привести к стандартному виду задачу

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 120 \\ x_4 + x_5 + x_6 = 180 \\ x_1 + x_4 = 70 \\ x_2 + x_5 = 140 \\ x_3 + x_6 = 90 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0, x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0,\ x_6 \ge 0$$
$$F = 8x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4 + 9x_5 + 7x_6 \to \min$$

Решение. Выразим через x_1 и x_2 остальные переменные:

$$\begin{cases} x_3 = 120 - x_1 - x_2 \\ x_4 = 70 - x_1 \\ x_5 = 140 - x_2 \\ x_6 = 90 - x_3 \\ x_4 + x_5 + x_6 = 180 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 120 - x_1 - x_2 \\ x_4 = 70 - x_1 \\ x_5 = 140 - x_2 \\ x_6 = 90 - (120 - x_1 - x_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 120 - x_1 - x_2 \\ x_4 = 70 - x_1 \\ x_5 = 140 - x_2 \\ x_6 = x_1 + x_2 - 30 \end{cases}$$

Целевая функция будет выглядеть следующим образом:

$$F = 8x_1 + 5x_2 + 6(120 - x_1 - x_2) + 4(70 - x_1) + 9(140 - x_2) + 7(x_1 + x_2 - 30) \to \min$$

Или, после упрощения:

$F = 5x_1 - 3x_2 + 2050 \to \min$

Так как $x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0$, то перепишем нашу систему следующим образом: $\begin{cases} 120 - x_1 - x_2 \geq 0 \\ 70 - x_1 \geq 0 \\ 140 - x_2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 - 30 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 120 \\ x_1 \leq 70 \\ x_2 \leq 140 \\ x_1 + x_2 \geq 30 \end{cases}$.

Итак, эквивалентная задача в стандартной форме будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 120 \\ x_1 \leq 70 \\ x_2 \leq 140 \\ x_1 + x_2 \geq 30 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

$F = 5x_1 - 3x_2 + 2050 \to \min$

1.4. Общая задача линейного программирования

Общая задача линейного программирования состоит в определении минимального (максимального) значения функции

$$F = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j \tag{1.4.1}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_j, \ i = 1, \dots, m \tag{1.4.2}$$

$$x_j \geq 0 \ \ (j = 1, \dots, n). \tag{1.4.3}$$

Общая задача имеет также векторную и матричную формы записи.

Векторная форма записи: минимизировать (максимизировать) линейную функцию $F = CX$ при ограничениях

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = A_0, X \geq 0, \qquad (1.4.4)$$

где $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$; $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$; $CX -$ скалярное произведение; векторы

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \quad A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$

состоят соответственно из коэффициентов при неизвестных и свободных членов.

Матричная форма записи: минимизировать (максимизировать) линейную функцию $F = CX$ при ограничениях $AX = A_0, X \geq 0$, где $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n) -$ матрица-строка; $A = (a_{ij}) -$ матрица системы; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} -$ матрица-столбец, $A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix} -$ матрица-столбец.

Определение 1.4.1. Система векторов $A_1, A_2, \ldots, A_r$ $(r \geq 2)$ называется **линейно зависимой**, если хотя бы один из векторов системы является линейной комбинацией остальных, и **линейно независимой** – в противном случае.

Определение 1.4.2. **Планом** или допустимым решением задачи линейного программирования называется вектор $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющий условиям (3.2) и (3.3).

Определение 1.4.3. План $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется **опорным**, если векторы A_i $(i = 1, \ldots, m)$, входящие в разложение (1.2.3.4) с положительными коэффициентами x_i, являются линейно независимыми.

Так как векторы A_i являются m-мерными, то из определения опорного плана следует, что число его положительных компонент не может превышать m.

Определение 1.4.4. Опорный план называется **невырожденным**, если он содержит m положительных компонент, в противном случае опорный план называется вырожденным.

Определение 1.4.5. **Оптимальным планом** или оптимальным решением задачи линейного программирования называется план, доставляющий наименьшее (наибольшее) значение линейной функции.

1.5. Основные теоремы линейного программирования.

Рассмотрим задачу линейного программирования, записанную векторной форме, состоящую в определении максимального значения функции

$$F = CX \tag{1.5.1}$$

при условиях

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = A_0, \tag{1.5.2}$$

$$X \geq 0, \tag{1.5.3}$$

где $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$; $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$; $CX -$ скалярное произведение; векторы

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \quad A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$

состоят соответственно из коэффициентов при неизвестных и свободных членов.

Свойства решений задачи линейного программирования тесным образом связаны со свойствами выпуклых множеств.

Определение 1.5.1. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n -$ произвольные точки евклидова пространства E_n. **Выпуклой линейной комбинацией** этих точек называется сумма $\alpha_1A_1 + \alpha_2A_2 + \cdots + \alpha_nA_n$, где $\alpha_i -$ произвольные неотрицательные числа, сумма которых равна 1.

Определение 1.5.2. Множество называется **выпуклым**, если вместе с любыми двумя своими точками оно содержит и их произвольную выпуклую линейную комбинацию.

На рис. 1.5.1 изображено выпуклое множество (выпуклый многоугольник), а на рис. 1.5.2 - невыпуклое.

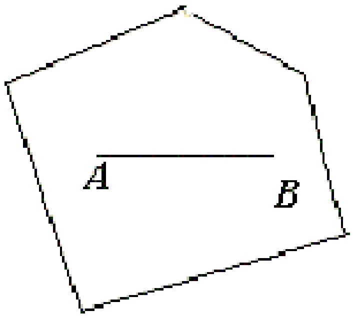


Рисунок 1.5.1

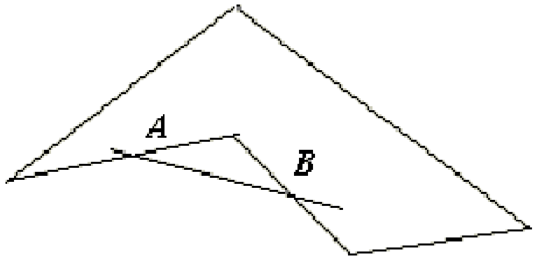


Рисунок 1.5.2

Определение 1.5.3. Точка выпуклого множества называется **угловой**, если она не может быть представлена в виде выпуклой линейной комбинации каких-нибудь двух других различных точек данного множества.

Определение 1.5.4. **Выпуклым многоугольником** называется выпуклое замкнутое ограниченное множество на плоскости, имеющее конечное число угловых точек.

Определение 1.5.5. **Выпуклым многогранником** называется замкнутое ограниченное выпуклое множество трехмерного пространства, имеющее конечное число угловых точек. Угловые точки многогранника называются его вершинами.

Теорема 1.5.1. Множество всех планов задачи линейного программирования является выпуклым (если оно не пусто).

Ранее говорилось, что ограничениями любой задачи линейного программирования являются либо система линейных уравнений, либо система линейных неравенств. Совокупность решений таких систем при условии их совместности, образует выпуклые множества с конечным числом угловых точек.

В частном случае, когда в систему ограничений - неравенств входят только две переменные x_1 и x_2 это множество можно изобразить на плоскости.

Определение 1.5.6. **Непустое множество планов** общей задачи линейного программирования называется **многогранником решений**, а всякая угловая точка многогранника решений - вершиной.

Теорема 1.5.2. Если общая задача линейного программирования имеет оптимальный план, то максимальное значение целевая функция задачи принимает в одной из вершин многогранника решений. Если максимальное значение целевая функция задачи принимает более чем в одной вершине, то она принимает его во всякой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией этих вершин.

Из теоремы 1.5.2 следует, что поиски оптимального решения можно ограничить перебором конечного числа угловых точек (их число меньше C_n^m, где n - число неизвестных, а m – число ограничений), однако построение возможно только для двух и трёхмерных пространств, поэтому нужны аналитические методы, позволяющие находить координаты угловых точек.

Теорема 1.5.3. Если известно, что система векторов $A_1, A_2, \dots, A_k$ $(k \le n)$ в разложении (1.5.2) линейно независима и такова, что

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_kx_k = A_0,$$

где все $x_j \ge 0$, то точка $X = (x_1, x_2, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$ является вершиной многогранника решений.

Теорема 1.5.4. Если $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$- вершина многогранника решений, то векторы A_j в разложении (1.5.2), соответствующие положительным x_j, являются линейно независимыми.

Сформулированные теоремы позволяют сделать следующие выводы:

1. Непустое множество планов общей задачи линейного программирования образует выпуклый многогранник.
2. Каждая вершина этого многогранника определяет опорный план.

3. В одной из вершин многогранника решений (т.е. для одного из опорных планов) значение целевой функции является максимальным (при условии, что функция ограничена сверху на множестве планов).
4. Если максимальное значение функция принимает более чем в одной вершине, то это же значение она принимает в любой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией данных вершин.

1.**6. Симплекс-метод.**

Существует такая угловая точка многогранника решений, в которой линейная функция достигает своего наименьшего (наибольшего) значения. Каждой угловой точке многогранника решений соответствует опорный план. Каждый опорный план определяется системой m линейно независимых векторов, содержащихся в данной системе из n векторов, $A_1, A_2, \dots, A_n$. Для отыскания оптимального плана необходимо исследовать только опорные планы. Верхняя граница количества опорных планов, содержащихся в данной задачи, определяется числом сочетаний C_n^m. При больших m и n найти оптимальный план, перебирая все опорные планы задачи, очень трудно. Поэтому необходимо иметь схему, позволяющую осуществлять упорядоченный переход от одного опорного плана к другому.

Такой схемой является симплекс-метод, который позволяет, исходя из известного опорного плана задачи, за конечное число шагов получить ее оптимальный план. Каждый из шагов (или итераций) состоит в нахождении нового плана, которому соответствует меньшее значение линейной функции, чем значение этой же функции в предыдущем плане. Процесс продолжают до получения оптимального плана. Если задача не обладает планами или ее линейная функция не ограничена на многограннике решений, то симплекс-метод позволяет установить это в процессе решения.

Построение опорных планов.

Пусть поставлена задача линейного программирования: найти минимальное значение функции $F = C_1x_1 + C_2x_2 + \cdots + C_nx_n$ при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad x_j \geq 0 \ (j = 1, \ldots, n),$$

где $b_i \geq 0 \ \ (i = 1, .., m)$.

Предположим сначала, что система ограничений задачи содержит m единичных векторов, причем без ограничений общности можно положить, что единичными являются первые m векторов. Тогда необходимо минимизировать линейную функцию

$$F = C_1x_1 + C_2x_2 + \cdots + C_nx_n \tag{1.6.1}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + a_{1,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ x_2 + a_{2,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad \ldots \\ x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1.6.2}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1, \ldots, n). \tag{1.6.3}$$

Запишем систему (1.2.6.2) в векторной форме:

$$x_1A_1 + x_2A_2 + \ldots + x_mA_m + x_{m+1}A_{m+1} + \cdots + x_nA_n = A_0, \tag{1.6.4}$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \qquad A_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$A_{m+1} = \begin{pmatrix} a_{1,m+1} \\ a_{2,m+1} \\ \ldots \\ a_{m,m+1} \end{pmatrix}, \ldots, \qquad A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Векторы $A_1, A_2, \dots, A_m$- линейно независимые единичные векторы m-мерного пространства. Они и образуют базис этого пространства. Поэтому в разложении (6.4) за базисные неизвестные выбираем $x_1, x_2, \dots, x_m$, свободные неизвестные $x_{m+1}, \dots, x_n$ приравниваем нулю и, учитывая, что $b_i \geq 0$ $(i = 1, .., m)$, а векторы $A_1, A_2, \dots, A_m$- единичные, получаем первоначальный план:

$$X_0 = (x_1 = b_1; x_2 = b_2; \dots; x_m = b_m; x_{m+1} = 0; \dots; x_n = 0). \qquad (1.6.5)$$

Плану (6.5) соответствует разложение

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \ldots + x_m A_m = A_0, \qquad (1.6.6)$$

где векторы $A_1, A_2, \dots, A_m$ линейно независимы, следовательно, построенный первоначальный план является и опорным.

Рассмотрим, как исходя из первоначального опорного плана (1.6.5), можно построить второй опорный план.

Векторы $A_1, A_2, \dots, A_m$ образуют базис в m-мерном пространстве, поэтому каждый из данных n векторов соотношения (1.6.4) можно разложить по векторам базиса, причем единственным образом:

$$A_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} A_i \ , j = 1, \dots, n.$$

Предположим, что для некоторого вектора, не входящего в базис, например, для вектора A_{m+1}, положителен хотя бы один из коэффициентов $x_{i,m+1}$ в разложении

$$x_{1,m+1} A_1 + x_{2,m+1} A_2 + \ldots + x_{m,m+1} A_m = A_{m+1}. \qquad (1.6.7)$$

Зададимся некоторой величиной $\theta > 0$ (пока неизвестной), умножим на нее обе части равенства (1.2.6.7) и вычтем результат почленно из равенства (1.6.6).

Получаем

$$\left(x_1 - \theta x_{1,m+1}\right) A_1 + \left(x_2 - \theta x_{2,m+1}\right) A_2 + \cdots + \left(x_m - \theta x_{m,m+1}\right) A_m +$$
$$+ \theta A_{m+1} = A_{0.} \qquad (1.6.8)$$

Таким образом, вектор

$$X_1 = (x_1 - \theta x_{1,m+1};\ x_2 - \theta x_{2,m+1}; \dots;\ x_m - \theta x_{m,m+1};\ 0; 0; \dots; 0)$$

является планом, если его компоненты неотрицательны.

Так как $\theta > 0$, то все компоненты вектора X_1, в которые входят неположительные $x_{i,m+1}$, неотрицательны. Поэтому надо рассмотреть только компоненты, включающие положительные $x_{i,m+1}$ $(i = 1, \dots, m)$, т.е. необходимо определить такое $\theta > 0$, при котором для всех $x_{i,m+1} > 0$

$$x_i - \theta x_{i,m+1} \geq 0. \tag{1.6.9}$$

Из (1.6.9) получаем $\theta \leq x_i / x_{i,m+1}$, следовательно, вектор X_1- план задачи для любого θ, удовлетворяющего условию

$$0 < \theta \leq \min_i \frac{x_i}{x_{i,m+1}}, \tag{1.6.10}$$

где минимум берется по i, для которых $x_{i,m+1} > 0$.

Опорный план не может содержать m+1 положительных компонент, поэтому в плане X_1 необходимо обратить в ноль по крайней мере одну из компонент.

Положим в (1.6.10), что

$$\theta = \theta_0 = \min_i \frac{x_i}{x_{i,m+1}}; \tag{1.6.11}$$

тогда компонента плана X_1, для которой достигается минимум, обращается в ноль. Пусть эта компонента стоит на первом месте, т.е.

$$\theta_0 = \min_i \frac{x_i}{x_{i,m+1}} = \frac{x_1}{x_{1,m+1}}.$$

Подставляя значение θ_0 в (1.6.8), имеем

$$\left(x_1 - \frac{x_1}{x_{1,m+1}} x_{1,m+1}\right) A_1 + \left(x_2 - \frac{x_1}{x_{1,m+1}} x_{2,m+1}\right) A_2 + \cdots +$$

$$+ \left(x_m - \frac{x_1}{x_{1,m+1}} x_{m,m+1}\right) A_m + \frac{x_1}{x_{1,m+1}} A_{m+1} = A_0,$$

откуда получаем разложение

$$x'_2 A_2 + x'_3 A_3 + \cdots + x'_m A_m + x'_{m+1} A_{m+1} = A_0,$$

которому соответствует опорный план:

$$X_1 = (0;\ x'_2;\ x'_3; \dots;\ x'_m;\ x'_{m+1}; 0; \dots; 0),$$

где $x'_i = x_i - \theta_0 x_{i,m+1}$ $(i = 2,3, \dots, m), x'_{m+1} = \theta_0$.

Исключение одного вектора из базиса и включение вместо него другого с помощью θ_0 соответствуют переходу от одного базиса к другому с помощью метода Жордана-Гаусса, поэтому система векторов $A_2, A_3, \dots, A_m, A_{m+1}$ линейно независима и является новым базисом.

Для определения следующего опорного плана необходимо любой вектор, не входящий в базис $A_2, A_3, \dots, A_m, A_{m+1}$, разложить по векторам этого базиса, а затем определить такое $\theta_0 > 0$, при котором исключался бы один из векторов этого базиса.

Таким образом, процесс получения новых опорных планов заключается в выборе вектора, который подлежит включению в базис, и определении вектора, подлежащего исключению из базиса. Критерий, используемый для определения вектора, который включается в базис, является одним из основных элементов симплекс-метода. Заметим, что если вектор A_{m+1} подлежит включению в базис, а в его разложении (1.6.7) все $x_{i,m+1} \le 0$, то, очевидно, нельзя выбрать такое $\theta > 0$, которое исключало бы один из векторов разложения (1.6.8). В этом случае план X_1 содержит m+1 положительных компонент, а система векторов $A_1, A_2, A_3, \dots, A_m, A_{m+1}$ линейно зависимая и определяет не угловую, а внутреннюю точку многогранника решений, в которой линейная функция не может достигать минимального значения. Это указывает на то, что гиперплоскость соответствующая линейной функции, не может стать опорной к многограннику решений, как бы далеко ни перемещать ее в направлении, обратном вектору $\vec{C}$, т.е. линейная функция не ограничена на многограннике решений.

Таким образом, если система ограничений задачи линейного программирования при неотрицательных свободных членах содержит единичный базис, то без дополнительных вычислений можно получить первоначальный опорный план, а также коэффициенты разложения векторов по векторам базиса.

Отыскание оптимального плана. Условие оптимальности. Предположим, что задача линейного программирования (1.6.1)-(1.6.3) обладает планами и каждый ее опорный план невырожден. В этом случае для опорного плана (1.6.5) имеем:

$$x_1A_1 + x_2A_2 + \ldots + x_mA_m = A_0, \tag{1.6.12}$$

$$x_1C_1 + x_2C_2 + \ldots + x_mC_m = F(X_0), \tag{1.6.13}$$

где все $x_i > 0$, а $F(X_0) -$ значение линейной функции, соответствующее этому плану.

Разложение любого вектора A_j по векторам данного базиса $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_m$ единственное:

$$x_{1j}A_1 + x_{2j}A_2 + \ldots + x_{mj}A_m = A_j \ \ (j = 1, \ldots, n), \tag{1.6.14}$$

поэтому разложению вектора A_j в базисе соответствует и единственное значение линейной функции

$$x_{1j}C_1 + x_{2j}C_2 + \ldots + x_{mj}C_m = F_j \ \ (j = 1, \ldots, n), \tag{1.6.15}$$

где $F_j -$ значение линейной функции, если в нее вместо неизвестных подставить соответствующие коэффициенты разложения j-го вектора по векторам базиса.

Обозначим через C_j коэффициент линейной функции, соответствующий вектору A_j. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 1.6.1. Если для некоторого вектора A_j выполняется условие $F_j - C_j > 0$, то план X_0 не является оптимальным, и можно построить такой план X, для которого выполняется неравенство $F(X) < F(X_0)$.

Доказательство. Умножая (1.6.14) и (1.6.15) на $\theta > 0$ и вычитая результаты соответственно из (1.6.12) и (1.6.13), получаем

$$(x_1 - \theta x_{1j})A_1 + (x_2 - \theta x_{2j})A_2 + \dots + (x_m - \theta x_{mj})A_m + \theta A_j = A_0, \quad (1.6.16)$$

$$(x_1 - \theta x_{1j})C_1 + (x_2 - \theta x_{2j})C_2 + \dots + (x_m - \theta x_{mj})C_m + \theta C_j =$$
$$= F(X_0) - \theta(F_j - C_j). \quad (1.6.17)$$

В соотношении (1.6.17) к обеим частям прибавлена величина θC_j для $j = 1, \dots, n$. В (1.6.16) $x_1, x_2, \dots, x_m$ положительны, поэтому всегда можно выбрать такое $\theta > 0$, чтобы все коэффициенты при векторах $A_1, A_2, A_3, \dots, A_m, A_j$ были неотрицательными, т.е. получить новый план задачи: $X = (x_1 - \theta x_{1j};\ x_2 - \theta x_{2j}; \dots;\ x_m - \theta x_{mj};\ 0; 0; \dots; 0)$, которому согласно (1.6.17) соответствует значение линейной функции

$$F(X) = F(X_0) - \theta(F_j - C_j). \quad (1.6.18)$$

Так как по условию теоремы $F_j - C_j > 0$ и $\theta > 0$, то $F(X) < F(X_0)$.

Следствие. Если для некоторого плана X_0 разложения всех векторов $A_j \quad (j = 1, \dots, n)$ в данном базисе удовлетворяют условию

$$F_j - C_j \leq 0, \quad (1.6.19)$$

то план X_0 является оптимальным.

Неравенства (1.6.19) являются условием оптимальности плана задачи, решаемой на отыскание минимального значения линейной функции, а значения $F_j - C_j$ называются оценками плана.

Таким образом, для того чтобы план задачи на отыскание минимального значения линейной функции был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы его оценки были неположительными.

Для задачи линейного программирования (1.6.1)-(1.6.3), заключающейся в отыскании максимального значения линейной функции, справедлива следующая теорема.

Теорема 1.6.2. Если для некоторого вектора A_j выполняется условие $F_j - C_j < 0$, то план X_0 не является оптимальным и можно построить такой план X, для которого выполняется неравенство $F(X) > F(X_0)$.

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 1.6.1.

Следствие. Если для некоторого плана X_0 разложения всех векторов $A_j \quad (j = 1, \ldots, n)$ в данном базисе удовлетворяют условию

$$F_j - C_j \geq 0, \tag{1.6.20}$$

то план X_0 является оптимальным.

Неравенство (1.6.20) - условие оптимальности плана задачи на отыскание максимального значения линейной функции.

Таким образом, для того чтобы план задачи на отыскание максимального значения линейной функции был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы его оценки были неотрицательными.

Алгоритм симплекс-метода.

Как следует из теоремы 1.6.1 и теоремы 1.6.2 и следствий, начиная с исходного опорного плана задачи можно получить последовательность опорных планов, завершающихся оптимальным планом.

Продолжим рассмотрение задачи линейного программирования (1.6.1)-(1.6.3) на отыскание минимального значения линейной функции, опорный план которой $X_0 = (x_1 = b_1; x_2 = b_2; \ldots; x_m = b_m; x_{m+1} = 0; \ldots; x_n = 0)$ определяется системой m-мерных единичных векторов $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_m$. Для исследования этого опорного плана на оптимальность необходимо векторы $A_j \, (j = 1, \ldots, n)$ системы (1.6.2) разложить по векторам базиса $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_m$ и подсчитать значения оценок $F_j - C_j$. Базис является единичным, поэтому коэффициентами разложения вектора A_jпо базису служат его компоненты, т.е. $x_{ij} = a_{ij} \; (i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n)$. Дальнейшие вычисления удобнее проводить, если условия задачи и первоначальные данные, полученные после определения первого опорного плана, записать в симплексную таблицу (таблица 1.6.1). В столбце С базиса запишем коэффициенты линейной функции, соответствующие векторам базиса. В столбце A_0- первоначальный опорный план X_0, в нем же в результате вычислений получаем оптимальный план, в столбцах A_j $(j = 1, \dots, n)$ записываем коэффициенты разложения j-го вектора по базису, обозначаемые в дальнейшем через X_j. В (m+1)-й строке в столбце A_0 записываем значения линейной функции $F(X_0)$, которое она принимает при найденном опорном плане, а в столбцах A_j- значения оценок $F_j - C_j$. Функции $F(X_0)$ и $F_j = F(X_j)$ находим, подставляя в линейную функцию соответственно компоненты опорного плана и коэффициенты разложения j-го вектора по векторам базиса, поэтому эти значения в таблице 1.6.1 можно получить как скалярное произведение:

$$F(X_0) = C_б X_0 = \sum_{i=1}^{m} C_i x_i \,,$$

$$F_j = C_б X_j = \sum_{i=1}^{m} C_i x_{ij} \;, j = 1, \dots, n,$$

где $C_i -$ коэффициенты линейной функции, соответствующие векторам базиса.

Таблица 1.6.1

i	*базис*	$C_б$	A_0	C_1	C_2	…	C_l	…	C_m	C_{m+1}	…	C_j	…	C_k	…	C_n
				A_1	A_2	…	A_l	…	A_m	A_{m+1}	…	A_j	…	A_k	…	A_n
1	A_1	C_1	x_1	1	0	…	0	…	0	$x_{1,m+1}$	…	x_{1j}	…	x_{1k}	…	x_{1n}
2	A_2	C_2	x_2	0	1	…	0	…	0	$x_{2,m+1}$	…	x_{2j}	…	x_{2k}	…	x_{2n}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
l	A_l	C_l	x_l	0	0	…	1	…	0	$x_{l,m+1}$	…	x_{lj}	…	x_{lk}	…	x_{ln}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
m	A_m	C_m	x_m	0	0	…	0	…	1	$x_{m,m+1}$	…	x_{mj}	…	x_{mk}	…	x_{mn}
m+1	$F_j - C_j$		F_0	0	0	…	0	…	0	$F_{m+1} -$ $-C_{m+1}$	…	$F_j -$ $-C_j$	…	$F_k -$ $-C_k$	…	$F_n -$ $-C_n$

После составления таблицы 1.6.1 просматриваем (m+1)-ю строку. Если для всех $j = 1, \ldots, n$ разности $F_j - C_j \le 0$, то опорный план X_0 оптимальный и минимальное значение линейной функции равно $F(X_0)$.

Пусть одна из оценок $F_j - C_j > 0$; тогда план X_0 не является оптимальным и, включая в базис вектор, соответствующий этой оценке, можно построить другой опорный план, которому соответствует меньшее значение линейной функции.

Если положительных оценок несколько, то на основании соотношения (1.6.18) в базис должен быть включен вектор, которому соответствует $max[\theta_{0j}\,(F_j - C_j)]$, где максимум берется по тем j, для которых $F_j - C_j > 0$ и θ_{0j} определяется для каждого j. Это дает возможность на данном шаге перейти к вершине многогранника решений, связанной с наибольшим уменьшением линейной функции и в большинстве случаев приводящей к уменьшению количества итераций, что при решении задачи «вручную» позволяет быстрее получить оптимальное решение. При решении задачи на компьютере вектор, подлежащий включению в базис, выбирается по $max(F_j - C_j)$. Если имеется несколько одинаковых максимальных значений $\theta_{0j}(F_j - C_j)$, то из соответствующих им векторов включается в базис прежде всего вектор, которому соответствует $min\, C_j$. Если хотя бы для одной положительной оценки $F_j - C_j > 0$ коэффициенты разложения x_{ij} соответствующего вектора неположительны, то линейная функция не ограничена на многограннике решений и, выбирая θ, ее значение можно сделать сколь угодно малым; многогранник решений в этом случае представляет собой неограниченную многогранную область.

Пусть $max[\theta_{0j}\,(F_j - C_j)] = \theta_{0k}(F_k - C_k)$, т.е. максимальное значение достигается для k-го вектора, $m < k \le n$. Тогда в базис включается вектор A_k и исключается вектор, которому соответствует $\theta_{0k} = min\,(x_i/x_{ik})$ $(x_{ik} > 0)$.

Допустим, что $\theta_{0k} = min\,(x_i/x_{ik}) = x_l/x_{lk}$ достигается для вектора базиса, состоящего в l-й строке; тогда вектор A_l исключается из базиса. Элемент x_{lk} называется разрешающим, а столбец и строка, на пересечении которых он находится, - направляющими. Новому опорному плану соответствует базис, состоящий из векторов $A_1, \dots, A_{l-1}, A_k, A_{l+1}, \dots, A_m$.

Чтобы вычислить новый опорный план и проверить его на оптимальность, необходимо все векторы A_0, A_j $(j = 1, \dots, n)$ разложить по векторам базиса.

Первоначальный базис был единичным $(A_1, A_2, A_3, \dots, A_m) = E$, поэтому

$$A_0 = x_1 A_1 + \dots + x_l A_l + \ldots + x_m A_m, \tag{1.6.21}$$

$$A_k = x_{1k} A_1 + \dots + x_{lk} A_l + \ldots + x_{mk} A_m, \tag{1.6.22}$$

$$A_j = x_{1j} A_1 + \dots + x_{lj} A_l + \ldots + x_{mj} A_m. \tag{1.6.23}$$

Из (6.22) имеем

$$A_l = 1/x_{lk}(A_k - x_{1k}A_1 - \dots - x_{mk}A_m). \tag{1.6.24}$$

Подставляя выражение A_l в (1.6.21), получаем

$$A_0 = x_1 A_1 + \dots + x_l \left[\frac{1}{x_{lk}}(A_k - x_{1k}A_1 - \dots - x_{mk}A_m)\right] + \ldots + x_m A_m\,,$$

или

$$A_0 = (x_1 - \frac{x_l}{x_{lk}} x_{1k})A_1 + \dots + \frac{x_l}{x_{lk}} A_k + \ldots + (x_m - \frac{x_l}{x_{lk}} x_{mk})A_m.$$

Таким образом, новый опорный план $X_0 = (x_1', x_2', \dots, x_k', \dots, x_m')$ вычисляется по формулам

$$\begin{cases} x_i' = x_i - \frac{x_l}{x_{lk}} x_{ik} & (i \neq l), \\ x_k' = \frac{x_l}{x_{lk}} & (i = l). \end{cases} \tag{1.6.25}$$

Подставляя в (1.6.24) в (1.6.23), получаем разложение вектора A_j по векторам нового базиса:

$$A_j = x'_{1j}A_1 + \cdots + x'_{kj}A_k + \ldots + x'_{mj}A_m\ ,$$

где

$$\begin{cases} x'_{ij} = x_{ij} - \frac{x_{lj}}{x_{lk}} x_{ik} & (i \neq l), \\ x'_{kj} = \frac{x_{lj}}{x_{lk}} & (i = l). \end{cases} \tag{1.6.26}$$

Объединяя (1.2.6.25) и (1.2.6.26), находим, что новый опорный план и разложения векторов в новом базисе при $j = 0,1, \ldots, n$ определяются по формулам

$$\begin{cases} x'_{ij} = x_{ij} - \frac{x_{lj}}{x_{lk}} x_{ik} & (i \neq l), \\ x'_{lj} = \frac{x_{lj}}{x_{lk}} & (i = l). \end{cases} \tag{1.6.27}$$

Полагая $j=k$, имеем

$$\begin{cases} x'_{ik} = x_{ik} - \dfrac{x_{lk}}{x_{lk}} x_{ik} = 0 & (i \neq l), \\ x'_{lk} = \dfrac{x_{lk}}{x_{lk}} = 1 & (i = l), \end{cases}$$

т.е. все коэффициенты разложения вектора, вводимого в базис, за исключением одного, обращаются в ноль, а коэффициент, взятый за разрешающий элемент,- в единицу. Вектору базиса соответствует оценка, равная нулю, поэтому для вычисления значений (m+1)-й строки также используем формулы (1.6.27).

Таким образом, чтобы получить коэффициенты разложения векторов $A_0, A_j\ (j = 1, \ldots, n)$ по векторам нового базиса, значения оценок нового опорного плана и значение линейной функции, нужно разделить все элементы направляющей строки на разрешающий элемент и, производя одно полное исключение по методу Жордана-Гаусса с помощью этой преобразованной строки, составить симплексную таблицу 1.6.2.

Формулы

$$F(X_0) = C_б X_0;\ F_j - C_j = C_б X_j - C_j \qquad (1.6.28)$$

используют для контроля за правильностью произведенных вычислений.

Если в таблице 1.6.2 в (m+1)-й строке все оценки $F_j - C_j \leq 0$, то полученный план X_0 является оптимальным; если же имеются положительные оценки, то отыскивают следующий опорный план.

Процесс продолжают либо до получения оптимального плана, либо до установления неограниченности линейной функции решаемой задачи. Если среди оценок оптимального плана нулевые только оценки, соответствующие базисным векторам, то это говорит о единственности оптимального плана. Если же нулевая оценка соответствует вектору, не входящему в базис, то в общем случае это означает, что оптимальный план не единственный.

Таблица 1.6.2

i	*базис*	$C_б$	A_0	C_1	C_2	…	C_l	…	C_m	C_{m+1}	…	C_j	…	C_k	…	C_n
				A_1	A_2	…	A_l	…	A_m	A_{m+1}	…	A_j	…	A_k	…	A_n
1	A_1	C_1	x'_1	1	0	…	x'_{1l}	…	0	$x'_{1,m+1}$	…	x'_{1j}	…	0	…	x'_{1n}
2	A_2	C_2	x'_2	0	1	…	x'_{2l}	…	0	$x'_{2,m+1}$	…	x'_{2j}	…	0	…	x'_{2n}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
l	A_k	C_k	x'_k	0	0	…	x'_{ll}	…	0	$x'_{l,m+1}$	…	x'_{lj}	…	1	…	x'_{ln}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
m	A_m	C_m	x'_m	0	0	…	x'_{ml}	…	1	$x'_{m,m+1}$	…	x'_{mj}	…	0	…	x'_{mn}
m+1	$F_j - C_j$		F'_0	0	0	…	$F'_l -$ $-C_l$	…	0	$F'_{m+1} -$ $-C_{m+1}$	…	$F'_j -$ $-C_j$	…	0	…	$F'_n -$ $-C_n$

Используя теорему 1.6.2 и ее следствие, решаем задачу линейного программирования на отыскание максимального значения линейной функции.

При невыполнении условия оптимальности (1.6.20) в базис включают в первую очередь тот вектор, которому соответствует $min[\theta_{0j}\,(F_j - C_j)]$, где минимум берется по тем j, для которых $F_j - C_j < 0$. Если минимальных оценок несколько, то в базис прежде всего включают вектор, которому соответствует $max\, C_j$. В остальном симплексный процесс аналогичен процессу, имеющему место при отыскании минимального значения линейной функции.

Рассмотрим порядок решения задачи с помощью симплекс-таблиц на примере.

Задача 1.6.1 (об использовании сырья) Для производства четырех видов изделий A_1, A_2, A_3, A_4 завод должен использовать три вида сырья I, II, III, запасы которого на планируемый период составляют соответственно 1000, 600 и 150 условных единиц. В приведенной ниже таблице даны технологические коэффициенты, т.е. расход каждого вида сырья на производство единицы каждого изделия и прибыль от реализации единицы изделия каждого вида.

Таблица 1.6.3

Виды сырья	Запасы сырья	Технологические коэффициенты			
		A_1	A_2	A_3	A_4
I	1000	5	1	0	2
II	600	4	4	2	1
III	150	1	0	2	1
Прибыль от реализации		6	2	2,5	4

Требуется составить такой план выпуска указанных изделий, чтобы обеспечить максимальную прибыль от их реализации.

Решение. Обозначим через x_1, x_2, x_3, x_4 количество единиц соответствующих изделий A_1, A_2, A_3, A_4.

Тогда математическая модель задачи будет следующая:

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_4 \le 1000 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \le 600 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 \le 150 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0$$

$$F = 6x_1 + 2x_2 + 2,5x_3 + 4x_4 \to \max$$

Для построения первого опорного плана систему неравенств приведем к системе уравнений путем введения дополнительных неотрицательных переменных (**переход к канонической форме**). В 1-м неравенстве вводим базисную переменную x_5. В 2-м неравенстве вводим базисную переменную x_6. В 3-м неравенстве вводим базисную переменную x_7.

$$\begin{cases} 5 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 + 1 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 = 1000 \\ 4 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 1 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 = 600 \\ 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 1 \cdot x_7 = 150 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,...,7.$$

Матрица коэффициентов A = a(ij) этой системы уравнений имеет вид:

5	1	0	2	1	0	0
4	2	2	1	0	1	0
1	0	2	1	0	0	1

Базисные переменные это переменные, которые входят только в одно уравнение системы ограничений и притом с единичным коэффициентом. **Экономический смысл дополнительных переменных**: дополнительные переменные ЗЛП обозначают излишки сырья, времени, других ресурсов, остающихся в производстве данного оптимального плана.

Решим систему уравнений относительно базисных переменных: x_5, x_6, x_7.

Полагая, что **свободные переменные** равны 0, получим первый опорный план: X1 = (0,0,0,0,1000,600,150)

Базисное решение называется допустимым, если оно неотрицательно.

Таблица 1.6.4

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_5	1000	5	1	0	2	1	0	0
x_6	600	4	2	2	1	0	1	0
x_7	150	1	0	2	1	0	0	1
F(X0)	0	-6	-2	-2.5	-4	0	0	0

Переходим к основному алгоритму симплекс-метода. **Итерация №0**.

1. Проверка критерия оптимальности.

Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты.

2. Определение новой базисной переменной.

В индексной строке F(x) выбираем максимальный по модулю элемент. В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x_1, так как это наибольший коэффициент по модулю.

3. Определение новой свободной переменной.

Вычислим значения D_i по строкам как частное от деления: b_i / a_{i1} и из них выберем наименьшее: $\min\left(\frac{1000}{5};\frac{600}{4};\frac{150}{1}\right)=150$. Следовательно, 2-ая строка является ведущей. Разрешающий элемент равен 4 и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

Таблица 1.6.5

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	min
x_5	1000	5	1	0	2	1	0	0	200
x_6	600	**4**	2	2	1	0	1	0	**150**
x_7	150	1	0	2	1	0	0	1	150
F(X1)	0	**-6**	-2	-2.5	-4	0	0	0	0

Поскольку в последнем столбце присутствует несколько минимальных элементов 150, то номер строки выбираем по **правилу Креко**.

Метод Креко заключается в следующем. Элементы строк, имеющие одинаковые наименьшие значения min=150, делятся на предполагаемые разрешающие элементы, а результаты заносятся в дополнительные строки. За ведущую строку выбирается та, в которой раньше встретится наименьшее частное при чтении таблицы слева направо по столбцам.

4. Пересчет симплекс-таблицы.

Формируем следующую часть симплексной таблицы. Вместо переменной x_6 в план 1 войдет переменная x_1. Строка, соответствующая переменной x_1 в плане 1, получена в результате деления всех элементов строки x_6 плана 0 на разрешающий элемент РЭ=4.На месте разрешающего элемента в плане 1 получаем 1. В остальных клетках столбца x_1 плана 1 записываем нули. Таким образом, в новом плане 1 заполнены строка x_1 и столбец x_1. Все остальные элементы нового плана 1, включая элементы индексной строки, определяются по правилу прямоугольника. Для этого выбираем из старого плана четыре числа, которые расположены в вершинах прямоугольника и всегда включают разрешающий элемент РЭ. НЭ = СТЭ - (А*В)/РЭ, СТЭ - элемент старого плана, РЭ - разрешающий элемент (4), А и В - элементы старого плана, образующие прямоугольник с элементами СТЭ и РЭ. Представим расчет каждого элемента в виде таблицы 1.6.6.

Таблица 1.6.6

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$1000-\frac{600\cdot5}{4}=250$	$5-\frac{4\cdot5}{4}=0$	$1-\frac{2\cdot5}{4}=-1.5$	$0-\frac{2\cdot5}{4}=-2.5$	$2-\frac{1\cdot5}{4}=0.75$	$1-\frac{0\cdot5}{4}=1$	$0-\frac{1\cdot5}{4}=-1.25$	$0-\frac{0\cdot5}{4}=0$
600/4=150	4/4 = 1	2/4 = 0.5	2/4 = 0.5	1/4 = 0.25	0/4 = 0	1/4=0.25	0/4 = 0
$150-\frac{600\cdot1}{4}=0$	$1-\frac{4\cdot1}{4}=0$	$0-\frac{2\cdot1}{4}=-0.5$	$2-\frac{2\cdot1}{4}=1.5$	$1-\frac{1\cdot1}{4}=0.75$	$0-\frac{0\cdot1}{4}=0$	$0-\frac{1\cdot1}{4}=-0.25$	$1-\frac{0\cdot1}{4}=1$
$0-\frac{600(-6)}{4}=900$	$-6-\frac{4(-6)}{4}=0$	$-2-\frac{2(-6)}{4}=1$	$-2.5-\frac{2(-6)}{4}=0.5$	$-4-\frac{1(-6)}{4}=-2.5$	$0-\frac{0(-6)}{4}=0$	$0-\frac{1(-6)}{4}=1.5$	$0-\frac{0(-6)}{4}=0$

После преобразований получаем новую таблицу 1.6.7.

Таблица 1.6.7

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_5	250	0	-1.5	-2.5	0.75	1	-1.25	0
x_1	150	1	0.5	0.5	0.25	0	0.25	0
x_7	0	0	-0.5	1.5	0.75	0	-0.25	1
F(X1)	900	0	1	0.5	-2.5	0	1.5	0

Итерация №1.

1. Проверка критерия оптимальности.

Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты.

2. Определение новой базисной переменной.

В индексной строке F(x) выбираем максимальный по модулю элемент. В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x_4, так как это наибольший коэффициент по модулю.

3. Определение новой свободной переменной.

Вычислим значения D_i по строкам как частное от деления: b_i / a_{i4} и из них выберем наименьшее: $\min\left(\frac{250}{0,75};\frac{150}{0,25};\frac{0}{0,75}\right)=0$. Следовательно, 3-ая строка является ведущей. Разрешающий элемент равен (0.75) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

Таблица 1.6.8

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	min
x_5	250	0	-1.5	-2.5	0.75	1	-1.25	0	333.33
x_1	150	1	0.5	0.5	0.25	0	0.25	0	600
x_7	0	0	-0.5	1.5	**0.75**	0	-0.25	1	**0**
F(X2)	900	0	1	0.5	**-2.5**	0	1.5	0	0

4. Пересчет симплекс-таблицы.

Формируем следующую часть симплексной таблицы. Вместо переменной x_7 в план 2 войдет переменная x_4 Строка, соответствующая переменной x_4 в плане 2, получена в результате деления всех элементов строки x_7 плана 1 на разрешающий элемент РЭ=0.75. На месте разрешающего элемента в плане 2 получаем 1. В остальных клетках столбца x_4 плана 2 записываем нули. Таким образом, в новом плане 2 заполнены строка x_4 и столбец x_4. Все остальные элементы нового плана 2, включая элементы индексной строки, определяются по правилу прямоугольника. После преобразований получаем новую таблицу 1.6.9.

Таблица 1.6.9

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_5	250	0	-1	-4	0	1	-1	-1
x_1	150	1	0.67	0	0	0	0.33	-0.33
x_4	0	0	-0.67	2	1	0	-0.33	1.33
F(X2)	900	0	-0.67	5.5	0	0	0.67	3.33

Итерация №2.

1. Проверка критерия оптимальности.

Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты.

2. Определение новой базисной переменной.

В индексной строке F(x) выбираем максимальный по модулю элемент. В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x_2, так как это наибольший коэффициент по модулю.

3. Определение новой свободной переменной.

Вычислим значения D_i по строкам как частное от деления: b_i / a_{i2} и из них выберем наименьшее: $\min\left(-;\frac{150}{0,67};-\right)=225$. Следовательно, 2-ая строка является ведущей. Разрешающий элемент равен (0.67) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

Таблица 1.6.10

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	min
x_5	250	0	-1	-4	0	1	-1	-1	-
x_1	150	1	**0.67**	0	0	0	0.33	-0.33	**225**
x_4	0	0	-0.67	2	1	0	-0.33	1.33	-
F(X3)	900	0	**-0.67**	5.5	0	0	0.67	3.33	0

4. Пересчет симплекс-таблицы.

Формируем следующую часть симплексной таблицы. Вместо переменной x_1 в план 3 войдет переменная x_2. Строка, соответствующая переменной x_2 в плане 3, получена в результате деления всех элементов строки x_1 плана 2 на разрешающий элемент РЭ=0.67. На месте разрешающего элемента в плане 3 получаем 1. В остальных клетках столбца x_2 плана 3 записываем нули. Таким образом, в новом плане 3 заполнены строка x_2 и столбец x_2. Все остальные элементы нового плана 3, включая элементы индексной строки, определяются по правилу прямоугольника. После преобразований получаем новую таблицу 1.6.11.

Таблица 1.6.11

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_5	475	1.5	0	-4	0	1	-0.5	-1.5
x_2	225	1.5	1	0	0	0	0.5	-0.5
x_4	150	1	0	2	1	0	0	1
F(X3)	1050	1	0	5.5	0	0	1	3

1. Проверка критерия оптимальности.

Среди значений индексной строки нет отрицательных. Поэтому эта таблица определяет оптимальный план задачи:

$x_2 = 225$

$x_4 = 150$

$F(X) = 2 \cdot 225 + 4 \cdot 150 = 1050$.

Ответ. Оптимальным будет решение ***(0; 225; 0; 150; 475; 0; 0)*** при котором $\boldsymbol{F_{max} = 1050}$, т.е. для получения наибольшей прибыли, равной ***1050*** денежных единиц, предприятие должно выпустить ***225*** единиц продукции вида $\boldsymbol{A_2}$***, 150*** единиц продукции вида $\boldsymbol{A_4}$ (продукцию вида $\boldsymbol{A_1}$ и $\boldsymbol{A_3}$ в данных условиях производить невыгодно); при этом сырье типа II и III будет использовано полностью, а ***475*** единиц сырья типа I останутся неизрасходованными.

1.7. Метод искусственного базиса.

Если ограничения задачи линейного программирования можно преобразовать к виду $AX \le A_0$ при $A_0 \ge 0$, то система ограничений всегда содержит единичную матрицу. Многие задачи линейного программирования, имеющие решения, не содержат единичной матрицы и не приводятся к указанному виду. В этом случае для решения задач применяется **метод искусственного базиса.**

Рассмотрим общую задачу линейного программирования.

Найти минимальное значение линейной функции

$$F = C_1x_1 + C_2x_2 + \ + \cdots + C_nx_n$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad x_j \ge 0 \ (j = 1, \ldots, n),$$

где $b_i \ge 0$ и система ограничений не содержит единичной матрицы.

Для получения единичной матрицы к каждому равенству прибавим по одной переменной $x_{n+i} \ge 0 \ \ (i = 1, \ldots, m)$, которые назовем искусственными, и рассмотрим расширенную задачу, связанную с отысканием наименьшего значения линейной функции

$$\bar{F} = C_1x_1 + C_2x_2 + \cdots + C_nx_n + Mx_{n+1} + \cdots + +Mx_{n+m}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} \qquad\qquad = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \qquad + x_{n+2} \qquad = b_2, \\ \qquad\qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \qquad\qquad + x_{n+m} = b_m, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = 1, \ldots, n + m).$$

Величина M предполагается достаточно большим положительным числом, если задача решается на отыскание минимального значения линейной функции, и достаточно малым отрицательным числом, если находится максимальное значение линейной функции. Единичные векторы $A_{n+1}, A_{n+2}, \dots, A_{n+m}$, соответствующие искусственным переменным, образуют искусственный базис.

Для отыскания оптимального плана исходной задачи используют следующую теорему.

Теорема 1.7.1. Если в оптимальном плане $\bar{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$ расширенной задачи искусственные переменные $x_{n+i} = 0$ $(i = 1, \dots, m)$, то план $X == (x_1, x_2, \dots, x_n)$ является оптимальным планом исходной задачи.

Доказательство. Заметим, что если план $\bar{X}-$ оптимальный план расширенной задачи, то план $X-$ план первоначальной задачи, при этом $\bar{F}(\bar{X}) = F(X)$. Равенство значений функции следует из того, что план $\bar{X}$ от плана X отличается m последними компонентами, равными нулю.

Докажем, что план $X-$ оптимальный план исходной задачи. Допустим, что X не является оптимальным планом. Тогда существует такой оптимальный план $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, для которого $F(X^*) < F(X)$. Отсюда для вектора $\bar{X}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, 0, \dots, 0)$, являющегося планом расширенной задачи, получаем

$$\bar{F}(\bar{X}^*) = F(X^*) < F(X) = \bar{F}(\bar{X}),$$

т.е.

$$\bar{F}(\bar{X}^*) < \bar{F}(\bar{X}).$$

Таким образом, план $\bar{X}$ расширенной задачи не является оптимальным, что противоречит условию теоремы.

Применение симплекс-метода к расширенной задачи обеспечивает построение плана, в котором каждое из искусственных переменных $x_{n+i} = 0$. Если первоначальная задача не обладает планами (т.е. она не совместна), то оптимальное решение расширенной задачи содержит, по крайней мере, одно $x_{n+i} > 0$.

Для отыскания оптимального плана расширенной задачи в случае, если заранее не задана величина M, применяется симплекс-метод с составлением симплексных таблиц, которые имеют на одну строку больше, чем обычная симплексная таблица. По этой (m+2)-й строке определяют вектор, подлежащий включению в базис. Итерационный процесс по (m+2)-й строке проводят для исключения из базиса всех искусственных векторов, затем процесс отыскания оптимального плана продолжают по (m+1)-й строке.

Задача 1.7.1. Решить задачу линейного программирования

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 4x_3 + x_4 \le 12 \\ 4x_1 - 13x_2 + 10x_3 + 5x_4 \ge 6 \\ 3x_1 + 7x_2 + x_3 \ge 1 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0$$

$$F = 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 8x_4 \to \min$$

Решение. Для построения первого опорного плана систему неравенств приведем к системе уравнений путем введения дополнительных переменных (**переход к канонической форме**). В 1-м неравенстве вводим базисную переменную x_5. В 2-м неравенстве вводим базисную переменную x_6 со знаком минус. В 3-м неравенстве вводим базисную переменную x_7 со знаком минус: $\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 1x_4 + 1x_5 + 0x_6 + 0x_7 = 12 \\ 4x_1 - 13x_2 + 10x_3 + 5x_4 + 0x_5 - 1x_6 + 0x_7 = 6 \\ 3x_1 + 7x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 - 1x_7 = 1 \end{cases}$.

Введем **искусственные переменные**: в 2-м равенстве вводим переменную x_8; в 3-м равенстве вводим переменную x_9.

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 1x_4 + 1x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8 + 0x_9 = 12 \\ 4x_1 - 13x_2 + 10x_3 + 5x_4 + 0x_5 - 1x_6 + 0x_7 + 1x_8 + 0x_9 = 6 \\ 3x_1 + 7x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 - 1x_7 + 0x_8 + 1x_9 = 1 \end{cases}$$

Для постановки задачи на минимум целевую функцию запишем так:

$F(X) = 2x_1+5x_2+3x_3+8x_4+Mx_8+Mx_9 \rightarrow \min$

За использование искусственных переменных, вводимых в целевую функцию, накладывается так называемый штраф величиной M, очень большое положительное число, которое обычно не задается. Полученный базис называется искусственным, а метод решения называется методом искусственного базиса.

Причем искусственные переменные не имеют отношения к содержанию поставленной задачи, однако они позволяют построить стартовую точку, а процесс оптимизации вынуждает эти переменные принимать нулевые значения и обеспечить допустимость оптимального решения.

Из уравнений выражаем искусственные переменные:

$x_8 = 6-4x_1+13x_2-10x_3-5x_4+x_{6,}$

$x_9 = 1-3x_1-7x_2-x_3+x_{7,}$

которые подставим в целевую функцию:

$F(X) = 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 8x_4 + M(6-4x_1+13x_2-10x_3-5x_4+x_6) + M(1-3x_1-7x_2-x_3+x_7) \rightarrow \min$

или

$F(X) = (2-7M)x_1+(5+6M)x_2+(3-11M)x_3+(8-5M)x_4+(M)x_6+(M)x_7+(7M) \rightarrow \min$

Матрица коэффициентов A = a(ij) этой системы уравнений имеет вид:

3	6	-4	1	1	0	0	0	0
4	-13	10	5	0	-1	0	1	0
3	7	1	0	0	0	-1	0	1

Решим систему уравнений относительно базисных переменных: x_5, x_8, x_9.

Полагая, что **свободные переменные** равны 0, получим первый опорный план: X1 = (0,0,0,0,12,0,0,6,1).

Базисное решение называется допустимым, если оно неотрицательно.

Таблица 1.7.1

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_5	12	3	6	-4	1	1	0	0	0	0
x_8	6	4	-13	10	5	0	-1	0	1	0
x_9	1	3	7	1	0	0	0	-1	0	1
F(X0)	7M	-2+7M	-5-6M	-3+11M	-8+5M	0	-M	-M	0	0

Переходим к основному алгоритму симплекс-метода.

Итерация №0.

1. Проверка критерия оптимальности.

Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся положительные коэффициенты.

2. Определение новой базисной переменной.

В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x_3, так как это наибольший коэффициент .

3. Определение новой свободной переменной.

Вычислим значения D_i по строкам как частное от деления: b_i / a_{i3} и из них выберем наименьшее: $\min\left(-;\frac{6}{10};\frac{1}{1}\right)=\frac{3}{5}$. Следовательно, 2-ая строка является ведущей. Разрешающий элемент равен (10) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

Таблица 1.7.2

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	min
x_5	12	3	6	-4	1	1	0	0	0	0	-
x_8	6	4	-13	**10**	5	0	-1	0	1	0	$^3/_5$
x_9	1	3	7	1	0	0	0	-1	0	1	1
F(X1)	7M	-2+7M	-5-6M	**-3+11M**	-8+5M	0	-M	-M	0	0	0

4. Пересчет симплекс-таблицы.

Формируем следующую часть симплексной таблицы. Вместо переменной x_8 в план 1 войдет переменная x_3. Строка, соответствующая переменной x_3 в плане 1, получена в результате деления всех элементов строки x_8 плана 0 на разрешающий элемент РЭ=10. На месте разрешающего элемента в плане 1 получаем 1. В остальных клетках столбца x_3 плана 1 записываем нули. Таким образом, в новом плане 1 заполнены строка x_3 и столбец x_3. Все остальные элементы нового плана 1, включая элементы индексной строки, определяются по правилу прямоугольника. Получаем новую симплекс-таблицу.

Таблица 1.7.3

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_5	$14^2/_5$	$4^3/_5$	$^4/_5$	0	3	1	$^{-2}/_5$	0	$^2/_5$	0
x_3	$^3/_5$	$^2/_5$	$-1^3/_{10}$	1	$^1/_2$	0	$^{-1}/_{10}$	0	$^1/_{10}$	0
x_9	$^2/_5$	$2^3/_5$	$8^3/_{10}$	0	$^{-1}/_2$	0	$^1/_{10}$	-1	$^{-1}/_{10}$	1
F(X1)	$1^4/_5+^2/_5M$	$-\frac{4}{5}+2\frac{3}{5}M$	$-8\frac{9}{10}+8\frac{3}{10}M$	0	$-6\frac{1}{2}-M$	0	$-\frac{3}{10}+M$	- M	3 $\frac{3}{10}-1\frac{1}{10}M$	0

Итерация №1.

1. Проверка критерия оптимальности.

Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся положительные коэффициенты.

2. Определение новой базисной переменной.

В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x_2, так как это наибольший коэффициент .

3. Определение новой свободной переменной.

Вычислим значения D_i по строкам как частное от деления: b_i / a_{i2}

и из них выберем наименьшее: $\min(14^2/_5 : {}^4/_5\ , - , {}^2/_5 : 8^3/_{10}) = {}^4/_{83}$

Следовательно, 3-ая строка является ведущей.

Разрешающий элемент равен ($8^3/_{10}$) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

Таблица 1.7.4

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_5	$14^2/_5$	$4^3/_5$	$^4/_5$	0	3	1	$^{-2}/_5$	0	$^2/_5$	0
x_3	$^3/_5$	$^2/_5$	$-1^3/_{10}$	1	$^1/_2$	0	$^{-1}/_{10}$	0	$^1/_{10}$	0
x_9	$^2/_5$	$2^3/_5$	$\mathbf{8^3/_{10}}$	0	$^{-1}/_2$	0	$^1/_{10}$	-1	$^{-1}/_{10}$	**1**
F(X1)	$1^4/_5+{}^2/_5M$	$-\frac{4}{5}+2\frac{3}{5}M$	$\mathbf{-8\frac{9}{10}+8\frac{3}{10}M}$	0	$-6\frac{1}{2}-M$	0	$-\frac{3}{10}+M$	- M	3 $\frac{3}{10}-1\frac{1}{10}M$	0

4. Пересчет симплекс-таблицы.

Формируем следующую часть симплексной таблицы. Вместо переменной x_9 в план 2 войдет переменная x_2. Строка, соответствующая переменной x_2 в плане 2, получена в результате деления всех элементов строки x_9 плана 1 на разрешающий элемент РЭ=$8^3/_{10}$. На месте разрешающего элемента в плане 2 получаем 1.В остальных клетках столбца x_2 плана 2 записываем нули.

Таким образом, в новом плане 2 заполнены строка x_2 и столбец x_2. Все остальные элементы нового плана 2, включая элементы индексной строки, определяются по правилу прямоугольника.

Получаем новую симплекс-таблицу.

Таблица 1.7.5

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_5	$14^{30}/_{83}$	$4^{29}/_{83}$	0	0	$3^{4}/_{83}$	1	$^{-34}/_{83}$	$^{8}/_{83}$	$^{34}/_{83}$	$^{-8}/_{83}$
x_3	$^{55}/_{83}$	$^{67}/_{83}$	0	1	$^{35}/_{83}$	0	$^{-7}/_{83}$	$^{-13}/_{83}$	$^{7}/_{83}$	$^{13}/_{83}$
x_2	$^{4}/_{83}$	$^{26}/_{83}$	1	0	$^{-5}/_{83}$	0	$^{1}/_{83}$	$^{-10}/_{83}$	$^{-1}/_{83}$	$^{10}/_{83}$
F(X2)	$2^{19}/_{83}$	$1^{82}/_{83}$	0	0	$-7^{3}/_{83}$	0	$^{-16}/_{83}$	$-1^{6}/_{83}$	$^{16}/_{83}$-M	$1^{6}/_{83}$-M

Итерация №2.

1. Проверка критерия оптимальности.

Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся положительные коэффициенты.

2. Определение новой базисной переменной.

В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x_1, так как это наибольший коэффициент.

3. Определение новой свободной переменной.

Вычислим значения D_i по строкам как частное от деления: b_i / a_{i1} и из них выберем наименьшее: $\min\ (14^{30}/_{83} : 4^{29}/_{83}\ ,\ ^{55}/_{83} : {}^{67}/_{83}\ ,\ ^{4}/_{83} : {}^{26}/_{83}\ ) = {}^{166}/_{1079}$. Следовательно, 3-ая строка является ведущей. Разрешающий элемент равен ($^{26}/_{83}$) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

Таблица 1.7.6

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	min
x_5	$14^{30}/_{83}$	$4^{29}/_{83}$	0	0	$3^{4}/_{83}$	1	$^{-34}/_{83}$	$^{8}/_{83}$	$^{34}/_{83}$	$^{-8}/_{83}$	$3\frac{9047}{29963}$
x_3	$^{55}/_{83}$	$^{67}/_{83}$	0	1	$^{35}/_{83}$	0	$^{-7}/_{83}$	$^{-13}/_{83}$	$^{7}/_{83}$	$^{13}/_{83}$	$\frac{4565}{5561}$
x_2	$^{4}/_{83}$	$\mathbf{^{26}/_{83}}$	1	0	$^{-5}/_{83}$	0	$^{1}/_{83}$	$^{-10}/_{83}$	$^{-1}/_{83}$	$^{10}/_{83}$	$\frac{166}{1079}$
F(X3)	$2^{19}/_{83}$	$\mathbf{1^{82}/_{83}}$	0	0	$-7^{3}/_{83}$	0	$^{-16}/_{83}$	$-1^{6}/_{83}$	$^{16}/_{83}$-M	$1^{6}/_{83}$-M	0

4. Пересчет симплекс-таблицы.

Формируем следующую часть симплексной таблицы. Вместо переменной x_2 в план 3 войдет переменная x_1. Строка, соответствующая переменной x_1 в плане 3, получена в результате деления всех элементов строки x_2 плана 2 на разрешающий элемент РЭ=$^{26}/_{8}$. На месте разрешающего элемента в плане 3 получаем 1.В остальных клетках столбца x_1 плана 3 записываем нули.Таким образом, в новом плане 3 заполнены строка x_1 и столбец x_1. Все остальные элементы нового плана 3, включая элементы индексной строки, определяются по правилу прямоугольника.

Получаем новую симплекс-таблицу.

Таблица 1.7.7

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_5	$13^{9}/_{13}$	0	$-13\frac{1909}{2158}$	0	$3^{23}/_{26}$	1	$^{-15}/_{26}$	$1^{10}/_{13}$	$^{15}/_{26}$	$-1^{10}/_{13}$
x_3	$^{7}/_{13}$	0	$-2\frac{1245}{2158}$	1	$^{15}/_{26}$	0	$^{-3}/_{26}$	$^{13778}/_{89557}$	$^{3}/_{26}$	$^{-13778}/_{89557}$
x_1	$^{166}/_{1079}$	1	$3^{5}/_{26}$	0	$-\frac{415}{2158}$	0	$^{1}/_{26}$	$^{-5}/_{13}$	$^{-1}/_{26}$	$^{5}/_{13}$
F(X3)	$1^{12}/_{13}$	0	$-6\frac{747}{2158}$	0	$-6^{17}/_{26}$	0	$^{-7}/_{26}$	$^{-4}/_{13}$	$^{7}/_{26}$-M	$^{4}/_{13}$-M

1. Проверка критерия оптимальности. Среди значений индексной строки нет положительных. Поэтому эта таблица определяет оптимальный план задачи. Так как в оптимальном решении отсутствуют искусственные переменные (они равны нулю), то данное решение является допустимым. Оптимальный план можно записать так:

$x_3 = {}^{7}/_{13}$

$x_1 = {}^{166}/_{1079}$

$$F(X) = 3 \cdot \frac{7}{13} + 2 \cdot \frac{166}{1079} = 1\frac{12}{13}.$$

1.8. Двойственность задач линейного программирования. Таблица соответствий. Достаточное условие оптимальности

Определение 1.8.1. **Двойственная задача** – это вспомогательная задача линейного программирования, формулируемая с помощью определенных правил непосредственно из условий исходной задачи, которая в этом случае называется прямой задачей линейного программирования.

Рассмотрим пару ЗЛП вида:

Таблица 1.8.1

Прямая задача (I)	Двойственная ей задача (II)
$F = c_1x_1 + ... + c_nx_n \to \max$	$\bar{F} = b_1y_1 + ... + b_my_m \to \min$
$a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n \le b_1$	$y_1 \ge 0$
………………………	………
$a_{k1}x_1 + ... + a_{k+1n}x_n \le b_k$	$y_k \ge 0$
$a_{k+1,1}x_1 + ... + a_{k+1n}x_n = b_{k+1}$	y_{k+1} - любое
....	……..
$a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n = b_m$	y_m - любое

$x_1 \geq 0$	$a_{11}y_1 + ... + a_{m1}y_m \geq c_1$
………	……………………………..
$x_l \geq 0$	$a_{1l}y_1 + .. + a_{ml}y_m \geq c_l$
x_{l+1} - любое	$a_{1l+1}y_1 + ... + a_{ml+1}y_m = c_{l+1}$
……..	....
x_n - любое	$a_{1n}y_1 + ... + a_{mn}y_m = c_n$

Задачу (I) называют прямой задачей ЛП, а (II) - двойственной. Ограничения задач (I) и (II), соответствующие друг другу, называются сопряженными. Заметим, что задача двойственная к (II), есть исходная прямая задача, т.е. соотношение двойственности взаимное. Поэтому можно любую из такой пары задач считать прямой, а другую - двойственной.

В этой связи полезно усвоить следующую схему соответствия.

Таблица 1.8.2

Прямая задача	Двойственная задача
Максимизация	Минимизация
Коэффициенты в целевой функции	Константы в правых частях ограничений
Константы в правых частях ограничений	Коэффициенты в целевой функции
i-я строка, составленная из коэффициентов при неизвестных в ограничениях	i-й столбец, составленный из коэффициентов при неизвестных в ограничениях
j-й столбец, составленный из коэффициентов при неизвестных в ограничениях	j-я строка, составленная из коэффициентов при неизвестных в ограничениях
i-е неравенство вида ≤ (этот знак неравенства согласован с целевой функцией на максимум)	i-я неотрицательная переменная: $y_i \geq 0$

i-е соотношение в виде равенства	i-я переменная y_i, не имеющая ограничения в знаке
j-я неотрицательная переменная: $x_i \geq 0$	j-е неравенство вида ≥ (этот знак неравенства согласован с целевой функцией на минимум)
i-я переменная x_i, не имеющая ограничения в знаке	i-е соотношение в виде равенства

Трудности в решении задач линейного программирования зависят не от количества переменных ***n***, а от количества ограничений ***m***, определяющих число итераций симплекс-метода. Поэтому, если прямая задача линейного программирования, еще не приведенная к стандартной форме, содержит большое количество ограничений (***m***>***n***), то в этом случае целесообразно перейти к двойственной задаче. Сформированная двойственная задача линейного программирования будет иметь ***m*** переменных и ***n*** ограничений, т.е. количество итераций при этом уменьшится.

Задача 1.8.1. Построить двойственную задачу к следующей ЗЛП:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 \leq 4 \\ x_1 + x_3 \geq 8 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

$$F = x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \to \min$$

Прежде чем приступать к построению двойственной задачи, необходимо упорядочить запись исходной: согласовать знаки неравенств в ограничениях задачи с целевой функцией. Так как целевая функция минимизируется, то неравенства должны быть записаны с помощью знака ≥. Для этого второе неравенство умножим на (-1): $-2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 \geq -4$.

Теперь, вводя двойственные переменные y_1, y_2, y_3, запишем в соответствии с указанным правилом пару двойственных задач.

Таблица 1.8.3

Прямая задача (I)	Двойственная ей задача (II)
$F = x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \to \min$	$\bar{F} = 6y_1 - 4y_2 + 8y_3 \to \max$
$x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 6$	y_1 - любое
$-2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 \geq -4$	$y_2 \geq 0$
$x_1 + x_3 \geq 8$	$y_3 \geq 0$
$x_1 \geq 0$	$y_1 - 2y_2 + y_3 \leq 1$
$x_2 \geq 0$	$-2y_1 - 3y_2 \leq -2$
x_3 - любое	$y_1 + 2y_2 + 3y_3 = 1$
x_4 - любое	$3y_1 + y_2 = -1$

Итак, задача слева - исходная прямая задача, задача справа - двойственная к исходной задаче.

Разновидностью двойственных задач линейного программирования являются двойственные симметричные задачи, в которых система ограничений как исходной, так и двойственной задач задаётся неравенствами, причём на двойственные переменные налагается условие неотрицательности.

Таблица 1.8.4

Прямая задача (I)	Двойственная ей задача (II)
$F = c_1x_1 + ... + c_nx_n \to \max$	$\bar{F} = b_1y_1 + ... + b_my_m \to \min$
$a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n \le b_1$	$y_1 \ge 0$
………………………	………
$a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n \le b_m$	$y_m \ge 0$
$x_1 \ge 0$	$a_{11}y_1 + ... + a_{m1}y_m \ge c_1$
………	……………………………..
$x_n \ge 0$	$a_{12}y_1 + .. + a_{m2}y_m \ge c_n$

Пара двойственных задач (I) и (II) называется **парой симметрических двойственных задач.**

Не ограничивая общности, теорию двойственности можно рассматривать для пары симметрических задач, поскольку для любой ЗЛП существует эквивалентная ей стандартная ЗЛП и поэтому теоремы, справедливые для пары симметрических двойственных задач, будут справедливы для пары общих двойственных задач.

Рассмотрим пару симметрических двойственных задач в матричной форме записи.

Таблица 1.8.5

Прямая задача (I)	Двойственная ей задача (II)
$F = cx \to \max$	$\bar{F} = by \to \min$
$Ax \le b$	$y \ge 0$
$x \ge 0$	$A^T y \ge c$

Здесь $c=(c_1,...,c_n)$, $x=(x_1,...,x_n)$, $b=(b_1,...,b_m)$, $y=(y_1,...,y_m)$, A - матрица из m строк и n столбцов, A^T - транспонированная матрица. Введем обозначения для допустимых областей задачи (I) и (II).

$$D_{\text{I}}=\left\{x\in R^n \,/\, Ax\le b, x\ge 0\right\},\ D_{\text{II}}=\left\{y\in R^m \,/\, A^T y\ge c, y\ge 0\right\}$$

Основное неравенство двойственности: для любых допустимых решений прямой задачи x и для любых допустимых решений двойственной задачи y выполняется неравенство $cx\le by$.

Доказательство. Из системы ограничений задачи (I) $Ax\le b$ и $y\ge 0$ получаем $y^T Ax\le y^T b$.

Из системы ограничений задачи (II) $A^T y\ge c$ и $x\ge 0$ получаем $\left(A^T y\right)^T x\ge cx$ или $y^T Ax\ge cx$.

Объединяя полученные неравенства, имеем $cx\le y^T Ax\le y^T b$ или $cx\le by$.

Теорема доказана.

Следствие (достаточное условие оптимальности). Если для некоторых допустимых решений $x^*\in D_{\text{I}}$ и $y*\in D_{\text{II}}$ выполняется равенство значений целевых функций $cx^*=by^*$, то x^*, y^* - оптимальные решения задачи (I) и (II) соответственно.

Доказательство. Пусть $x^*\in D_{\text{I}}$ - произвольное допустимое решение задачи (I). По основному неравенству двойственности имеем $cx\le by^*=cx^*$, т.е. $\forall x\in D_{\text{I}}\quad cx\le cx^*$.

По определению это означает, что x^* - оптимальное решение задачи (I). Аналогично доказывается, что y^* - оптимальное решение задачи (II).

Следствие доказано.

1.9. Леммы Фаркаша

Определение 1.9.1. Канонической комбинацией неравенств системы

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1 \ge 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n + b_m \ge 0 \end{cases} \tag{1.9.1}$$

называется неравенство вида

$$\begin{gathered} \lambda_1\left(a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n\right) + \ldots + \lambda_m\left(a_{m1}x_1 + \ldots\right. \\ \left.\ldots + a_{mn}x_n\right) + \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_m b_m \ge 0, \textit{где}\, \lambda_i \ge 0, i = 1, \ldots, m \end{gathered} \tag{1.9.2}$$

Определение 1.9.2. Неравенство вида $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + b \ge 0$ называется **противоречивым**, если ему не удовлетворяет ни один вектор $x \in R^n$.

Замечание 1.9.1. В противоречивом неравенстве $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + b \ge 0$ выполняется: 1) $b < 0$; 2) $a_j = 0,\ j = 1, \ldots, n$

Доказательство.

1) Если $b \ge 0$, то вектор $x = (0, \ldots, 0)$ удовлетворяет неравенству $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + b \ge 0$. Поэтому $b < 0$.

2) Если существует j при котором $a_j \ne 0$, то вектор $x = (0, \ldots, 0, -\dfrac{b}{a_j}, 0, \ldots, 0)$ удовлетворяет неравенству $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + b \ge 0$. Поэтому $a_j = 0,\ j = 1, \ldots, n$.

Замечание доказано.

Определение 1.9.3. Система (1.9.1) называется **несовместной**, если ей не удовлетворяет ни один вектор $x \in R^n$.

Лемма 1.9.1. Если система (1.9.1) несовместна, то существует ее каноническая комбинация, являющаяся противоречивым неравенством.

Определение 1.9.4. Система (1.9.1) называется **несовместной** при $x \ge 0$, если ей не удовлетворяет ни один вектор $x \ge 0$.

Определение 1.9.5. Неравенство вида $a_1x_1 + ... + a_nx_n + b \ge 0$ называется **противоречивым** при $x \ge 0$, если ему не удовлетворяет ни один вектор $x \ge 0$.

Замечание 1.9.2. В противоречивом при $x \ge 0$ неравенстве выполняется: 1) $b < 0$; 2) $a_j = 0,\ j = 1, ..., n$

Доказательство.

1) Если $b \ge 0$, то вектор $x = 0$ удовлетворяет неравенству. Следовательно $b < 0$.

2) Если существует j при котором $a_j \ne 0$, то вектор $x = (0, ..., 0, -\frac{b}{a_j}, 0, ..., 0)$ удовлетворяет неравенству $a_1x_1 + ... + a_nx_n + b \ge 0$.

Следовательно, $a_j \le 0,\ j = 1, ..., n$.

Замечание доказано.

Лемма 1.9.2. Если система (1.9.1) несовместна при $x \ge 0$, то существует ее каноническая комбинация, являющаяся неравенством, противоречивым при $x \ge 0$.

Основная лемма. Рассмотрим пару симметрических двойственных задач:

Таблица 1.9.1

Прямая задача (I)	Двойственная ей задача (II)
$F = c_1x_1 + ... + c_nx_n \to \max$	$\bar{F} = b_1y_1 + ... + b_my_m \to \min$
$a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n \le b_1$	$y_1 \ge 0$
....	....
$a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n \le b_m$	$y_m \ge 0$
$x_1 \ge 0$	$a_{11}y_1 + ... + a_{m1}y_m \ge c_1$
....	....
$x_n \ge 0$	$a_{12}y_1 + .. + a_{m2}y_m \ge c_n$

Пусть допустимая область задачи (I) непустая и для любого $x \in D_{\mathrm{I}}$ выполняется $F(x) \le M$. Тогда существует $y \in D_{\mathrm{II}}$, для которого выполняется $F(y) \le M$.

Доказательство. Утверждение основной леммы означает, что существует вектор $y \ge 0$, удовлетворяющий системе:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + \ldots + a_{m1}y_m - c_1 \ge 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + .. + a_{mn}y_m - c_n \ge 0 \\ -b_1y_1 - \ldots - b_my_m + M \ge 0 \end{cases} \tag{1.9.3}$$

Предположим, что система (1.9.3) несовместна при $y \ge 0$

Тогда по лемме 1.9.2 существует каноническая комбинация, которая является неравенством, противоречивым при $y \ge 0$

$$\begin{aligned} &\lambda_1\left(a_{11}y_1 + \ldots + a_{m1}y_m - c_1\right) + \ldots + \lambda_n\left(a_{1n}y_1 + \ldots + a_{mn}y_m - c_n\right) + \\ &+\beta\left(-b_1y_1 - \ldots - b_my_m + M\right) \ge 0,\ \lambda_i \ge 0, \quad j = 1, \ldots, m, \quad \beta \ge 0\ , \end{aligned} \tag{1.9.4}$$

Перепишем это неравенство в виде:

$$\begin{aligned} &\left(\lambda_1a_{11} + \ldots + \lambda_na_{1n} - \beta b_1\right)y_1 + \ldots + \left(\lambda_1a_{m1} + \ldots + \lambda_na_{mn} - \beta b_m\right)y_m + \\ &+\left(-\lambda_1c_1 - \ldots - \lambda_nc_n + \beta M\right) \ge 0 \end{aligned} \tag{1.9.5}$$

По замечанию 1.9.2 в неравенстве, противоречивом при $y \ge 0$ выполняется:

$$\begin{gathered} \lambda_1a_{11} + \ldots + \lambda_na_{1n} - \beta b_1 \le 0\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_1a_{m1} + \ldots + \lambda_na_{mn} - \beta b_m \le 0 \\ -\lambda_1c_1 - \ldots - \lambda_nc_n + \beta M < 0 \end{gathered} \tag{1.9.6}$$

Для $\beta \ge 0$ возможны два случая:

Случай 1. Если $\beta > 0$, то делим полученные неравенства (1.9.6) на β:

$$\frac{\lambda_1 a_{11}}{\beta} + \ldots + \frac{\lambda_n a_{1n}}{\beta} \le b_1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\lambda_1 a_{m1}}{\beta} + \ldots + \frac{\lambda_n a_{mn}}{\beta} \le b_m \tag{1.9.7}$$

$$\frac{-\lambda_1 c_1}{\beta} - \ldots - \frac{\lambda_n c_n}{\beta} < M$$

В результате получим вектор

$$x' = (\frac{\lambda_1}{\beta}, \ldots, \frac{\lambda_n}{\beta}) \in D_{\mathrm{I}},\ F(x') > 0 \tag{1.9.8}$$

Это противоречит условию основной леммы.

Случай 2. Если $\beta = 0$, то система (9.6) принимает вид:

$$\lambda_1 a_{11} + \ldots + \lambda_n a_{1n} \le 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\lambda_1 a_{m1} + \ldots + \lambda_n a_{mn} \le 0, \tag{1.9.9}$$

$$-\lambda_1 c_1 - \ldots - \lambda_n c_n < 0.$$

Рассмотрим вектор $x' = (x_1', \ldots, x_n') \in D_{\mathrm{I}}$ и положим $x_t = x' + t\lambda'$, где $t > 0$, $\lambda' = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \ge 0$.

Заметим, что для любого $t > 0$ вектор $x_t \in D_{\mathrm{I}}$.

Действительно, подставляя координаты вектора x_t в ограничения задачи (I), получим

$$\begin{aligned} &a_{i1}(x' + t\lambda_1) + \ldots + a_{in}(x_n' + t\lambda_n) = \\ &= a_{i1}x' + \ldots + a_{in}x_n' + t(a_{i1}\lambda_1 + \ldots a_{in}\lambda_n) \le b_i \end{aligned} \tag{1.9.10}$$

для всех $i = 1, \ldots, m$.

Неотрицательность вектора x_t получается из неотрицательности компонент векторов x', λ' и $t > 0$.

Итак, для любого $t > 0$, $x_t \in D_{\mathrm{I}}$ значение целевой функции

$$F\left(x_t\right) = F\left(x' + t\lambda'\right) = F\left(x'\right) + tF\left(\lambda'\right) \qquad (1.9.11)$$

неограниченно возрастает при $t \to +\infty$, так как

$$F\left(\lambda'\right) = c_1\lambda_1 + \ldots + c_n\lambda_n > 0 \qquad (1.9.12)$$

Но по условию основной леммы для любого допустимого вектора $x \in D_{\mathrm{I}}$ целевая функция ограничена $F(x) \le M$. Получили противоречие.

В обоих случаях полученные противоречия возникли из-за того, что было предположение о несовместности системы (1.9.3) при $y \ge 0$, т.е. существует $y \in D_{\mathrm{II}}$ для которого

$$F\left(y\right) = b_1 y_1 + \ldots + b_m y_m \le M \ . \qquad (1.9.13)$$

1.10. Теоремы двойственности. Критерии оптимальности.

Рассмотрим пару симметричных двойственных задач.

Таблица 1.10.1

Прямая задача (I)	Двойственная ей задача (II)
$F = cx \to \max$ $Ax \le b$ $x \ge 0$	$\bar{F} = by \to \min$ $y \ge 0$ $A^T y \ge c$

Теорема 1.10.1. (*первая теорема двойственности*) Если одна из пары двойственных задач (I) и (II) разрешима, то разрешима и другая задача, причем оптимальные значения целевых функций прямой и двойственной задач совпадают.

$$c_1^* x_1^* + \ldots + c_n^* x_n^* = b_1^* y_1^* + \ldots + b_m^* y_m^*, \tag{1.10.1}$$

где $x^* = \left(x_1^*, \ldots, x_n^*\right)$, $y^* = \left(y_1^*, \ldots, y_m^*\right)$ оптимальные планы задач (I) и (II) соответственно.

Доказательство. 1. Пусть задача (I) разрешима, и пусть $x \in D_{\mathrm{I}}$ и $\forall\, x \in D_{\mathrm{I}} \quad F(x) \le F\left(x^*\right)$, т.е. x^* - оптимальное решение.

Обозначим: $M = F\left(x^*\right)$.

Тогда по основной лемме существует $y \in D_{\mathrm{II}}$, для которого

$$F\left(y^*\right) \le M = F\left(x^*\right)$$

Но по основному неравенству двойственности имеем:

$$\forall\, y \in D_{\mathrm{II}} \;\; F\left(x^*\right) \le F\left(y^*\right).$$

Объединяя последние два соотношения, имеем

$$\forall\, y \in D_{\mathrm{II}} \qquad F\left(y^*\right) \le F\left(x^*\right) \le F\left(y^*\right)$$

откуда следует, что y^* - оптимальное решение задачи (II) и

$$F\left(x^*\right) = F\left(y^*\right)$$

2. Пусть теперь задача (II) - разрешима.

Построим эквивалентную (II) задачу

$$\begin{gathered} -by \to \max \\ y \ge 0 \\ -A^T y \le -c \end{gathered} \tag{II'}$$

Задача (II') разрешима, так как задача (II) разрешима. Тогда по пункту 1 двойственная к (II') задача:

$$\begin{gathered} -cx \to \min \\ -Ax \le b \\ x \ge 0 \end{gathered}$$

Но эта задача эквивалентна задаче (I). Следовательно, задача (I) разрешима.

Теорема доказана.

Первый критерий оптимальности: Решение $x^* \in D_{\mathrm{I}}$ оптимально тогда и только тогда, когда существует решение $y^* \in D_{\mathrm{II}}$ такое, что

$$cx^* \le by^*. \tag{1.10.2}$$

Доказательство. Необходимость следует из первой теоремы двойственности. Достаточность следует из достаточного условия оптимальности.

Теорема 1.10.2. (*вторая теорема двойственности)* Чтобы допустимые решения x, y пары двойственных задач (I) и (II) были оптимальными необходимо и достаточно, чтобы выполнялись **условия дополняющей нежесткости**:

1) $\lambda = y^T\left(Ax - b\right) = 0,$ (1.10.3)

2) $\beta = \left(c - y^T A\right)x = 0.$ (1.10.4)

Доказательство. ***Необходимость.*** По условию допустимые решения x, y - оптимальны.

Так как $Ax \le b$, $y \ge 0$, $\lambda = y^T\left(Ax - b\right) \le 0$.

Так как $A^T y \ge c$, $x \ge 0$, $\beta = \left(c - y^T A\right)x \le 0$.

Так как $\lambda+\beta=y^T\left(Ax-b\right)+\left(c-y^T A\right)x=cx-by$, то из оптимальности решений x, y по первой теореме двойственности $cx=by$ и $\lambda+\beta=cx-by=0$.

В результате имеем $\lambda+\beta>0$, $\lambda\le 0$, $\beta\le 0$, откуда следует, $\lambda=0$, $\beta=0$.

Необходимость доказана.

Достаточность. По условию $\lambda=0$, $\beta=0$, откуда $\lambda+\beta=0$. Но $\lambda+\beta=cx-by$, следовательно $cx-by=0$, или $cx=by$.

По первой теореме двойственности получаем, что x, y - оптимальные решения задач (I) и (II). Достаточность доказана.

Допустимые решения x, y - задач (I) и (II) удовлетворяют **условиям дополняющей нежесткости (УДН)**, если при подстановке этих векторов в ограничения задач (I) и (II) хотя бы одно из любой пары сопряженных неравенств обращается в равенство.

Второй критерий оптимальности **(**следствие из условий дополняющей нежесткости**):** чтобы допустимые решения x, y - пары двойственных задач (I) и (II) были оптимальны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения:

1) если $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j < b_i$, то $y_i=0$; (1.10.5)

2) если $y_i>0$, то $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$; (1.10.6)

3) если $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i > c_j$, то $x_j=0$; (1.10.7)

4) если $x_j > 0$, то $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j$. (1.10.8)

Доказательство. Распишем $\lambda = y^T(Ax - b)$ и $\beta = \left(c - y^T A\right)x$ покоординатно: $\lambda = \sum_{i=1}^{m} y_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \right)$, $\beta = \sum_{j=1}^{n} \left(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) x_j$.

Из допустимости решений x, y- следует, что $y_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \right) \le 0$, $i = 1,\ldots,m$; $\left(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) x_j \le 0$, $j = 1,\ldots,n$.

Равенства $\lambda = 0$ и $\beta = 0$ выполняются тогда и только тогда, когда каждое слагаемое в этих равенствах равно нулю

$$y_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \right) = 0, i = 1,\ldots,m; \left(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) x_j = 0, j = 1,\ldots,n. \quad (1.10.9)$$

Произведение двух сомножителей, как известно, равно нулю, тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю.

Следовательно, равенства (1.10.9) или, что тоже самое $\lambda = 0$, $\beta = 0$, эквивалентны условиям (1.10.5)-(1.10.8), и по второй теореме двойственности получаем справедливость утверждения.

Критерий доказан.

Замечание: условия (1.10.5)-(1.10.8) есть условия дополняющей нежесткости, поэтому критерий можно сформулировать более лаконично.

Второй критерий оптимальности: чтобы допустимые решения x, y пары двойственных задач (I), (II) были оптимальны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись УДН.

1.11. Критерий разрешимости задачи линейного программирования

Определение 1.11.1. Точной верхней гранью (супремумом) функции $F(x)$ на множестве D называется такое число M^*, что

1) $\forall x \in D \quad F(x) \le M^*$ (1.11.1)

2) $\forall M < M^* \quad \exists x \in D \quad F(x) > M$ (1.11.2)

Лемма (о супремуме целевой функции): если для пары двойственных задач (I), (II) $M^* = \sup\limits_{x \in D_{\text{I}}} F(x)$, то $\forall y \in D_{\text{II}} \quad \bar{F}(y) \ge M^*$. (1.11.3)

Доказательство. Предположим противное, т.е. $\exists y \in D_{\text{II}} \quad \bar{F}(y) < M^*$.

Обозначим: $M = \bar{F}(y)$.

Тогда $M < M^*$ и по определению супремума $\exists x \in D_{\text{I}} \quad F(x) > M = \bar{F}(y)$.

Полученное неравенство противоречит основному неравенству двойственности по которому $\forall x \in D_{\text{I}} \quad \forall y \in D_{\text{II}} \quad F(x) < \bar{F}(y)$.

Предположение было неверным.

Лемма доказана.

Теорема 1.11.1. *(критерий разрешимости)* Задача (I) (на максимум) разрешима тогда и только тогда, когда целевая функция $F(x)$ ограничена сверху на непустом допустимом множестве.

Доказательство. *Необходимость.* Если задача (I) разрешима, то $\forall x \in D_{\text{I}} \quad F(x) \le F(x^*)$, где $x^* \in D_I$ - оптимальное решение.

Следовательно, $F(x)$ ограничена сверху на D_{I} величиной $F^* = F(x^*)$.

Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $D_{\mathrm{I}} = \varnothing$ и $F(x)$ ограничена сверху на D_{I}. Положим $M^* = \sup\limits_{x \in D_{\mathrm{I}}} F(x)$.

Тогда по лемме о супремуме целевой функции $\forall\, y \in D_{\mathrm{II}} \quad \bar{F}(y) \ge M^*$, а по основной лемме параграфа 1.9: $\exists\, y^* \in D_{\mathrm{II}} \quad \bar{F}(y^*) \le M^*$.

В результате получаем: $\bar{F}(y^*) = M^*$ и $\forall y \in D_{\mathrm{II}} \quad \bar{F}(y) \ge M^* = \bar{F}(y^*)$, что означает оптимальность вектора y^* для задачи (II).

Итак, задача (II) разрешима. Тогда по первой теореме двойственности и задача (I) разрешима.

Достаточность доказана.

Теорема 1.11.2. *(малая теорема двойственности)* Если прямая и двойственная задачи имеют хотя бы по одному допустимому решению (т.е. $D_{\mathrm{I}} \ne \varnothing$, $D_{\mathrm{II}} \ne \varnothing$), то обе задачи разрешимы.

Доказательство. Пусть $x \in D_{\mathrm{I}}$, $y \in D_{\mathrm{II}}$.

По основному неравенству двойственности $\forall x \in D_{\mathrm{I}} \quad F(x) \le \bar{F}(y) = M$, т.е. $F(x)$ ограничена сверху на допустимом множестве.

Тогда по критерию разрешимости прямая задача (I) разрешима. По первой теореме двойственности разрешима и двойственная задача (II).

Теорема доказана.

Теорема 1.11.3. ***(о неограниченности целевой функции)*** Если $D_{\mathrm{II}} = \varnothing$, то $D_{\mathrm{I}} \ne \varnothing$ и $F(x)$ неограничена сверху на D_{I}. Обратное утверждение тоже верно.

Доказательство. Пусть $F(x)$ неограничена сверху на $D_{\mathrm{I}} \neq \varnothing$. Предположим противное, т.е. $D_{\mathrm{II}} \neq \varnothing$. Тогда $\exists y \in D_{\mathrm{II}}$ и по основному неравенству двойственности $\forall\, x \in D_{\mathrm{I}} \quad F(x) \leq \bar{F}(y) = M$.

Получили ограниченность функции $F(x)$, что противоречит условию. Следовательно, предположение было неверным и $D_{\mathrm{II}} = \varnothing$.

Докажем обратное утверждение.

Пусть теперь $D_{\mathrm{II}} = \varnothing$. Предположим противное, т.е. $F(x)$ ограничена сверху на D_{I}. Тогда по критерию разрешимости задача (I) разрешима и по первой теореме двойственности задача (II) разрешима. Но тогда $D_{\mathrm{I}} \neq \varnothing$. Получили противоречие.

Следовательно, предположение было неверным и $F(x)$ неограничена сверху на D_{I}.

Теорема доказана.

Классификация ЗЛП.

1. $D_{\mathrm{I}} \neq \varnothing$, $D_{\mathrm{II}} \neq \varnothing$. Тогда задачи (I) и (II) разрешимы.
2. $D_{\mathrm{I}} \neq \varnothing$, $D_{\mathrm{II}} = \varnothing$. Тогда задачи (I) и (II) неразрешимы. Задача (I) неразрешима из-за неограниченности целевой функции. Задача (II) неразрешима из-за пустоты допустимой области.
3. $D_{\mathrm{I}} = \varnothing$, $D_{\mathrm{II}} \neq \varnothing$. Аналогично пункту 2.(только задачи (I) и (II) меняются местами).
4. $D_{\mathrm{I}} = \varnothing$, $D_{\mathrm{II}} = \varnothing$. Тогда задачи (I) и (II) неразрешимы.

Например:

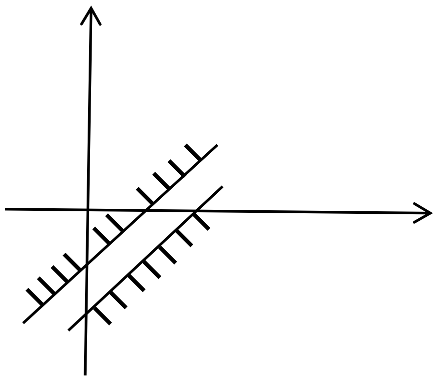
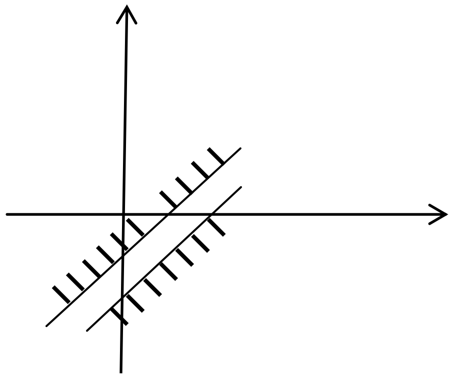
$L(x)=2x_1-x_2\rightarrow max$ $x_1-x_2\le 1$ $-x_1+x_2\le -2$ $x_1\ge 0$ $x_2\ge 0$  $D_1=\varnothing$	$\bar{L}(y)=y_1-2y_2\rightarrow max$ $y_1\ge 0$ $y_2\ge 0$ $y_1-y_2\ge 2$ $-y_1+y_2\ge -1$  $D_{11}=\varnothing$

Рисунок 1.11.1

Задача 1.11.1. Используя теоремы двойственности, решить двойственную задачу, если известно решение прямой задачи.

$$F(x)=300x_1+500x_2+400x_3\rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1+4x_2+2x_3\le 120 \\ x_1+4x_2+3x_3\le 100 \\ 3x_1+3x_3\le 200 \end{cases} \qquad (1.11.4)$$

$x_1\ge 0$, $x_2\ge 0$, $x_3\ge 0$.

Пусть решение задачи найдено одним из стандартных методов: $x^*=(40,0,20)$, $F^*(x)=20000$.

Решение. Построим двойственную задачу:

$$\bar{F}(y)=120y_1+100y_2+200y_3\rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 300 \\ 4y_1 + 4y_2 \geq 500 \\ 2y_1 + 3y_2 + 3y_3 \geq 400 \end{cases} \tag{1.11.5}$$

$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$.

По первой теореме двойственности задача разрешима, причем $\bar{F}^*(y) = F^*(x) = 20000$.

Найдем оптимальный план задачи $y^* = \left(y_1^*, y_2^*, y_3^*\right)$, используя вторую теорему двойственности. Подставим координаты вектора x^* в ограничения задачи (1.11.4).

Получим

$$2x_1^* + 4x_2^* + 2x_3^* = 2 \cdot 40 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 20 = 120 = 120$$

$$x_1^* + 4x_2^* + 3x_3^* = 1 \cdot 40 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot 20 = 100 = 100$$

$$3x_1^* + 3x_3^* = 3 \cdot 40 + 3 \cdot 20 = 180 < 200$$

Следовательно, в силу УДН, неравенство $y_3 \geq 0$ должно выполняться как равенство, то есть $y_3^* = 0$. Далее, так как $x_1^* = 40 > 0$, $x_3^* = 20 > 0$, то в силу УДН, $2y_1^* + 4y_2^* + 3y_3^* = 300$, $4y_1^* + 4y_2^* = 500$.

Получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} y_3^* = 0 \\ 2y_1^* + 4y_2^* + 3y_3^* = 300 \\ 4y_1^* + 4y_2^* = 500 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2y_1^* + y_2^* = 300 \\ 2y_1^* + 3y_2^* = 400 \end{cases}, \quad \begin{cases} y_3^* = 0 \\ y_2^* = 50 \\ y_1^* = 125 \end{cases}$$

Планы $x^* = \left(40, 0, 20\right)$ и $y^* = \left(125, 50, 0\right)$ удовлетворяют УДН, следовательно, в силу второй теоремы двойственности, являются оптимальными в задачах (1.11.4) и (1.11.5) соответственно.

Ответ. $y^* = \left(125, 50, 0\right)$

Задача 1.11.2. Исследовать вектор $x = \left(1, 0, 1, -1\right)$ на оптимальность в ЗЛП

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 \le 5 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

$F(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \max$

Решение. Вначале надо проверить, является ли вектор x допустимым. Для этого подставляем координаты вектора в ограничения:

$1 + 0 + 1 - 1 = 1$

$1 + 2 \cdot 0 - 1 + 2 \cdot (-1) = -2 < 5$

Так как второе ограничение выполняется как строгое неравенство, то в силу УДН для оптимальности вектора x необходимо выполнение равенства $y_2 = 0$.

Построим двойственную задачу:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 \ge 1 \\ y_1 + 2y_2 \ge 1 \\ -y_1 - y_2 = 1 \\ -y_1 + y_2 = 1 \end{cases}$$

$y_2 \ge 0, y_1 - \textit{любое}$

$\bar{F}(y) = y_1 + 5y_2 \to \min$

Поскольку $y_2 = 0$, то из третьего и четвертого ограничений получаем $y_1 = -1$. Но по УДН из условия $x_1 = 0$ следует, что должно выполняться равенство в первом ограничении двойственной задачи: $y_1 + y_2 = 1$,

Подставляя значения $y_1 = -1$, $y_2 = 0$, получим: $-1 + 0 \ne 1$

Следовательно, УДН не выполняются и вектор $x = (1, 0, 1, -1)$ не является оптимальным в исходной задаче.

Ответ. Вектор $x = (1, 0, 1, -1)$ не является оптимальным в исходной задаче.

1.12. Задача о наилучшем использовании ресурсов

Пусть некоторая производственная единица (цех, завод, объединение и т.д.), исходя из конъюнктуры рынка, технических или технологических возможностей и имеющихся ресурсов может выпускать *n* различных видов продукции (товаров), известных под номерами, обозначаемыми индексом ***j***, $j=1,...,n$. Ее будем обозначать Π_j.

Предприятие при производстве этих видов продукции должно ограничиваться имеющимися видами ресурсов, технологий, других производственных факторов (сырья, полуфабрикатов, рабочей силы, оборудования, электроэнергии и т.д.). Все эти виды ограничивающих факторов называют ингредиентами R_i. Пусть их число равно *m*; припишем им индекс ***i***, $i=1,...,m$. Они ограничены, и их количества равны соответственно $b_1, b_2, ..., b_m$ условных единиц. Таким образом, $b=\left(b_1,...,b_i,...,b_m\right)$ - вектор ресурсов.

Известна экономическая выгода (мера полезности) производства продукции каждого вида, исчисляемая, скажем, по отпускной цене товара, его прибыльности, издержкам производства, степени удовлетворения потребностей и т.д. Примем в качестве такой меры, например, цену реализации c_j, $j=1,...,n$, т.е. $c=\left(c_1,...,c_j,...,c_n\right)$ - вектор цен.

Известны также технологические коэффициенты a_{ij}, которые указывают, сколько единиц *i*–го ресурса требуется для производства единицы продукции *j*-го вида. Матрицу коэффициентов a_{ij} называют технологической и обозначают буквой A. Имеем $A=\left[a_{ij}\right]$.

Обозначим через $x=\left(x_1,...,x_j,...,x_n\right)$ план производства, показывающий, какие виды товаров $\Pi_1,...,\Pi_j,...,\Pi_n$ нужно производить и в каких количествах, чтобы обеспечить предприятию максимум объема реализации при имеющихся ресурсах.

Так как $c_j,\ j=1,...,n$ - цена реализации единицы j-й продукции, цена реализованных x_j единиц будет равна c_jx_j, а общий объем реализации

$$Z=c_1x_1+...+c_nx_n \to \max. \qquad (1.12.1)$$

Это выражение — целевая функция, которую нужно максимизировать.

Так как $a_{ij}x_j$ - расход i-го ресурса на производство x_j единиц j-й продукции, то, просуммировав расход i-го ресурса на выпуск всех n видов продукции, получим общий расход этого ресурса, который не должен превосходить $b_i, i=1,...,m$ единиц:

$$a_{i1}x_1+...+a_{ij}x_j+...+a_{in}x_n \le b_i. \qquad (1.12.2)$$

Чтобы искомый план $x=\left(x_1,...,x_j,...,x_n\right)$ был реализован, наряду с ограничениями на ресурсы нужно наложить условие неотрицательности на объёмы x_j выпуска продукции: $x_j \ge 0,\ j=1,...,n$.

Таким образом, модель задачи о наилучшем использовании ресурсов примет вид:

$$\max Z=\sum_{j=1}^{n} c_jx_j \qquad (1.12.3)$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, i=1,...,m,\ x_j \ge 0,\ j=1,...,n. \qquad (1.12.4)$$

Так как переменные x_j входят в функцию $Z(x)$ и систему ограничений только в первой степени, а показатели a_{ij}, b_i, c_j являются постоянными в планируемый период, то перед нами - задача линейного программирования.

Задача 1.12.1. Исходя из специализации и своих технологических возможностей предприятие может выпустить четыре вида продукции. Сбыт любого количества обеспечен. Для изготовления этой продукции используются трудовые ресурсы, полуфабрикаты и станочное оборудование. Общий объём ресурсов, расход каждого ресурса за единицу продукции, приведены в таблице:

Таблица 1.12.1

Ресурсы		Выпускаемая продукция				Объём ресурсов
		$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	
P_1	Трудовые ресурсы, чел-ч	4	2	2	8	4800
P_2	Полуфабрикаты, кг	2	10	6	0	2400
P_3	Станочное оборудование, станко-ч	1	0	2	1	1500
Цена единицы продукции, руб.		65	70	60	120	

Требуется определить план выпуска, доставляющий предприятию максимум прибыли. Выполнить после оптимизационный анализ решения и параметров модели.

Решение. Пусть x_1, x_2, x_3, x_4- объёмы продукции $П_1, П_2, П_3, П_4$ планируемые к выпуску; Z - сумма ожидаемой выручки.

Математическая модель прямой задачи:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 8x_4 \le 4800 \\ 2x_1 + 10x_2 + 6x_3 \le 2400 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 \le 1500 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ x_3 \ge 0, x_4 \ge 0$$

$$Z = 65x_1 + 70x_2 + 60x_3 + 120x_4 \to \max$$

Математическая модель двойственной задачи:

$$\begin{cases} 4y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 65 \\ 2y_1 + 10y_2 \ge 70 \\ 2y_1 + 6y_2 + 2y_3 \ge 60 \\ 8y_1 + y_3 \ge 120 \end{cases}$$

$$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0$$
$$\bar{Z} = 4800y_1 + 2400y_2 + 1500y_3 \to \min$$

По условиям задачи требуется найти:

1. Ассортимент выпускаемой продукции, обеспечивающий предприятию максимум реализации (максимум выручки).

2. Оценки ресурсов, используемых при производстве продукции.

Симплексным методом решаем прямую задачу, модель которой составлена выше в таблице. Последняя симплекс-таблица выглядит следующим образом.

Таблица 1.12.2

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_4	500	$^5/_{12}$	$^{-1}/_6$	0	1	$^1/_8$	$^{-1}/_{24}$	0
x_3	400	$^1/_3$	$1^2/_3$	1	0	0	$^1/_6$	0
x_7	1000	$^7/_{12}$	$2^1/_6$	0	0	$^{-1}/_8$	$^1/_{24}$	1
F(X4)	84000	5	10	0	0	15	5	0

После второй итерации все оценки оказались неотрицательными (см. последнюю строку таблицы), значит, найденный опорный план является оптимальным: $x^* = (0, 0, 400, 500, 0, 0, 200)$, $Z^* = Z\left(x^*\right) = 84000$.

Основные переменные $x_1^* = 0, x_2^* = 0, x_3^* = 400, x_4^* = 500$ показывают, что продукцию $П_1$ и $П_2$ выпускать нецелесообразно, а продукции $П_3$ следует произвести 400 ед., $П_4$ - 500 ед.

Дополнительные переменные $x_5^* = x_6^* = 0$ показывают, что ресурсы P_1 и P_2 используются полностью, а вот равенство $x_7^* = 200$ свидетельствует о том, что 200 единиц продукции P_3 осталось неиспользованным.

Выпишем из таблицы компоненты оптимального плана двойственной задачи – двойственные оценки. В канонической форме прямой задачи переменные x_1, x_2, x_3, x_4 - являются свободными, а дополнительные переменные - базисными. В канонической форме двойственной задачи свободными будут переменные y_1, y_2, y_3 - а базисными y_4, y_5, y_6, y_7.

Соответствие между переменными примет вид

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_1 & y_2 & y_3 \end{array}$$

Учитывая это соответствие, выпишем из индексной строки последней итерации компоненты искомого плана $y^* = (15, 5, 0, 5, 10, 0, 0)$ - двойственные оценки, $\min \bar{Z} = \max Z = 84000.$

Запишем это неравенство в развернутой форме:

$$48000 \cdot 15 + 2400 \cdot 5 + 1500 \cdot 0 = 65 \cdot 0 + 70 \cdot 0 + 60 \cdot 400 + 120 \cdot 500.$$

Учитывая, что компоненты представляют собой оценки ресурсов, заключаем: при оптимальном плане оценка ресурсов, затраченных на выпуск продукции, совпадает с оценкой произведенной продукции.

Теперь установим степень дефицитности используемых ресурсов и обоснуем рентабельность оптимального плана.

Мы нашли оптимальный план $x^* = (0, 0, 400, 500, 0, 0, 200)$ выпуска продукции. При этом плане третье ограничение прямой задачи выполняется как строгое неравенство: $0 + 2 \cdot 400 + 500 = 1300 < 1500.$ Это означает, что расход ресурса P_3 меньше его запаса, т. е. ресурс P_3 избыточный. Именно поэтому в оптимальном плане $y^* = (15, 5, 0, 5, 10, 0, 0)$ двойственной задачи оценка y_3^* этого ресурса равна нулю.

А вот оценки y_1^* и y_2^* ресурсов P_1 и P_2 выражаются положительными числами 15 и 5, что свидетельствует о дефицитности этих ресурсов: они при оптимальном плане используются полностью. В самом деле, ограничения по этим ресурсам выполняются как строгие равенства: $4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 400 + 8 \cdot 500 = 4800$, $2 \cdot 0 + 10 \cdot 0 + 6 \cdot 400 = 2400$.

Поскольку 15>5, ресурс P_1 считается более дефицитным, чем ресурс P_2.

На основе теоремы о дополняющей нежесткости нетрудно объяснить, почему не вошла в оптимальный план продукция $П_1$ и $П_2$: первое и второе ограничения двойственной задачи выполняются как строгие неравенства: $4 \cdot 15 + 2 \cdot 5 + 0 > 65$, $2 \cdot 15 + 10 \cdot 5 > 70$. Это означает, что оценки ресурсов, расходуемых на изготовление единицы продукции $П_1$ и $П_2$, превышают оценки единицы этой продукции. Понятно, что такую продукцию выпускать предприятию невыгодно.

Что же касается продукции $П_3$ и $П_4$ $\left(x_3^* \geq 0, x_4^* \geq 0\right)$, то выпуск ее оправдан, поскольку оценка израсходованных ресурсов совпадает с оценкой произведенной продукции: $2 \cdot 15 + 6 \cdot 5 + 2 \cdot 0 = 60$, $8 \cdot 15 + 0 = 120$.

Таким образом, в оптимальный план войдет только та продукция, которая выгодна предприятию, и не войдет убыточная продукция. В этом проявляется рентабельность оптимального плана.

Рассмотрим возможность дальнейшего совершенствования оптимального ассортимента выпускаемой продукции.

Выше установлено, что ресурсы P_1 и P_2 являются дефицитными. В связи с этим на основе теоремы (об оценках) можно утверждать, что на каждую единицу ресурса P_1, введенную дополнительно в производство, будет получена дополнительная выручка $\Delta_i Z$, численно равная y_i^*. В самом деле, при $\Delta b_1 = 1$ получаем $\Delta_1 Z = y_1^* b_1 = 15 \cdot 1 = 15$ рублей. По тем же причинам каждая дополнительная единица ресурса P_2 обеспечит прирост $\Delta_2 Z$ выручки, равный 5 рублям. Теперь становится понятно, почему ресурс P_2 считается более дефицитным по сравнению с ресурсом P_1: он может содействовать получению большей выручки.

Что же касается избыточного ресурса P_3, то увеличение его запаса не приведет к росту выручки, поскольку $\Delta_3 Z = y_3^* b_3 = 0 \cdot \Delta b_3 = 0$. Из приведенных рассуждений следует, что оценки ресурсов позволяют совершенствовать план выпуска продукции.

Выясним экономический смысл оценок $y_4^*, y_5^*, y_6^*, y_7^*$ продукции $П_1, П_2, П_3, П_4$.

По оптимальному плану $x^* = (0, 0, 400, 500, 0, 0, 200)$ выпускать следует продукцию $П_3$ и $П_4$. Оценки y_6^* и y_7^* этих видов продукции равны нулю. Что это означает, практически станет ясно, если представить оценки в развернутой записи:

$$y_6^* = \left(2y_1^* + 6y_2^* + 2y_3^*\right) - 60 = (2 \cdot 15 + 6 \cdot 5 + 2 \cdot 0) - 60 = 0$$

$$y_7^* = \left(8y_1^* + y_3^*\right) - 120 = (8 \cdot 15 + 0) - 120 = 0$$

Таким образом, нулевая оценка показывает, что эта продукция является неубыточной, поскольку оценка ресурсов, расходуемых на выпуск единицы такой продукции, совпадает с оценкой единицы изготовленной продукции.

Что же касается продукции $П_1$ и $П_2$ являющейся, как установлено выше, убыточной, а потому и не вошедшей в оптимальный план, то для ее оценок $y_4^* = 5$ и $y_5^* = 10$ получаем:

$$y_4^* = \left(4y_1^* + 2y_2^* + y_4^*\right) - 65 = 70 - 65 = 5$$

$$y_5^* = \left(y_1^* + 10y_2^*\right) - 70 = 80 - 70 = 10$$

Отсюда видно, что оценка убыточной продукции показывает, насколько будет снижать каждая единица такой продукции достигнутый оптимальный уровень.

1.13. Целочисленное линейное программирование: графический метод решения

Целочисленное программирование ориентировано на решение задач математического программирования, в которых все или некоторые переменные должны принимать только целочисленные значения. Задача называется **полностью** целочисленной, если условие целочисленности наложено на все ее переменные; когда это условие относится лишь к некоторым переменным, задача называется **частично** целочисленной. Если при этом целевая функция и функции, входящие в ограничения, линейные, то говорят, что данная задача является задачей целочисленного линейного программирования (ЦЛП).

Целочисленные задачи математического программирования возникают различными путями:

1. Существуют задачи линейного программирования, которые формально к целочисленным не относятся, но при соответствующих исходных данных

всегда обладают целочисленным планом. Примеры таких задач - транспортная задача и ее модификации (задачи о назначениях, о потоках в сетях).

2. Толчком к изучению целочисленных задач в собственном смысле слова явилось рассмотрение задач линейного программирования, в которых переменные представляли физически неделимые величины. Они были названы задачами с неделимостью. Таковы, например, задачи об оптимизации комплекса средств доставки грузов, о нахождении минимального порожнего пробега автомобилей при выполнении заданного плана перевозок, об определении оптимального машинного парка и его оптимального распределения по указанным работам при условии минимизации суммарной стоимости (машинного парка и производимых работ), о нахождении минимального количества судов для осуществления данного графика перевозок и т. п.

3. Другим важным толчком к построению теории целочисленного программирования стал новый подход к некоторым экстремальным комбинаторным задачам. В них требуется найти экстремум целочисленной линейной функции, заданной на конечном множестве элементов. Такие задачи принято называть задачами с альтернативными переменными. В качестве примеров можно назвать задачи коммивояжера (бродячего торговца), об оптимальном назначении, теории расписания, или календарного планирования, и задачи с дополнительными логическими условиями (например, типа «или - или», «если - то» и т.п.).

Исторически первой задачей целочисленного типа является опубликованная в 1932 г. венгерским математиком Е. Эгервари задача о назначении персонала. В 1955 г. на Втором симпозиуме по линейному программированию была рассмотрена задача о бомбардировщике, известная как задача о ранце.

В большинстве случаев целочисленные задачи сильно отличаются от своих непрерывных аналогов и требуют для решения специальных методов.

Условно методы решения задач целочисленного программирования можно разделить на три основных группы: методы отсечения, комбинаторные методы, приближенные методы.

При наличии в задаче целочисленного линейного программирования двух переменных, а в системе ограничений неравенств задача может быть решена **графическим методом**.

В системе координат $X_1 0 X_2$ находят область допустимых решений, строят вектор C и линию уровня. Перемещая линию уровня по направлению C для задач на максимум, определяют наиболее удаленную от начала координат точку и ее координаты.

В случае, когда координаты этой точки нецелочисленные, в области допустимых решений строят целочисленную решетку и находят на ней такие целые числа x_1 и x_2, которые удовлетворяют системе ограничений и при которых значение целевой функции наиболее близко к экстремальному нецелочисленному решению. Координаты такой вершины и являются целочисленным решением.

Аналогично решается задача на минимум. Целочисленному минимуму целевой функции будет соответствовать координата вершины целочисленной решетки, лежащей в области допустимых решений, наиболее близкой к началу координат в направлении вектора C.

Рассмотрим алгоритм решения задачи целочисленного программирования на конкретном примере.

Задача 1.13.1. Для улучшения финансового положения фирма приняла решение об увеличении выпуска конкурентоспособной продукции, для чего в одном из цехов необходимо установить дополнительное оборудование, требующее $\frac{19}{3}$ м^2 площади. На приобретение дополнительного оборудования фирма выделила 10 тыс. ден. ед., при этом она может купить оборудование двух видов. Приобретение одного комплекта оборудования 1-

го вида стоит 1 тыс. ден. ед., 2-го вида — 3 тыс. ден. ед. Приобретение одного комплекта оборудования 1-го вида позволяет увеличить выпуск продукции в смену на 2 ед., а одного комплекта оборудования 2-го вида — на 4 ед. Зная, что для установки одного комплекта оборудования 1-го вида требуется $2м^2$ площади, а для оборудования 2-го вида — $1м^2$ площади, определить такой набор дополнительного оборудования, который дает возможность максимально увеличить выпуск продукции.

Решение. Предположим, что фирма приобретает x_1 комплектов дополнительного оборудования 1-го вида и x_2 комплектов оборудования 2-го вида.

Математическая модель задачи будет иметь вид:

$$F(x) = 2x_1 + 4x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le \dfrac{19}{3} \\ x_1 + 3x_2 \le 10 \end{cases},$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_1, x_2 \in Z.$$

Получим задачу целочисленного программирования. Так как неизвестных только два (x_1 и x_2), то найдем ее решение графическим способом (см. рис. 1.13.1).

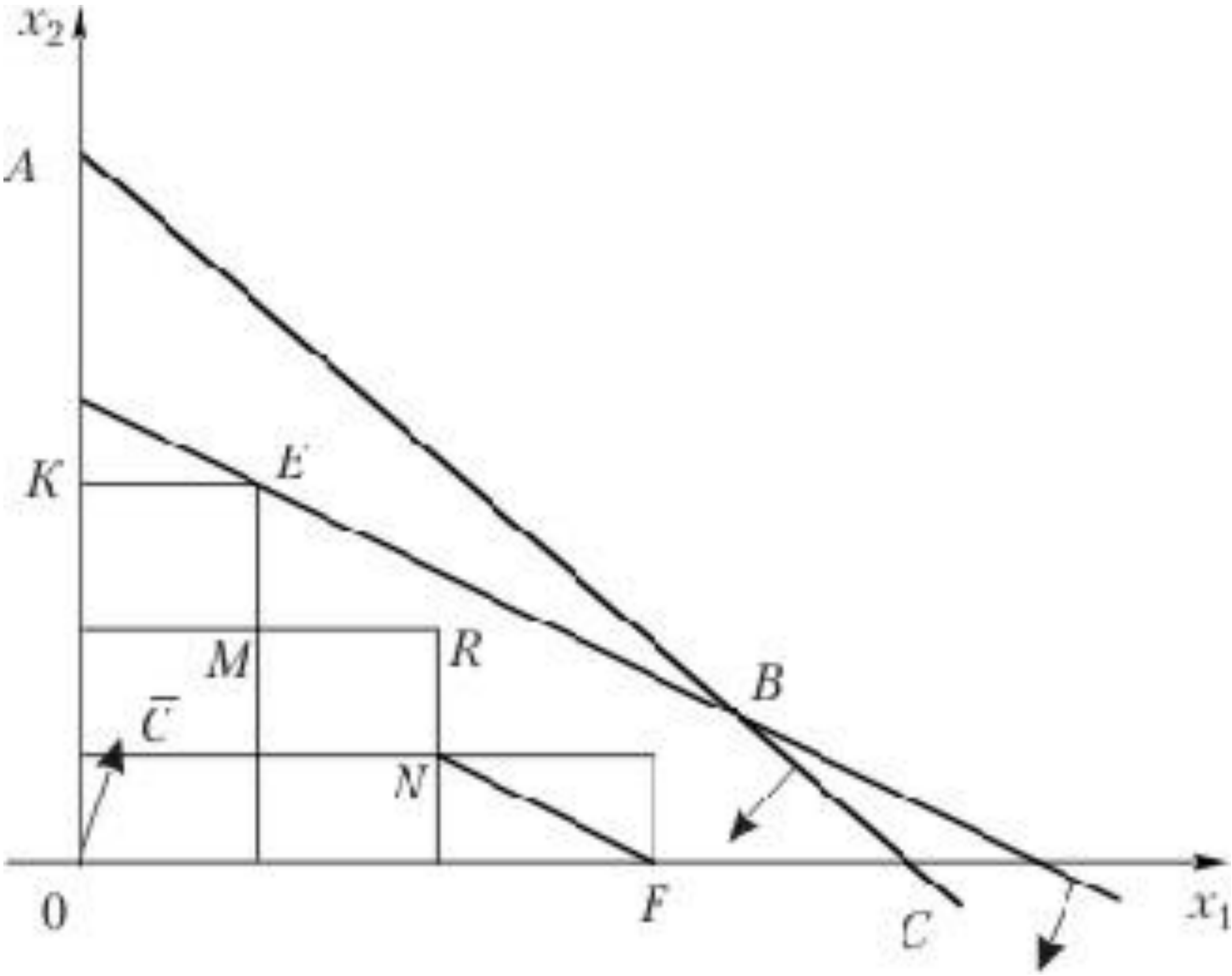


Рисунок 1.13.1

OABC — область допустимых решений (ОДР). Оптимальное решение задача имеет в точке ***B*** (9/5,41/15) при этом максимальное значение целевой функции составляет 218/15 ед. Полученное оптимальное решение не целочисленное.

Условию целочисленности переменных удовлетворяют координаты 12 точек, принадлежащих ОДР. Чтобы найти точку, координаты которой определяют решение исходной задачи, заменим многоугольник ***OABC*** многоугольником ***OKEMNF***, содержащим все допустимые точки с целочисленными координатами.

Строим вектор $\bar{C}(2,4)$. Линию уровня перемещаем по направлению $\bar{C}$, получим в точке E(1, 3) максимальное значение целевой функции $F = 2\cdot 1 + 4\cdot 3 = 14$ (ед.).

Ответ. Фирме следует приобрести один комплект оборудования 1-го вида и три комплекта оборудования 2-го вида, что обеспечит ей при имеющихся ограничениях на производственные площади и денежные средства максимальное увеличение выпуска продукции, равное 14 ед. в смену.

Итак, один из простейших подходов при решении задач целочисленного программирования заключается в решении непрерывной модификации целочисленной задачи с последующим округлением координат полученного оптимума до допустимых целых значений. Округление в данном случае есть не что иное, как приближение. Например, если получено решение непрерывной задачи, содержащее число 10,1, то можно приближенно заменить это число на 10 (т.е. округлить до 10). Однако нет гарантии, что округленное решение будет удовлетворять ограничениям. Например, для линейной задачи с ограничениями в виде равенств округленное решение всегда не удовлетворяет этим ограничениям. Как следует из теории линейного программирования, округленное решение не может быть допустимым, поскольку это означало бы, что один и тот же базис (при условии равенства нулю небазисных переменных) определяет два различных решения задачи. Приведем пример, который показывает возможную несостоятельность подхода, основанного на округлении оптимального решения задачи линейного программирования, полученной из исходной целочисленной задачи путем отбрасывания требований целочисленности.

Задача 1.13.2. Решить следующую задачу ЦЛП

$$F(x) = -5x_1 - 2x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 11x_1 + 4x_2 \le 33 \\ -x_1 + 2x_2 \le 8 \end{cases},$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_1, x_2 \in Z.$$

Решение. Отбросив требование целочисленности переменных, получим задачу линейного программирования. Решением данной задачи является точка $x^* = (x_1^*, x_2^*) = (1\frac{4}{13},\ 4\frac{17}{26})$. Если рассматривать все возможные округления компонент оптимальной точки, то получим четыре возможных целочисленных точки (1,4), (2,4), (1,5), (2,5). Во-первых, из этих точек только точка (1,4) является допустимой для исходной задачи. А во-вторых, она находится далеко от истинного оптимального решения исходной задачи $x^*=(x_1^*,x_2^*)=(3,0)$.

Невозможно обосновать какое-либо утверждение относительно близости целочисленного решения и решения задачи без требований целочисленности, поскольку можно построить пример, показывающий, что данный подход может давать сколь угодно плохие приближения к решению исходной целочисленной задачи.

Эффект округления не слишком заметен, лишь когда искомые параметры задачи подчинены относительно нежестким ограничениям. Однако типичными для задач целочисленного программирования являются ограничения-равенства, достаточно жестко определяющие поведение релевантных переменных. Примером может служить условие $x_1+x_2+\ldots+x_n=1$, где $x_i=(0,1)$ для всех i. В такой ситуации процедура округления не имеет смысла и необходимо обратиться к другим алгоритмам решения.

Несостоятельность округления подчеркивается также следующими соображениями. Несмотря на то, что целочисленные переменные обычно выражают количество неделимых предметов (например, машин, людей, кораблей), возможны и другие типы спецификации этих переменных. Так, решение о финансировании некоторого проекта представляется булевой переменной x (x=0, если проект отклоняется, и x=1, если проект принимается). В этом случае бессмысленно оперировать дробными значениями величины x, и процедура округления является логически неприемлемой.

Огромное количество экономических задач носит дискретный, чаще всего целочисленный характер, что связано, как правило, с физической неделимостью многих элементов расчета: например, нельзя построить два с половиной завода, купить полтора автомобиля и т.д. В ряде случаев такие задачи решаются обычными методами, например, симплексным методом, с последующим округлением до целых чисел. Однако такой подход оправдан, когда отдельная единица составляет очень малую часть всего объема (например, товарных запасов); в противном случае он может внести значительные искажения в действительно оптимальное решение. Поэтому разработаны специальные методы решения целочисленных задач, например, метод ветвей и границ.

1.14. Метод ветвей и границ

Пусть
$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \tag{1.14.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = 1,\dots,m, \tag{1.14..2}$$

$$x_j \ge 0, \quad x_j \in Z, \quad j = 1,\dots,n. \tag{1.14.3}$$

Первоначально находим симплексным методом или методом искусственного базиса оптимальный план задачи без учета целочисленности переменных.

Если среди компонент этого плана нет дробных чисел, то тем самым найдено искомое решение данной задачи.

Если среди компонент плана имеются дробные числа, то необходимо осуществить переход к новым планам, пока не будет найдено решение задачи.

Метод ветвей и границ основан на предположении, что наш оптимальный нецелочисленный план дает значение функции, большее, чем всякий последующий план перехода.

Пусть переменная x_i^* в плане – дробное число. Тогда в оптимальном плане ее значение будет, по крайней мере:

1. либо меньше или равно ближайшему меньшему целому числу K_i^*;
2. либо больше или равно ближайшему большему целому числу K_i^*+1.

Определяя эти числа, находим симплексным методом решение двух задач :линейного программирования:

$$F=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \tag{1.14.4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i=1,...,m, \tag{1.14.5}$$

$$x_i^* \le K_i^* \tag{1.14.6}$$

$$x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ j=1,...,n. \tag{1.14.7}$$

и

$$F=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \tag{1.14.8}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i=1,...,m, \tag{1.14.9}$$

$$x_i^* \geq K_i^* + 1 \qquad (1.14.10)$$

$$x_j \geq 0,\ x_j \in Z,\ j = 1, \ldots, n. \qquad (1.14.11)$$

Возможны четыре случая при решении этой пары задач:

1. Одна из задач неразрешима, а другая имеет целочисленный оптимальный план. Тогда этот план и значение целевой функции дают решение исходной задачи.
2. Одна из задач неразрешима, а другая имеет нецелочисленный оптимальный план. Тогда рассматриваем вторую задачу и в ее оптимальном плане выбираем одну из компонент, значение которой равно дробному числу и строим две задачи, аналогичные предыдущим.
3. Обе задачи разрешимы. Одна из задач имеет оптимальный целочисленный план, а в оптимальном плане другой задачи есть дробные числа. Тогда вычисляем значения целевой функции от планов и сравниваем их между собой. Если на целочисленном оптимальном плане значение целевой функции больше или равно ее значению на плане, среди компонент которого есть дробные числа, то данный целочисленный план является оптимальным для исходной задачи и дает искомое решение.
4. Обе задачи разрешимы, и среди оптимальных планов обеих задач есть дробные числа. Тогда рассматриваем ту из задач, для которой значение целевой функции является наибольшим. И строим две задачи.

Алгоритм метода ветвей и границ:

1. Находим решение задачи линейного программирования без учета целочисленности.
2. Составляет дополнительные ограничения на дробную компоненту плана.
3. Находим решение двух задач с ограничениями на компоненту.

4. Строим в случае необходимости дополнительные ограничения, согласно возможным четырем случаям получаем оптимальный целочисленный план либо устанавливаем неразрешимость задачи.

Задача 1.14.1. Решить следующую задачу ЦЛП

$$F = 2x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + x_3 = 24 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_4 = 9 \\ -x_1 + 3x_3 + x_5 = 3 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in Z$$

Решение. Находим решение без учета целочисленности задачи симплексным методом: $x^* = \left(\frac{18}{5}; \frac{3}{5}; 0; 0; \frac{24}{5}\right)$, $F\left(x^*\right) = \frac{39}{5}$.

Рассмотрим следующую пару задач:

Задача 1: $F = 2x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + x_3 = 24 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_4 = 9 \\ -x_1 + 3x_3 + x_5 = 3 \end{cases}$$

$$x_1 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0$$

Задача 2: $F = 2x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + x_3 = 24 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_4 = 9 \\ -x_1 + 3x_3 + x_5 = 3 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 4$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0.$$

Первая задача имеет оптимальный план $x_1^* = \left(3; \frac{3}{2}; 0; \frac{9}{2}; \frac{3}{2}\right)$, вторая – неразрешима.

Проверяем на целочисленность план первой задачи.

Это условие не выполняется, поэтому строим следующие задачи:

Задача 1.1: $F = 2x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + x_3 = 24 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_4 = 9 \\ -x_1 + 3x_3 + x_5 = 3 \end{cases}$$

$$x_1 \le 3$$

$$x_2 \le 1$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0$$

и

Задача 1.2: $F = 2x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + x_3 = 24 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_4 = 9 \\ -x_1 + 3x_3 + x_5 = 3 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 4$$

$$x_2 \ge 2$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0$$

Задача 1.2 неразрешима, а задача 1.1 имеет оптимальный план $x_{1.1}^* = (3; 1; 2; 3; 3)$, на котором значение целевой функции $F\left(x_{1.1}^*\right) = 7$.

В результате получили, что исходная задача целочисленного программирования имеет оптимальный план $x^* = (3; 1; 2; 3; 3)$ и $F\left(x^*\right) = 7$.

Главный недостаток алгоритма метода ветвей и границ заключается в необходимости полностью решать задачи линейного программирования, ассоциированные с каждой из вершин многогранника допустимых решений. Для задач большой размерности это требует значительных и, в известной степени, неоправданных с практической точки зрения затрат времени.

Но, несмотря на недостатки данного метода, можно утверждать, что в настоящее время алгоритм метода ветвей и границ является наиболее надежным средством решения целочисленных задач, встречающихся в практических исследованиях. Это не означает, однако, что любая целочисленная задача может быть решена с помощью рассматриваемого метода.

1.15. Задача о назначениях.

Задача о назначениях - задача о наилучшем распределении некоторого числа работ между таким же числом исполнителей. При ее решении ищут оптимальное назначение из условия максимума общей производительности, которая равна сумме производительности исполнителей. В процессе управления производством зачастую возникают задачи назначения исполнителей на различные виды работ, например: подбор кадров и назначение кандидатов на вакантные должности, распределение источников капитальных вложении между различными проектами научно-технического развития, распределение экипажей самолетов между авиалиниями.

Задача о назначениях. Пусть имеется n исполнителей, которые могут выполнять n различных работ. Известна полезность c_{ij}, связанная с выполнением i-м исполнителем j-й работы $j=1,...,n$, $i=1,...,n$. Необходимо назначить исполнителей на работы так, чтобы добиться максимальной полезности, при условии, что каждый исполнитель может быть назначен только на одну работу и за каждой работой должнен быть закреплен только один исполнитель.

Математическая модель задачи примет вид:

$$F = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \max \qquad (1.15.1)$$

Каждый исполнитель назначается только на одну работу:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad (1.15.2)$$

На каждую работу назначается только один исполнитель:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad (1.15.3)$$

Условия неотрицательности и целочисленности:

$$x_{ij} \geq 0,\ x_{ij} \in \{0,1\},\ i = 1,\dots,n,\ j = 1,\dots,n. \qquad (1.15.4)$$

При решении задачи о назначениях исходной информацией является таблица задачи о назначениях $c = \{c_{ij}\}$, элементами которой служат показатели эффективности назначений.

Для задачи о назначениях, записанной в стандартной форме, количество строк этой таблицы совпадает с количеством столбцов.

Таблица 1.15.1

Работа / Рабочий	1	2	…	j	…	m
1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1j}	…	c_{1m}
2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2j}	…	c_{2m}
…	…	…	…	…	…	…
i	c_{i1}	c_{i2}	…	c_{ij}	…	c_{im}
…	…	…	…	…	…	…
m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mj}	…	c_{mm}

Результатом решения задачи о назначениях (1.15.1) - (1.15.4) является вектор $x^* = \{x^*_{ij}\}$, компоненты которого - целые числа.

Оптимальный план задачи о назначениях (1.15.1) - (1.15.4) можно представить в виде квадратной матрицы назначений, в каждой строке и в каждом столбце которой находится ровно одна единица.

Такую матрицу иногда называют матрицей перестановок. Значение целевой функции (1.15.1), соответствующее оптимальному плану, называют **эффективностью назначений**.

Если количество рабочих не равно количеству работ, то возникает задача о назначениях в открытой форме. В этом случае задача может быть преобразована в задачу, сформулированную в стандартной форме. Пусть m — количество работ. И пусть, например, количество рабочих n превышает количество работ m. Введем дополнительные фиктивные работы с индексами $j=m+1,...,n$. Коэффициенты таблицы назначений c_{ij}, $i=1,...,n$; $j=m+1,...,n$, положим равными нулю. В этом случае получаем задачу, сформулированную в стандартной форме. Если в оптимальном плане этой задачи $x^*_{ij}=1$ при $j=m+1,...,n$, то исполнитель i назначается на выполнение фиктивной работы, т.е. остается без работы.

Заметим, что оптимальное значение целевой функции исходной задачи совпадает с оптимальным значением задачи, приведенной к стандартной форме. Поэтому эффективность назначений в результате такого преобразования не меняется.

Следует особо отметить, что задача о назначениях является частным случаем транспортной задачи, в которой количество пунктов производства совпадает с количеством пунктов потребления, а все величины спроса и величины предложения равны.

Задача 1.15.1. Цех металлообработки получил срочный заказ на выпуск партии деталей. Для производства детали необходимо выполнить операции на четырех станках. В цехе работают четыре слесаря высокой квалификации, каждый из которых может работать на любом станке, но с различным процентом брака (процент брака известен из документации ОТК).

Таблица 1.15.2

Станок / Рабочий	1	2	3	4
1	2,3	1,9	2,2	2,7
2	1,8	2,2	2,0	1,8
3	2,5	2,0	2,2	3,0
4	2,0	2,4	2,4	2,8

Распределите станки между рабочими таким образом, чтобы процент брака был минимальным. (Предполагается, что ОТК проверяет готовую деталь, т.е. общий процент брака определяется как сумма процентов брака, допущенного всеми рабочими.)

Вопросы:

1. На каком станке должен работать рабочий 2?

2. Чему равен минимальный общий процент брака?

Решение. Необходимо провести оптимизационные расчеты. После этого получим матрицу назначений.

Таблица 1.15.3

Станок / Рабочий	1	2	3	4
1	0	1	0	0
2	0	0	0	1
3	0	0	1	0
4	1	0	0	0

Решение можно представить в виде таблицы 1.15.4.

Таблица 1.15.4

Рабочий	Станок	Процент брака
1	2	1,9
2	4	1,8
3	3	2,2
4	1	2,0
Итог		7,9

Ответ. 1.Рабочий 2 должен работать на станке № 4.

2.Минимальный общий процент брака равен 7,9%.

Задача 1.15.2. Фирма получила заказы на разработку пяти программных продуктов. На фирме работают шесть квалифицированных программистов, которым можно поручить выполнение этих заказов. Каждый из них дал оценку времени (в днях), требуемого для разработки программ. Эти оценки приведены в таблице 1.15.5.

Таблица 1.15.5

Программа / Программист	1	2	3	4	5
Галкин	46	59	24	62	67
Палкин	47	56	32	55	70
Малкин	44	52	19	61	60
Чалкин	47	59	17	64	73
Залкинд	43	65	20	60	75
Кузьмин	41	53	28	54	68

Выполнение каждого из пяти заказов фирма решила поручить одному программисту. Ясно, что один из программистов не получит заказа. Каждому программисту, которому будет поручено выполнять заказ, фирма предложила оплату 1 тыс. руб. в день. Распределите работу между программистами, чтобы общие издержки на разработку программ были минимальными. Вопросы:

1. Чему равны минимальные издержки фирмы на выполнение всех пяти заказов?

2. Какую программу следует поручить Малкину?

3. Какую программу следует поручить Залкинду?

4. Кто из программистов не получит заказа?

5. Стало известным, что не все программисты согласились с условиями оплаты, обосновывая это тем, что имеют разную квалификацию. В результате была достигнута договоренность о следующих размерах оплаты в день (в тыс. руб.).

Таблица 1.15.6

Программист	Размер оплаты
Галкин	1
Палкин	2
Малкин	1,5
Чалкин	2
Залкинд	1,5
Кузьмин	2

Изменится ли распределение работ между программистами при новых условиях оплаты труда? Каковы будут в этом случае общие минимальные издержки?

6. Кто из программистов при новых условиях не получит заказа?

Решение. В таблице 1.15.7 задачи о назначениях указан размер оплаты (в тыс. руб.) в случае, если программисту будет поручена соответствующая программа.

Таблица 1.15.7

Программа / Программист	1	2	3	4	5	6 (фиктивная)
Галкин	46	59	24	62	67	0
Палкин	47	56	32	55	70	0
Малкин	44	52	19	61	60	0
Чалкин	47	59	17	64	73	0
Залкинд	43	65	20	60	75	0
Кузьмин	41	53	28	54	68	0

После проведения расчетов, получается следующая матрица назначений (таблица 1.15.8)

Таблица 1.15.8

Программа / Программист	1	2	3	4	5	6 (фиктивная)
Галкин	0	0	0	0	0	0
Палкин	0	0	0	1	0	0
Малкин	0	0	0	0	1	0
Чалкин	0	0	1	0	0	0
Залкинд	1	0	0	0	0	0
Кузьмин	0	1	0	0	0	0

Учитывая исходную информацию, получается следующая таблица 1.15.9.

Таблица 1.15.9

Программист	Программа	Издержки, тыс. руб.
Галкин	Фиктивная	0
Палкин	4	55
Малкин	5	60
Чалкин	3	17
Залкинд	1	43
Кузьмин	2	53
Итог		228

Из последней таблицы следует, что минимальные издержки составляют 228 тыс. руб., Малкину следует поручить программу 5, а Залкинду - программу 1. Заказа не получит Галкин.

При новых условиях оплаты труда таблица задачи о назначениях имеет следующий вид (таблица 1.15.10).

Таблица 1.15.10

Программа / Программист	1	2	3	4	5	6 (фиктивная)
Галкин	46	59	24	62	67	0
Палкин	94	112	64	110	140	0
Малкин	66	78	28,5	91,5	90	0
Чалкин	94	118	34	128	146	0
Залкинд	64,5	97,5	30	90	112,5	0
Кузьмин	82	106	56	108	136	0

После проведения расчетов, получается следующая матрица назначений (таблица 1.15.11).

Таблица 1.15.11

Программа / Программист	1	2	3	4	5	6 (фиктивная)
Галкин	0	0	0	0	1	0
Палкин	0	0	0	0	0	0
Малкин	0	1	0	0	0	0
Чалкин	0	0	1	0	0	0
Залкинд	0	0	0	1	0	0
Кузьмин	1	0	0	0	0	0

В таблице 1.15.12 представлен итоговый результат

Таблица 1.15.12

Программист	Программа	Издержки, тыс. руб.
Галкин	5	67
Палкин	Фиктивная	0
Малкин	2	78
Чалкин	3	34
Залкинд	4	90
Кузьмин	1	82
Итог		351

Ответ. 1. Минимальные издержки фирмы на выполнение всех пяти заказов = 228 тыс. руб.

2. Следует поручить Малкину Программу 5.

3. Следует поручить Залкинду Программу 1.

4. Не получит заказ программист Галкин.

5. Общие минимальные издержки = 351 тыс. руб.

6. При новых условиях не получит заказа программист Палкин.

1.16. Пример применения методики целочисленного программирования при оптимизации производства в пищевой промышленности

Особенностью автоматизации и в дальнейшем информатизации производства в пищевой промышленности (на примере изготовления сушеных рыбных субпродуктов ООО «Северное сияние») является необходимость (особенно в случае производства экспортной продукции) соблюдения стандарта системы ISO 22000 и разработке в соответствии с общепринятой методикой ХАССП (англ. HACCP – Hazard Analysis and Critical Control Points, анализ рисков и критические точки контроля), то есть системы управления безопасностью пищевых продуктов, которая бы обеспечивала санитарный и иной контроль на всех этапах и в любой точке производственного процесса, а также хранения и реализации продукции. ХАССП, которая позволяет выпускать продукцию, соответствующую высоким европейским требования безопасности, используется практически во всех странах мира, а при поставках в США, Канаду, Новую Зеландию, Японию и ещё ряд стран внедрение ее требуется на законодательном уровне, принципы системы ХАССП были одобрены международными организациями ООН и ЕС.

Таким образом, большая часть стадий функционирования бизнес-процесса в пищевой промышленности подлежит организационно-правовой регламентации (издание большого числа локальных нормативных актов организации) из которых может быть создан банк данных при создании информационной системы. При этом собственно производственный процесс, как это будет показано нами далее в статье, может занимать в регламентации не столь значительный объем. Поэтому при создании адекватной стадиям функционирования бизнес-процесса информационной системы в соответствии с [1] нами основное внимание было уделено оптимизации непосредственно технологических операций производственного процесса. Остальные стадии бизнес-процесса в пищевой промышленности достаточно жестко регламентированы как нормативными правовыми актами, так и иными нормативными актами. Документы, касающиеся транспортировки сырья и готовой продукции, выгрузки/отгрузки, экспедиции в целом уже подробно разработаны [17].

ООО «Северное сияние», как изготовитель сушеных рыбных субпродуктов, использует технологию, которая предусматривает порядок изготовления сушеной пищевой рыбной продукции – рыбы морской сушеной неразделанной и разделанной (далее по тексту – Продукт), предназначенной для реализации через розничную/оптовую торговую сеть, предприятия общественного питания для непосредственного употребления в пищу. Продукт вырабатывают в следующем ассортименте:

- треска (атлантическая, гренландская, тихоокеанская);
- минтай;
- пикша;
- путассу;
- обыкновенный судак;
- горбуша;
- зубатка (полосатая, пятнистая, дальневосточная, синяя, угревидная);
- хек (серебристый, тихоокеанский, патагонский);
- камбала (колючая, остроголовая, дальневосточная, красная, дальневосточная длинная, северная палтусовидная, беринговоморская палтусовидная, двухцветная, двухлинейная, белобрюхая, северная двухлинейная, желтопёрая, желтохвостая, сахалинская, полярная, гологоловая, орегонская, малоголовая, восточнотихоокеанская малоротая, звёздчатая, морская, жёлтая морская, пятнистая, желтополосая, японская).

Таким образом, число возможных вариантов сырья: видов рыбы разных подвидов составляет девять ($i = 9$).

Для производства Продукта должны использоваться сырьё и материалы, соответствующие ТР ЕАЭС 040/2016 «О безопасности рыбы и рыбной продукции» [13], ТР ТС 021/2011 «О безопасности пищевой продукции» [12], ТР ТС 022/2011 «Пищевая продукция в части ее маркировки» [11], ТР ТС 005/2011 «О безопасности упаковки» [14], утверждённых в установленном порядке, и признанные пригодными для пищевых целей. Не допускается использовать для приготовления Продукта сырьё животного происхождения, не прошедшее ветеринарно-санитарную экспертизу и без ветеринарных сопроводительных документов установленной формы. Используемое сырье и материалы должны быть не ниже 1 сорта (при наличии сортов).

Для изготовления Продукта используют следующее сырьё и материалы:

- Рыбу-сырец (свежую) по нормативно-технической документации изготовителя, разрешенную к применению органами и учреждениями Роспотребнадзора и Департаментом ветеринарии Минсельхоза России;

- Охлажденную пищевую рыбную продукцию - рыбу мелкую охлажденную по ГОСТ 32004 [4], или отечественного/импортного производства по нормативно-технической документации изготовителя, разрешенную к применению органами и учреждениями Роспотребнадзора и Департаментом ветеринарии Минсельхоза России;
- Охлажденную пищевую рыбную продукцию – рыбу3 охлажденную по ГОСТ 814 [7], или отечественного/импортного производства по нормативно-технической документации изготовителя, разрешенную к применению органами и учреждениями Роспотребнадзора и Департаментом ветеринарии Минсельхоза России;
- Мороженую пищевую рыбную продукцию - рыбу мелкую мороженую по ГОСТ 32744 [6], или отечественного/импортного производства по нормативно-технической документации изготовителя, разрешенную к применению органами и учреждениями Роспотребнадзора и Департаментом ветеринарии Минсельхоза России;
- Мороженую пищевую рыбную продукцию - рыбу мороженую по ГОСТ 32366 [5], или отечественного/импортного производства по нормативно-технической документации изготовителя, разрешенную к применению органами и учреждениями Роспотребнадзора и Департаментом ветеринарии Минсельхоза России;
- Воду питьевую по ГОСТ Р 51232 [8], СанПиН 2.1.4.1074-01[10];
- Соль поваренную пищевую выварочную или каменную, садочную, самосадочную, помолов №№ 0, 1, 2, не ниже первого сорта по ГОСТ Р 51574 [9];
- Соль морскую отечественного или импортного производства по нормативно-технической документации изготовителя, разрешенную к применению органами и учреждениями Роспотребнадзора.

Сырьё может быть сертифицировано на соответствие другим действующим нормативным документам (ГОСТам, ОСТам, ТУ, СТО), зарегистрированным должным порядком. Также может использоваться аналогичное сырьё импортного производства, с характеристиками, позволяющими получать продукт, отвечающий требованиям настоящих технических условий, и разрешённое к применению органами и учреждениями Роспотребнадзора. Расход сырья устанавливается в размере 100,5% от содержания каждого компонента в конечном продукте. Потери при производстве определяются опытным путём в зависимости от используемого оборудования и способа производства, но не более 5%. Сырье поступает один раз в десять календарных дней (три раза в месяц при принятии его длинны в 30 дней – выравнивание по календарным месяцам производится за счет 31 дня месяца). Таким образом, поставка сырья в массе 6000 кг производится в большинстве случаев каждые 1, 11, 21 числа месяца и на автоматизацию процесса производства влияние не оказывает. Соответственно ограничение цикла производства готовой продукции (до упаковки) составляет 10 суток или 240 часов.

Технологический процесс осуществляется в следующей последовательности:

1. Входной контроль, приёмка, осмотр, хранение и подготовка сырья и материалов.

Входной контроль сырья и материалов, используемых для выработки продуктов, осуществляется в соответствии с программой производственного контроля (далее - ППК), документацией системы ХАССП, утверждёнными руководителем предприятия в установленном порядке, приёмка производится по показателям качества в соответствии с нормативно-технической документацией (НТД) поставщика.

Входной контроль каждой партии сырья и материалов включает:

- контроль наличия и правильности оформления сопроводительных документов;

- оценка качества упаковки и маркировки на соответствие требованиям действующей на данное сырьё нормативной документации;

- визуальный осмотр и органолептическую оценку на соответствие их требованиям действующей НТД.

Не допускается использование в производстве сырья и материалов в случае:

- отсутствия или неправильного оформления на них сопроводительных документов;

- просроченного срока годности/хранения;

- не соответствия требованиям НТД.

Данные о количестве и качестве сырья, состояния упаковки, маркировки вносят в технологический журнал. В специальном помещении сырьё перемещают из транспортной упаковки во внутрицеховую тару. В некоторых случаях допускается хранение сырья в транспортной упаковке. Перед закладкой на хранение транспортную упаковку с сырьём очищают от поверхностных загрязнений (мешки очищают щёткой, банки – очищают щёткой и дезинфицируют). Хранят сырьё в чистых, сухих, продезинфицированных складских помещениях на стеллажах или подтоварниках на расстоянии не менее 15 см от уровня пола и на 70 см от стен со штабелями с сохранением между ними проходов шириной не менее 75 см. Не допускается хранение сырья одновременно с готовой продукцией и потребительской упаковкой для готовой продукции. Сырьё, прошедшее входной контроль и предварительную подготовку, передают во внутрицеховой таре для взвешивания всех ингредиентов. Входной контроль, приёмка, осмотр, хранение и подготовка сырья и материалов на автоматизацию производства влияния не оказывают и регламентированы ХАСПП.

2. Взвешивание ингредиентов

Все ингредиенты отвешиваются согласно рецептуре на весах в оборотную тару. Порции ингредиентов передают на участок приготовления смеси ингредиентов. Результаты взвешивания и общую массу ингредиентов регистрируют в технологическом журнале. Взвешивание ингредиентов на автоматизацию производства влияния не оказывает и регламентировано ХАСПП.

3. Подготовка сырья

Сырье, в брикетах по 10-20 кг поступает в помещение, где удаляется упаковка. Таким образом, сырье по массе каждого вида поставляется в размере не менее 10 кг (масса i-того вида рыбы >= 10) и подготовка сырья на автоматизацию производства влияния не оказывает и регламентирована ХАСПП.

4. Дефростация и промывка сырья

Сырье загружается в специальные пластиковые контейнеры, где при температуре не более $+22^{o}C$ оно дефростируется, после чего помещается в емкость конвейера для промывки, откуда автоматически транспортируется в емкость конвейера для засолки сырья. Дефростация и промывка сырья на автоматизацию производства влияния не оказывают и регламентированы ХАСПП.

5. Посол сырья и сушка соленой рыбы

Способ посола — холодный тузлучный. Рыбу общей массой 150 кг выдерживают в тузлуке (растворе воды и соли единой концентрации) в течение 15 - 60 минут в зависимости от вида рыбы (время посола вида рыбы в часах = var 0,25 -:- 1,0 и дискретно).

После посола рыба перекладывается на специальные решетки, которые ставятся друг на друга, а затем загружаются в сушильные камеры. Сушка производится в течение 6 - 8 суток при разной в зависимости от вида рыбы температуре (время сушки соленой рыбы в часах = var 144 -:- 192 и дискретно).

Таким образом, собственно производство Продукта состоит из двух операций: посола и сушки, которые зависят от технологии производства, регламентированной в рамках представленных выше в данном пункте общих данных конкретным видом рыбы. Данные представлены в таблице 1, но так как в отношении собственно технологии производства каждого вида Продукта введен режим коммерческой тайны, виды рыб сырья представлены по номерам i соответственно от 1 до 9.

6. Контроль качества готовой продукции

Из партии готовой продукции отбирают среднюю пробу и производят выходной контроль качества. После получения положительного результата анализа по всем показателям НТД Продукт поступает на склад готовой продукции. Контроль качества готовой продукции на автоматизацию производства влияния не оказывает и регламентирован ХАСПП.

7. Фасовка и упаковывание готовой продукции в потребительскую упаковку, маркирование и упаковывание в транспортную упаковку.

После сушки рыба перемещается в цех фасовки, где равномерными порциями фасуется в потребительскую упаковку, маркируется и упаковывается в транспортную упаковку (при необходимости). Фасовка и упаковывание готовой продукции в потребительскую упаковку, маркирование и упаковывание в транспортную упаковку на автоматизацию производства влияния не оказывают и регламентированы ХАСПП.

8. Складирование и хранение готовой продукции

Продукт хранят в сухих чистых, предназначенных под склады готовой продукции, помещениях при температуре хранения не выше +20 ^{o}C и относительной влажности воздуха не более 75%. Складирование и хранение готовой продукции на автоматизацию производства влияния не оказывают и регламентированы ХАСПП.

9. Переработка некондиционной продукции и утилизация отходов

Продукция, не прошедшая по физико-химическим и органолептическим показателям, подлежит уничтожению путём придания ей не товарного вида (измельчения) и последующей утилизации через специализированные организации. Твёрдые отходы, образующиеся в процессе производства, собирают в контейнеры. Вывоз мусора из контейнеров осуществляет специализированная организация. Жидких отходов в процессе производства не образуется. Переработка некондиционной продукции и утилизация отходов на автоматизацию производства влияния не оказывают и регламентированы ХАСПП.

10. Экспедиция готовой продукции

Продукт транспортируют при температуре хранения не выше +20°С и относительной влажности воздуха не более 75%. Экспедиция готовой продукции на автоматизацию производства влияния не оказывает и частично регламентирована ХАСПП.

Разработка математической модели оптимизации производства базировалась на математическом аппарате, общий вид которого представлен в [3], а методически описан в [2]. При этом учитывая меньшую сложность организации производства по сравнению с машиностроительным предприятием, в том числе отсутствие дискретности и многооперационности производственного процесса, но в тоже время наличие периодичности производственного процесса, состоящего из двух непрерывных основных операций, предполагается использовать алгоритм осуществления интеграции подсистемы диспетчирования с учетной системой организации: рисунок 2 из [16] с последующим написанием и защитой программы для ЭВМ для действующего производства в соответствии с описанным в [15].

Таблица 1.16.1

Технические характеристики посола сырья и сушки соленой рыбы

Вид сырья	Время посола 1 порции 150 кг, часы	Сушка соленой рыбы		Время посола 6000 кг одного вила сырья, часы	Время посола и сушки 6000 кг одного вила сырья, часы	Соответствие условию при одном виде сырья, часы
		Температура, град Цельсия	Время, часы			
1	0,25	22	192	10	202	Менее 240
2	0,25	22	168	10	178	Менее 240
3	0,25	27	144	10	154	Менее 240
4	0,5	22	192	20	212	Менее 240
5	0,5	22	168	20	188	Менее 240
6	0,5	27	144	20	164	Менее 240
7	1,0	22	192	40	232	Менее 240
8	1,0	22	168	40	208	Менее 240
9	1,0	27	144	40	184	Менее 240

Из таблицы 1.16.1 видно, что вырожденный случай наличия на складе только одного вида рыбы позволяет провести без оптимизации производственный процесс полностью. В действительности ситуация обычно иная и в улове присутствуют разные виды рыбы. В то же время хранение на складе сырья как минимум одного улова позволяет проводить оптимизацию, как производственного процесса, так и хранения. Оптимизация решает задачу подбора оптимального количества рыбы разных видов для разовой обработки 6000 кг при существующих ограничениях:

1) однократно конвейер позволяет осуществлять посол 150 кг рыбы, поэтому за переменную х берется относительное значение, равное массе вида рыбы на складе деленное на 150 кг и первоначальный расчет производится целочисленно без учета остатков менее 150 кг на складе;

2) ограничения по массе перерабатываемой однократно рыбы равно 6000 кг деленное на 150 кг, то есть 40: сумма x по всем i (то есть видам рыб) равна 40;

3) масса каждого вида рыбы на складе ограничена сверху его наличием на складе. В том случае если на складе 6000 кг конкретного вида рыбы и более ограничение не вводится в силу уже имеющегося ограничения пункта 2;

4) масса каждого вида рыбы на складе может быть ограничена снизу в силу тех или иных технологических, санитарных, логистических и иных причин. Если нижняя граница массы вида рыбы не задается, значит, имеется возможность использования всей находящейся на складе рыбы данного вида;

5) количество времени на посол 6000 кг рыбы в обычных условиях ограничено двумя сутками, то есть 48 часами. Это происходит при работе в 3 смены в сутки двумя работниками в смену, то есть 6 работниками в сутки. Поэтому в обычных условиях вводится только ограничение на время посола 6000 кг рыбы. В случае когда кто-то из работников не работает в силу нахождения в отпуске, болезни, недопуска по санитарным причинам и т.п. вводится дополнительное ограничение на время сушки просуммированное с временем посола в различных вариациях последовательности посола тех или иных видов рыбы (первая группа таблицы 1 виды 1. 2, 3; вторая группа таблицы 1 виды 4, 5, 6; третья группа таблицы 1 виды 7, 8, 9). В этом случае модель определяет не только массу каждого вида рыбы, но и оптимальную (а иногда и единственно возможную) последовательность посола и сушки;

6) по каждому виду рыбы нормирована норма прибыли в зависимости от функции спроса на каждый конкретный Продукт в зависимости от вида

рыбы. Его определение в основном зависит от маркетинговых исследований: понятно, что норма прибыли на виды рыб с названием минтай или путассу в России минимальна, а камбала максимальна.

Конкретная задача ситуации на 01.12.2017. представлена в таблице 1.16.2. Количество работников равно 6 поэтому ограничение по сушке в данном случае не вводилось. Остатки (то есть превышение массы вида рыбы над значением кратным 150 кг) видов рыб 1 и 3 с одинаковым временем посола в 0,25 часа суммарно менее 150 кг, поэтому в дальнейшем они не учитывались. Остатки видов рыб 8 и 9 с одинаковым временем посола в 1,0 часа суммарно более 150 кг, поэтому их наличие было учтено на втором шаге оптимизации, то есть N = 2.

Таблица 1.16.2

Исходные данные оптимизационной задачи от 01.12.2017.

Вид сырья	Масса вида рыбы на складе				Норма прибыли	Переменная
	Ограничение сверху		Ограничение снизу			
	кг	кг / 150кг	кг	кг / 150кг		
1			900	6	2	x_1
3	1800	12	600	4	4	x_2
5	2400	16	300	2	5	x_3
8			2100	14	1	x_4
9	3000	20	1500	10	3	x_5

Решим прямую задачу линейного программирования симплексным методом, с использованием симплексной таблицы. Определим максимальное значение целевой функции $F(X) = 2x_1+4x_2+5x_3+x_4+3x_5$ при следующих условиях-ограничениях.

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=40$

$0.25x_1+0.25x_2+0.5x_3+x_4+x_5\leq 48$

$x_1 \geq 6$

$x_2 \geq 4$

$x_3 \geq 2$

$x_4 \geq 14$

$x_5 \geq 10$

$x_2 \leq 12$

$x_3 \leq 16$

$x_5 \leq 20$

Для построения первого опорного плана систему неравенств приведем к системе уравнений путем введения дополнительных переменных (переход к канонической форме):

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 40$

$0.25x_1+0.25x_2+0.5x_3+x_4+x_5+x_6 = 48$

$x_1-x_7 = 6$

$x_2-x_8 = 4$

$x_3-x_9 = 2$

$x_4-x_{10} = 14$

$x_5-x_{11} = 10$

$x_2+x_{12} = 12$

$x_3+x_{13} = 16$

$x_5+x_{14} = 20$

В качестве базисных переменных принимаем X = (5,6,7,8,9,10,11,12,13,14).

Выразим базисные переменные через остальные:

$x_5 = -x_1-x_2-x_3-x_4+40$

$x_6 = 0.75x_1+0.75x_2+0.5x_3+8$

$x_7 = x_1-6$

$x_8 = x_2-4$

$x_9 = x_3-2$

$x_{10} = x_4-14$

$x_{11} = -x_1-x_2-x_3-x_4+30$

$x_{12} = -x_2+12$

$x_{13} = -x_3+16$

$x_{14} = x_1+x_2+x_3+x_4-20$

Подставим их в целевую функцию:

$F(X) = 2x_1+4x_2+5x_3+x_4+3(-x_1-x_2-x_3-x_4+40)$

или

$F(X) = -x_1+x_2+2x_3-2x_4+120$

Среди свободных членов b_i имеются отрицательные значения, следовательно, полученный базисный план не является опорным. Вместо переменной x_{14} следует ввести переменную x_1. Выполняем преобразования симплексной таблицы методом Жордано-Гаусса.

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
x_5	20	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
x_6	23	0	0	0.25	0.75	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-0.75
x_7	14	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1
x_8	-4	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
x_9	-2	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
x_{10}	-14	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
x_{11}	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
x_{12}	12	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
x_{13}	16	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
x_1	20	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1
F(X0)	140	0	2	3	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1

Среди свободных членов b_i имеются отрицательные значения, следовательно, полученный базисный план не является опорным. Вместо переменной x_{10} следует ввести переменную x_4. Выполняем преобразования симплексной таблицы методом Жордано-Гаусса.

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
x_5	20	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
x_6	12.5	0	0	0.25	0	0	1	0	0	0	0.75	0	0	0	-0.75
x_7	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	-1
x_8	-4	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
x_9	-2	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
x_4	14	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0
x_{11}	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
x_{12}	12	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
x_{13}	16	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
x_1	6	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1
F(X1)	154	0	2	3	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	-1

Среди свободных членов b_i имеются отрицательные значения, следовательно, полученный базисный план не является опорным. Вместо переменной x_8 следует ввести переменную x_2. Выполняем преобразования симплексной таблицы методом Жордано-Гаусса.

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
x_5	20	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
x_6	12.5	0	0	0.25	0	0	1	0	0	0	0.75	0	0	0	-0.75
x_7	-4	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	-1
x_2	4	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
x_9	-2	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
x_4	14	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0
x_{11}	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
x_{12}	8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
x_{13}	16	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
x_1	2	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	-1
F(X2)	146	0	0	3	0	0	0	0	2	0	-1	0	0	0	-1

Среди свободных членов b_i имеются отрицательные значения, следовательно, полученный базисный план не является опорным. Вместо переменной x_7 следует ввести переменную x_{14}. Выполняем преобразования симплексной таблицы методом Жордано-Гаусса.

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
x_5	16	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0
x_6	15.5	0	0	-0.5	0	0	1	-0.75	-0.75	0	0	0	0	0	0
x_{14}	4	0	0	-1	0	0	0	-1	-1	0	-1	0	0	0	1
x_2	4	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
x_9	-2	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
x_4	14	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0
x_{11}	6	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0
x_{12}	8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
x_{13}	16	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
x_1	6	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
F(X3)	150	0	0	2	0	0	0	-1	1	0	-2	0	0	0	0

Среди свободных членов b_i имеются отрицательные значения, следовательно, полученный базисный план не является опорным. Вместо переменной x_9 следует ввести переменную x_3. Выполняем преобразования симплексной таблицы методом Жордано-Гаусса.

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
x_5	14	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0
x_6	16.5	0	0	0	0	0	1	-0.75	-0.75	-0.5	0	0	0	0	0
x_{14}	6	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1	0	0	0	1
x_2	4	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
x_3	2	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0
x_4	14	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0
x_{11}	4	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0
x_{12}	8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
x_{13}	14	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
x_1	6	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
F(X4)	146	0	0	0	0	0	0	-1	1	2	-2	0	0	0	0

Теперь среди свободных членов b_i нет отрицательных значений. Выразим базисные переменные через остальные:

$x_5 = -x_7-x_8-x_9-x_{10}+14$

$x_6 = 0.75x_7+0.75x_8+0.5x_9+16.5$

$x_{14} = x_7+x_8+x_9+x_{10}+6$

$x_2 = x_8+4$

$x_3 = x_9+2$

$x_4 = x_{10}+14$

$x_{11} = -x_7-x_8-x_9-x_{10}+4$

$x_{12} = -x_8+8$

$x_{13} = -x_9+14$

$x_1 = x_7+6$

Подставим их в целевую функцию:

$F(X) = 2(x_7+6)+4(x_8+4)+5(x_9+2)+(x_{10}+14)+3(-x_7-x_8-x_9-x_{10}+14)$

или

$F(X) = -x_7+x_8+2x_9-2x_{10}+94$

$x_5+x_7+x_8+x_9+x_{10}=14$

$x_6-0.75x_7-0.75x_8-0.5x_9=16.5$

$-x_7-x_8-x_9-x_{10}+x_{14}=6$

$x_2-x_8=4$

$x_3-x_9=2$

$x_4-x_{10}=14$

$x_7+x_8+x_9+x_{10}+x_{11}=4$

$x_8+x_{12}=8$

$x_9+x_{13}=14$

$x_1-x_7=6$

Решим прямую задачу линейного программирования симплексным методом, с использованием симплексной таблицы.

Определим максимальное значение целевой функции $F(X) = 2x_1+4x_2+5x_3+x_4+3x_5$ при следующих условиях-ограничений.

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=40$

$0.25x_1+0.25x_2+{}^1/_2x_3+x_4+x_5\leq48$

$x_1\geq6$

$x_2\geq4$

$x_3 \geq 2$

$x_4 \geq 14$

$x_5 \geq 10$

$x_2 \leq 12$

$x_3 \leq 16$

$x_5 \leq 20$

Для построения первого опорного плана систему неравенств приведем к системе уравнений путем введения дополнительных переменных (**переход к канонической форме**).

В 2-м неравенстве смысла (≤) вводим базисную переменную x_6. В 3-м неравенстве смысла (≥) вводим базисную переменную x_7 со знаком минус. В 4-м неравенстве смысла (≥) вводим базисную переменную x_8 со знаком минус. В 5-м неравенстве смысла (≥) вводим базисную переменную x_9 со знаком минус. В 6-м неравенстве смысла (≥) вводим базисную переменную x_{10} со знаком минус. В 7-м неравенстве смысла (≥) вводим базисную переменную x_{11} со знаком минус. В 8-м неравенстве смысла (≤) вводим базисную переменную x_{12}. В 9-м неравенстве смысла (≤) вводим базисную переменную x_{13}. В 10-м неравенстве смысла (≤) вводим базисную переменную x_{14}.

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 40$

$0.25x_1+0.25x_2+{}^1/_2x_3+x_4+x_5+x_6 = 48$

$x_1-x_7 = 6$

$x_2-x_8 = 4$

$x_3-x_9 = 2$

$x_4-x_{10} = 14$

$x_5-x_{11} = 10$

$x_2+x_{12} = 12$

$x_3+x_{13} = 16$

$x_5+x_{14} = 20$

Расширенная матрица системы ограничений-равенств данной задачи:

1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	40
0.25	0.25	$^{1}/_{2}$	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	48
1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	6
0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	4
0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	2
0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	14
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	10
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	12
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	16
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	20

Приведем систему к единичной матрице методом жордановских преобразований.

1. В качестве базовой переменной можно выбрать x_6.

2. В качестве базовой переменной можно выбрать x_7.

Получаем новую матрицу:

1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	40
0.25	0.25	$^{1}/_{2}$	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	48
-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-6
0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	4
0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	2
0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	14
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	10
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	12
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	16
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	20

3. В качестве базовой переменной можно выбрать x_8.

Получаем новую матрицу:

1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	40
0.25	0.25	$^{1}/_{2}$	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	48
-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-6
0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-4
0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	2
0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	14
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	10

0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	12
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	16
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	20

4. В качестве базовой переменной можно выбрать x_9.
Получаем новую матрицу:

1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	40
0.25	0.25	$^1/_2$	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	48
-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-6
0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-4
0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-2
0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	14
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	10
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	12
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	16
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	20

5. В качестве базовой переменной можно выбрать x_{10}.
Получаем новую матрицу:

1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	40
0.25	0.25	$^1/_2$	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	48
-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-6
0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-4
0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-2
0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-14
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	10
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	12
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	16
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	20

6. В качестве базовой переменной можно выбрать x_{11}.
Получаем новую матрицу:

1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	40
0.25	0.25	$^1/_2$	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	48
-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-6
0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-4
0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-2
0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-14
0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-10
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	12
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	16
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	20

7. В качестве базовой переменной можно выбрать x_{12}.

8. В качестве базовой переменной можно выбрать x_{13}.

9. В качестве базовой переменной можно выбрать x_{14}.

10. В качестве базовой переменной можно выбрать x_5.

Разрешающий элемент РЭ=1. Строка, соответствующая переменной x_1, получена в результате деления всех элементов строки x_5 на разрешающий элемент РЭ=1. На месте разрешающего элемента получаем 1. В остальных клетках столбца x_1 записываем нули.

Все остальные элементы определяются по правилу прямоугольника.

Для этого выбираем из старого плана четыре числа, которые расположены в вершинах прямоугольника и всегда включают разрешающий элемент РЭ.

НЭ = СЭ - (А*В)/РЭ

СТЭ - элемент старого плана, РЭ - разрешающий элемент (1), А и В - элементы старого плана, образующие прямоугольник с элементами СТЭ и РЭ.

Представим расчет каждого элемента в виде таблицы:

1 : 1	1 : 1	1 : 1	1 : 1	1 : 1	0 : 1	0 : 1	0 : 1	0 : 1	0 : 1	0 : 1	0 : 1	0 : 1	0 : 1	40 : 1
0.25	0.25	$^1/_2$-(1 • 1):1	1-(1 • 1):1	1-(1 • 1):1	1-(0 • 1):1	0-(0 • 1):1	0-(0 • 1):1	0-(0 • 1):1	0-(0 • 1):1	0-(0 • 1):1	0-(0 • 1):1	0-(0 • 1):1	0-(0 • 1):1	48-(40 • 1):1
-1-(1 • 0):1	0-(1 • 0):1	0-(1 • 0):1	0-(1 • 0):1	0-(1 • 0):1	0-(0 • 0):1	1-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1	-6-(40 • 0):1
0-(1 • 0):1	-1-(1 • 0):1	0-(1 • 0):1	0-(1 • 0):1	0-(1 • 0):1	0-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1	1-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1	-4-(40 • 0):1
0-(1 • 0):1	0-(1 • 0):1	-1-(1 • 0):1	0-(1 • 0):1	0-(1 • 0):1	0-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1	1-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1	-2-(40 • 0):1
0-(1 • 0):1	0-(1 • 0):1	0-(1 • 0):1	-1-(1 • 0):1	0-(1 • 0):1	0-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1	1-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1	-14-(40 • 0):1
0-(1 • -1):1	0-(1 • -1):1	0-(1 • -1):1	0-(1 • -1):1	-1-(1 • -1):1	0-(0 • -1):1	0-(0 • -1):1	0-(0 • -1):1	0-(0 • -1):1	0-(0 • -1):1	1-(0 • -1):1	0-(0 • -1):1	0-(0 • -1):1	0-(0 • -1):1	-10-(40 • -1):1
0-(1 • 0):1	1-(1 • 0):1	0-(1 • 0):1	0-(1 • 0):1	0-(1 • 0):1	0-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1	1-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1	12-(40 • 0):1
0-(1 • 0):1	0-(1 • 0):1	1-(1 • 0):1	0-(1 • 0):1	0-(1 • 0):1	0-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1	1-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1	16-(40 • 0):1
0-(1 • 1):1	0-(1 • 1):1	0-(1 • 1):1	0-(1 • 1):1	1-(1 • 1):1	0-(0 • 1):1	0-(0 • 1):1	0-(0 • 1):1	0-(0 • 1):1	0-(0 • 1):1	0-(0 • 1):1	0-(0 • 1):1	0-(0 • 1):1	1-(0 • 1):1	20-(40 • 1):1

Получаем новую матрицу:

1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	40
-0.75	-0.75	$^{-1}/_2$	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	8
-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-6
0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-4
0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-2
0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-14
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	30
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	12
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	16
-1	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-20

Поскольку в системе имеется единичная матрица, то в качестве базисных переменных принимаем X = (5,6,7,8,9,10,11,12,13,14).

Выразим базисные переменные через остальные:

$x_5 = -x_1-x_2-x_3-x_4+40$

$x_6 = 0.75x_1+0.75x_2+{}^1/_2x_3+8$

$x_7 = x_1-6$

$x_8 = x_2-4$

$x_9 = x_3-2$

$x_{10} = x_4-14$

$x_{11} = -x_1-x_2-x_3-x_4+30$

$x_{12} = -x_2+12$

$x_{13} = -x_3+16$

$x_{14} = x_1+x_2+x_3+x_4-20$

Подставим их в целевую функцию:

$F(X) = 2x_1+4x_2+5x_3+x_4+3(-x_1-x_2-x_3-x_4+40)$

или

$F(X) = -x_1+x_2+2x_3-2x_4+120$

Среди свободных членов b_i имеются отрицательные значения, следовательно, полученный базисный план не является опорным.

Вместо переменной x_{14} следует ввести переменную x_1.

Выполняем преобразования симплексной таблицы методом Жордано-Гаусса.

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
x_5	20	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
x_6	23	0	0	0.25	0.75	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-0.75
x_7	14	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1
x_8	-4	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
x_9	-2	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
x_{10}	-14	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
x_{11}	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
x_{12}	12	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
x_{13}	16	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
x_1	20	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1
F(X0)	140	0	2	3	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1

Представим расчет каждого элемента в виде таблицы:

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
40-(-20 • 1):-1	1-(-1 • 1):-1	1-(-1 • 1):-1	1-(-1 • 1):-1	1-(-1 • 1):-1	1-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(1 • 1):-1
8	-0.75	-0.75	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
-6-(-20 • -1):-1	-1-(-1 • -1):-1	0-(-1 • -1):-1	0-(-1 • -1):-1	0-(-1 • -1):-1	0-(0 • -1):-1	0-(0 • -1):-1	1-(0 • -1):-1	0-(0 • -1):-1	0-(0 • -1):-1	0-(0 • -1):-1	0-(0 • -1):-1	0-(0 • -1):-1	0-(0 • -1):-1	0-(1 • -1):-1
-4-(-20 • 0):-1	0-(-1 • 0):-1	-1-(-1 • 0):-1	0-(-1 • 0):-1	0-(-1 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	1-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(1 • 0):-1
-2-(-20 • 0):-1	0-(-1 • 0):-1	0-(-1 • 0):-1	-1-(-1 • 0):-1	0-(-1 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	1-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(1 • 0):-1
-14-(-20 • 0):-1	0-(-1 • 0):-1	0-(-1 • 0):-1	0-(-1 • 0):-1	-1-(-1 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	1-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(1 • 0):-1
30-(-20 • 1):-1	1-(-1 • 1):-1	1-(-1 • 1):-1	1-(-1 • 1):-1	1-(-1 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	1-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(1 • 1):-1
12-(-20 • 0):-1	0-(-1 • 0):-1	1-(-1 • 0):-1	0-(-1 • 0):-1	0-(-1 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	1-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(1 • 0):-1
16-(-20 • 0):-1	0-(-1 • 0):-1	0-(-1 • 0):-1	1-(-1 • 0):-1	0-(-1 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	1-(0 • 0):-1	0-(1 • 0):-1
-20 : -1	-1 : -1	-1 : -1	-1 : -1	-1 : -1	0 : -1	0 : -1	0 : -1	0 : -1	0 : -1	0 : -1	0 : -1	0 : -1	0 : -1	1 : -1

Среди свободных членов b_i имеются отрицательные значения, следовательно, полученный базисный план не является опорным.

Вместо переменной x_{10} следует ввести переменную x_4.

Выполняем преобразования симплексной таблицы методом Жордано-Гаусса.

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
x_5	20	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
x_6	12.5	0	0	0.25	0	0	1	0	0	0	0.75	0	0	0	-0.75
x_7	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	-1
x_8	-4	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
x_9	-2	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
x_4	14	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0
x_{11}	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
x_{12}	12	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
x_{13}	16	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
x_1	6	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1
F(X1)	154	0	2	3	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	-1

Представим расчет каждого элемента в виде таблицы:

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
20-(-14 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(-1 • 0):-1	1-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(1 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	1-(0 • 0):-1
23	0	0	0.25	0.75	0	1	0	0	0	0	0	0	0	-0.75
14-(-14 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	1-(0 • 1):-1	1-(0 • 1):-1	1-(-1 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	1-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(1 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	-1-(0 • 1):-1
-4-(-14 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	-1-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(-1 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	1-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(1 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1
-2-(-14 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	-1-(0 • 0):-1	0-(-1 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	1-(0 • 0):-1	0-(1 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1
-14 : -1	0 : -1	0 : -1	0 : -1	-1 : -1	0 : -1	0 : -1	0 : -1	0 : -1	0 : -1	1 : -1	0 : -1	0 : -1	0 : -1	0 : -1
10-(-14 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(-1 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(1 • 0):-1	1-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	1-(0 • 0):-1
12-(-14 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	1-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(-1 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(1 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	1-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1
16-(-14 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	1-(0 • 0):-1	0-(-1 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(1 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	1-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1
20-(-14 • 1):-1	1-(0 • 1):-1	1-(0 • 1):-1	1-(0 • 1):-1	1-(-1 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(1 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	-1-(0 • 1):-1

Среди свободных членов b_i имеются отрицательные значения, следовательно, полученный базисный план не является опорным.

Вместо переменной x_8 следует ввести переменную x_2.

Выполняем преобразования симплексной таблицы методом Жордано-Гаусса.

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
x_5	20	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
x_6	12.5	0	0	0.25	0	0	1	0	0	0	0.75	0	0	0	-0.75
x_7	-4	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	-1
x_2	4	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
x_9	-2	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
x_4	14	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0
x_{11}	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
x_{12}	8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
x_{13}	16	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
x_1	2	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	-1
F(X2)	146	0	0	3	0	0	0	0	2	0	-1	0	0	0	-1

Представим расчет каждого элемента в виде таблицы:

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
20-(-4 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(-1 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	1-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(1 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	1-(0 • 0):-1
12.5	0-(0 • 0):-1	0-(-1 • 0):-1	0.25	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	1-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(1 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0.75	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	-0.75
0-(-4 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	1-(-1 • 1):-1	1-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	1-(0 • 1):-1	0-(1 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	1-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	-1-(0 • 1):-1
-4 : -1	0 : -1	-1 : -1	0 : -1	0 : -1	0 : -1	0 : -1	0 : -1	1 : -1	0 : -1	0 : -1	0 : -1	0 : -1	0 : -1	0 : -1
-2-(-4 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(-1 • 0):-1	-1-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(1 • 0):-1	1-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1
14-(-4 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(-1 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	1-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(1 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	-1-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1
10-(-4 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(-1 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(1 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	1-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	1-(0 • 0):-1
12-(-4 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	1-(-1 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(1 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	1-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1
16-(-4 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(-1 • 0):-1	1-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(1 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	1-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1
6-(-4 • 1):-1	1-(0 • 1):-1	1-(-1 • 1):-1	1-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(1 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	1-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	-1-(0 • 1):-1

Среди свободных членов b_i имеются отрицательные значения, следовательно, полученный базисный план не является опорным.

Вместо переменной x_7 следует ввести переменную x_{14}.

Выполняем преобразования симплексной таблицы методом Жордано-Гаусса.

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
x_5	16	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0
x_6	15.5	0	0	-0.5	0	0	1	-0.75	-0.75	0	0	0	0	0	0
x_{14}	4	0	0	-1	0	0	0	-1	-1	0	-1	0	0	0	1
x_2	4	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
x_9	-2	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
x_4	14	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0
x_{11}	6	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0
x_{12}	8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
x_{13}	16	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
x_1	6	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
F(X3)	150	0	0	2	0	0	0	-1	1	0	-2	0	0	0	0

Представим расчет каждого элемента в виде таблицы:

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
20-(-4 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(1 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	1-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(1 • 1):-1	0-(1 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(1 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	1-(-1 • 1):-1
12.5	0	0	0.25	0	0	1	0	0	0	0.75	0	0	0	-0.75
-4 : -1	0 : -1	0 : -1	1 : -1	0 : -1	0 : -1	0 : -1	1 : -1	1 : -1	0 : -1	1 : -1	0 : -1	0 : -1	0 : -1	-1 : -1
4-(-4 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	1-(0 • 0):-1	0-(1 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(1 • 0):-1	-1-(1 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(1 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(-1 • 0):-1
-2-(-4 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	-1-(1 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(1 • 0):-1	0-(1 • 0):-1	1-(0 • 0):-1	0-(1 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(-1 • 0):-1
14-(-4 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(1 • 0):-1	1-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(1 • 0):-1	0-(1 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	-1-(1 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(-1 • 0):-1
10-(-4 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(1 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(1 • 1):-1	0-(1 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(1 • 1):-1	1-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	1-(-1 • 1):-1
8-(-4 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(1 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(1 • 0):-1	1-(1 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(1 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	1-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(-1 • 0):-1
16-(-4 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	1-(1 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(1 • 0):-1	0-(1 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(1 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	1-(0 • 0):-1	0-(-1 • 0):-1
2-(-4 • -1):-1	1-(0 • -1):-1	0-(0 • -1):-1	1-(1 • -1):-1	0-(0 • -1):-1	0-(0 • -1):-1	0-(0 • -1):-1	0-(1 • -1):-1	1-(1 • -1):-1	0-(0 • -1):-1	1-(1 • -1):-1	0-(0 • -1):-1	0-(0 • -1):-1	0-(0 • -1):-1	-1-(-1 • -1):-1

Среди свободных членов b_i имеются отрицательные значения, следовательно, полученный базисный план не является опорным.

Вместо переменной x_9 следует ввести переменную x_3.

Выполняем преобразования симплексной таблицы методом Жордано-Гаусса.

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
x_5	14	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0
x_6	16.5	0	0	0	0	0	1	-0.75	-0.75	-0.5	0	0	0	0	0
x_{14}	6	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1	0	0	0	1
x_2	4	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
x_3	2	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0
x_4	14	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0
x_{11}	4	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0
x_{12}	8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
x_{13}	14	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
x_1	6	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
F(X4)	146	0	0	0	0	0	0	-1	1	2	-2	0	0	0	0

Представим расчет каждого элемента в виде таблицы:

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
16-(-2 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	1-(-1 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	1-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	1-(0 • 1):-1	1-(0 • 1):-1	0-(1 • 1):-1	1-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1
15.5	0	0	-0.5	0	0	1	-0.75	-0.75	0	0	0	0	0	0
4-(-2 • -1):-1	0-(0 • -1):-1	0-(0 • -1):-1	-1-(-1 • -1):-1	0-(0 • -1):-1	0-(0 • -1):-1	0-(0 • -1):-1	-1-(0 • -1):-1	-1-(0 • -1):-1	0-(1 • -1):-1	-1-(0 • -1):-1	0-(0 • -1):-1	0-(0 • -1):-1	0-(0 • -1):-1	1-(0 • -1):-1
4-(-2 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	1-(0 • 0):-1	0-(-1 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	-1-(0 • 0):-1	0-(1 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1
-2 : -1	0 : -1	0 : -1	-1 : -1	0 : -1	0 : -1	0 : -1	0 : -1	0 : -1	1 : -1	0 : -1	0 : -1	0 : -1	0 : -1	0 : -1
14-(-2 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(-1 • 0):-1	1-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(1 • 0):-1	-1-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1
6-(-2 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	1-(-1 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	1-(0 • 1):-1	1-(0 • 1):-1	0-(1 • 1):-1	1-(0 • 1):-1	1-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1
8-(-2 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(-1 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	1-(0 • 0):-1	0-(1 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	1-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1
16-(-2 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	1-(-1 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(1 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1	1-(0 • 1):-1	0-(0 • 1):-1
6-(-2 • 0):-1	1-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(-1 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	-1-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(1 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1	0-(0 • 0):-1

Выразим базисные переменные через остальные:
$x_5 = -x_7-x_8-x_9-x_{10}+14$
$x_6 = 0.75x_7+0.75x_8+0.5x_9+16.5$
$x_{14} = x_7+x_8+x_9+x_{10}+6$
$x_2 = x_8+4$
$x_3 = x_9+2$
$x_4 = x_{10}+14$
$x_{11} = -x_7-x_8-x_9-x_{10}+4$
$x_{12} = -x_8+8$
$x_{13} = -x_9+14$
$x_1 = x_7+6$
Подставим их в целевую функцию:
$F(X) = 2(x_7+6)+4(x_8+4)+5(x_9+2)+(x_{10}+14)+3(-x_7-x_8-x_9-x_{10}+14)$
или
$F(X) = -x_7+x_8+2x_9-2x_{10}+94$
$x_5+x_7+x_8+x_9+x_{10}=14$
$x_6-0.75x_7-0.75x_8-0.5x_9=16.5$
$-x_7-x_8-x_9-x_{10}+x_{14}=6$
$x_2-x_8=4$
$x_3-x_9=2$
$x_4-x_{10}=14$
$x_7+x_8+x_9+x_{10}+x_{11}=4$
$x_8+x_{12}=8$
$x_9+x_{13}=14$
$x_1-x_7=6$
Матрица коэффициентов A = a(ij) этой системы уравнений имеет вид:

0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	-0.75	-0.75	-0.5	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1	0	0	0	1
0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0

Базисные переменные это переменные, которые входят только в одно уравнение системы ограничений и притом с единичным коэффициентом.
Решим систему уравнений относительно базисных переменных: x_5, x_6, x_{14}, x_2,

x_3, x_4, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_1

Полагая, что **свободные переменные** равны 0, получим первый опорный план:

X0 = (6,4,2,14,14,16.5,0,0,0,0,4,8,14,6)

Базисное решение называется допустимым, если оно неотрицательно.

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
x_5	14	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0
x_6	16.5	0	0	0	0	0	1	-0.75	-0.75	-0.5	0	0	0	0	0
x_{14}	6	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1	0	0	0	1
x_2	4	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
x_3	2	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0
x_4	14	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0
x_{11}	4	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0
x_{12}	8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
x_{13}	14	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
x_1	6	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
F(X0)	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	-2	2	0	0	0	0

Переходим к основному алгоритму симплекс-метода.

Итерация №0.

1. Проверка критерия оптимальности.

Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты.

2. Определение новой базисной переменной.

В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x_9, так как это наибольший коэффициент по модулю.

3. Определение новой свободной переменной.

Вычислим значения D_i по строкам как частное от деления: b_i / a_{i9}

и из них выберем наименьшее:

min (14 : 1 , - , - , - , - , - , 4 : 1 , - , 14 : 1 , -) = 4

Следовательно, 7-ая строка является ведущей.

Разрешающий элемент равен (1) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	min
x_5	14	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	14
x_6	16.5	0	0	0	0	0	1	-0.75	-0.75	-0.5	0	0	0	0	0	-
x_{14}	6	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1	0	0	0	1	-
x_2	4	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	-
x_3	2	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	-
x_4	14	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	-
x_{11}	4	0	0	0	0	0	0	1	1	**1**	1	1	0	0	0	**4**
x_{12}	8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	-
x_{13}	14	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	14
x_1	6	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	-
F(X1)	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	**-2**	2	0	0	0	0	0

4. Пересчет симплекс-таблицы.

Формируем следующую часть симплексной таблицы. Вместо переменной x_{11} в план 1 войдет переменная x_9.

Строка, соответствующая переменной x_9 в плане 1, получена в результате деления всех элементов строки x_{11} плана 0 на разрешающий элемент РЭ=1. На месте разрешающего элемента получаем 1. В остальных клетках столбца x_9 записываем нули.

Таким образом, в новом плане 1 заполнены строка x_9 и столбец x_9. Все остальные элементы нового плана 1, включая элементы индексной строки, определяются по правилу прямоугольника.

Для этого выбираем из старого плана четыре числа, которые расположены в вершинах прямоугольника и всегда включают разрешающий элемент РЭ.

НЭ = СЭ - (А*В)/РЭ

СТЭ - элемент старого плана, РЭ - разрешающий элемент (1), А и В - элементы старого плана, образующие прямоугольник с элементами СТЭ и РЭ.

Представим расчет каждого элемента в виде таблицы:

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
14-(4 • 1):1	0-(0 • 1):1	0-(0 • 1):1	0-(0 • 1):1	0-(0 • 1):1	1-(0 • 1):1	0-(0 • 1):1	1-(1 • 1):1	1-(1 • 1):1	1-(1 • 1):1	1-(1 • 1):1	0-(1 • 1):1	0-(0 • 1):1	0-(0 • 1):1	0-(0 • 1):1
16.5	0	0	0	0	0	1	-0.75	-0.75	-0.5	0	0	0	0	0
6-(4 • -1):1	0-(0 • -1):1	0-(0 • -1):1	0-(0 • -1):1	0-(0 • -1):1	0-(0 • -1):1	0-(0 • -1):1	-1-(1 • -1):1	-1-(1 • -1):1	-1-(1 • -1):1	-1-(1 • -1):1	0-(1 • -1):1	0-(0 • -1):1	0-(0 • -1):1	1-(0 • -1):1
4-(4 • 0):1	0-(0 • 0):1	1-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1	0-(1 • 0):1	-1-(1 • 0):1	0-(1 • 0):1	0-(1 • 0):1	0-(1 • 0):1	0-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1
2-(4 • -1):1	0-(0 • -1):1	0-(0 • -1):1	1-(0 • -1):1	0-(0 • -1):1	0-(0 • -1):1	0-(0 • -1):1	0-(1 • -1):1	0-(1 • -1):1	-1-(1 • -1):1	0-(1 • -1):1	0-(1 • -1):1	0-(0 • -1):1	0-(0 • -1):1	0-(0 • -1):1
14-(4 • 0):1	0-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1	1-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1	0-(1 • 0):1	0-(1 • 0):1	0-(1 • 0):1	-1-(1 • 0):1	0-(1 • 0):1	0-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1
4 : 1	0 : 1	0 : 1	0 : 1	0 : 1	0 : 1	0 : 1	1 : 1	1 : 1	1 : 1	1 : 1	1 : 1	0 : 1	0 : 1	0 : 1
8-(4 • 0):1	0-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1	0-(1 • 0):1	1-(1 • 0):1	0-(1 • 0):1	0-(1 • 0):1	0-(1 • 0):1	1-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1
14-(4 • 1):1	0-(0 • 1):1	0-(0 • 1):1	0-(0 • 1):1	0-(0 • 1):1	0-(0 • 1):1	0-(0 • 1):1	0-(1 • 1):1	0-(1 • 1):1	1-(1 • 1):1	0-(1 • 1):1	0-(1 • 1):1	0-(0 • 1):1	1-(0 • 1):1	0-(0 • 1):1
6-(4 • 0):1	1-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1	-1-(1 • 0):1	0-(1 • 0):1	0-(1 • 0):1	0-(1 • 0):1	0-(1 • 0):1	0-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1	0-(0 • 0):1
0-(4 • -2):1	0-(0 • -2):1	0-(0 • -2):1	0-(0 • -2):1	0-(0 • -2):1	0-(0 • -2):1	0-(0 • -2):1	1-(1 • -2):1	-1-(1 • -2):1	-2-(1 • -2):1	2-(1 • -2):1	0-(1 • -2):1	0-(0 • -2):1	0-(0 • -2):1	0-(0 • -2):1

Получаем новую симплекс-таблицу:

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
x_5	10	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0
x_6	18.5	0	0	0	0	0	1	-0.25	-0.25	0	0.5	0.5	0	0	0
x_{14}	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
x_2	4	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
x_3	6	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0
x_4	14	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0
x_9	4	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0
x_{12}	8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
x_{13}	10	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0	-1	-1	0	1	0
x_1	6	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
F(X1)	8	0	0	0	0	0	0	3	1	0	4	2	0	0	0

1. Проверка критерия оптимальности.

Среди значений индексной строки нет отрицательных. Поэтому эта таблица определяет оптимальный план задачи.

Окончательный вариант симплекс-таблицы:

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
x_5	10	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0
x_6	18.5	0	0	0	0	0	1	-0.25	-0.25	0	0.5	0.5	0	0	0
x_{14}	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
x_2	4	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
x_3	6	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0
x_4	14	0	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0
x_9	4	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0
x_{12}	8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
x_{13}	10	0	0	0	0	0	0	-1	-1	0	-1	-1	0	1	0
x_1	6	1	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
F(X2)	8	0	0	0	0	0	0	3	1	0	4	2	0	0	0

Оптимальный план можно записать так:

$x_1 = 6$, $x_2 = 4$, $x_3 = 6$, $x_4 = 14$, $x_5 = 10$

$F(X) = 2•6 + 4•4 + 5•6 + 1•14 + 3•10 = 102$

Метод Гомори.

Решение получилось целочисленным. Нет необходимости применять метод Гомори.

Оптимальный целочисленный план можно записать так:

$x_1 = 6$, $x_2 = 4$, $x_3 = 6$, $x_4 = 14$, $x_5 = 10$

$F(X) = 2•6 + 4•4 + 5•6 + 1•14 + 3•10 = 102$

На втором шаге мы проводим аналогичный расчет при дополнительном условии увеличения одного из двух (8 и 9) видов рыбы на единицу. Так как 8 вид рыбы сверху не ограничен, то увеличивается 9 вид рыбы. В данном конкретном случае, учитывая, что масса переработки и 8, и 9 видов рыбы находится на нижней границе, можно без расчета предположить, что оптимальный план не изменится, что и было подтверждено расчетом.

Таким образом, данная оптимизационная модель в виде конечного программного продукта, как часть общей информационной системы организации производства, позволяет проводить оптимизацию производственного процесса в рамках информационной системы бизнес-процесса в целом.

2. Применение аппарата теории игр и приближенных методов решения при оптимизации процессов управления наукоемким производством

2.1. Оптимизация модуля планирования производства

Разработка оптимизационной модели процесса управления наукоемкми производством описывается на реальном примере создания программного продукта для наиболее сложного и тем не менее широко распространенного в России вида промышленного производства – машиностроения. В качестве исходных данных была взята модель реально работающего производства - приборостроение для нужд Министерства обороны Российской Федерации. Данный выбор позволил учесть широкий набор требований, предъявляемых к процессу производства готовой продукции.

Кроме того такой выбор был сделан в том числе с учетом государственных интересов в области импортозамещения. Необходимость в отечественном продукте, применимом в максимально возможном спектре промышленных предприятий, как по видам, так и размерам производства, на сегодняшний день становится очевидной. Тем более, что интерес промышленных предприятий к данной тематике также значительно вырос в последнее время.

Основными этапами являются: разработка алгоритмов, проектирование программы для ЭВМ в виде программного кода, тестирование программы для ЭВМ на реально действующем машиностроительном предприятии (ОАО «ЛЕНПОЛИГРАФМАШ»). Основным модулем, который использует методы оптимизации, является модуль планирования производсвта.

При проведении работ по разработке модуля планирования был проведен сравнительный анализ найденных в литературных источниках алгоритмов планирования, схожих по предлагаемой функциональности с алгоритмом разрабатываемого модуля планирования и направленных на автоматизацию построения производственных планов и оптимизацию распределения производственных ресурсов. В качестве таких моделей были выбраны:

– модель совместной работы APS-системы и системы «SAP ERP»;

– референтная модель производственного планирования для приборостроительного завода;

– модель быстрой цепочки поставок;

– модель расписания для цеха механической обработки;

– модель логистической цепи многостадийного предприятия.

В модели совместной работы APS-системы и системы «SAP ERP» каждый цикл планирования начинается с планирования спроса, составления плана продаж и производства на основе прогнозов спроса [34]. Разработанный алгоритм, в отличие от алгоритма сравниваемой модели, позволяет не только получать данные из ERP-системы (на базе платформы 1С:Предприятие, более актуальной среди отечественных предприятий, чем в сравниваемой модели), но и формировать планы в самом подмодуле в качестве исходных данных благодаря единым справочникам, которые задействованы в разрабатываемом подмодуле.

Сравниваемая модель предполагает перенос из системы SAP ERP в модуль производственного планирования. Модуль SAP APO (Advanced Planner and Optimizer) в лучшей степени сочетается с системой SAP ERP, поэтому рассматривался именно этот модуль производственного планирования, хотя в определенных условиях предприятие может выбрать другие модули, например, i2 Factory Planner на базе специальной «быстрой» платформы в случае необходимости быстрого расчета производственного графика [28]. Рассматриваемый модуль SAP APO наряду с модулем производственного и точного планирования обладает той же базовой функциональностью, что и предлагаемый в данной работе алгоритм: составление укрупненного и оперативного производственного плана. Однако в рассматриваемой модели данная функциональность достигается усложненными методами (сложными как в настройке, так и в использовании) и приводит к удорожанию всего комплекса системы производственного планирования, поскольку задействует дорогостоящие иностранные программные продукты.

Референтная модель производственного планирования для приборостроительного завода описывает информационные потоки и потоки решений при производственном планировании [8]. При этом может комбинироваться позаказный способ планирования и производство на склад. Все эти функции в более усовершенствованном виде реализованы в предлагаемом в данной работе алгоритме планирования. Кроме того, предлагаемый алгоритм дополнен учетом внутрихолдинговой кооперации и подходящими для реальных условий работы предприятий критериями, такими как критерий ожидаемых сроков запуска и изготовления готовой продукции, критерий приоритетности рабочих центров и пр.

Модель быстрой цепочки поставок объединяет требования обычного производства «под заказ» с необходимостью срочных изменений производства [24]. Особенность данной модели в том, что производится не полностью готовая продукция, а отдельные компоненты, имеющие свойства, близкие к свойствам продукции оптовых заказов. Подобная модель может быть реализована и в предлагаемом алгоритме, поскольку подразумевается иерархическая структура спецификаций. В результате такой особенности представляется возможным в оперативном режиме изготовить изделие с индивидуальными особенностями на базе существующих изготовленных компонентов, изготовленных в режиме серийного производства. Этим подкрепляется универсальность предлагаемого алгоритма планирования: модель быстрой цепочки поставок можно считать частным случаем, реализуемым в рамках предлагаемого алгоритма.

Модель расписания для цеха механической обработки направлена на составление оптимального расписания для цеха с универсальным производством [13]. Для изготовления деталей используется сложный технологический процесс, состоящий из ряда последовательных операций механической обработки. Так же, как и в предлагаемом алгоритме планирования станки объединяются в группы взаимозаменяемости. На выходе алгоритм сравниваемой модели предлагает допустимое решение исходной задачи, распределяя работы по станкам, исходя из критерия минимальных затрат на выполнения данным станком данной работы. Однако, такой подход будет приводить в локальной оптимизации, не гарантирующей оптимальность всего построенного плана. алгоритм ориентирован на оптимизацию всего плана, и в дополнение ко всему, учитывает множество критериев, поэтому будет подходить под разные производственные условия.

Модель логистической цепи многостадийного предприятия имеет сходные черты с разработанным алгоритмом планирования в учете производственных процессов на разных производствах, производящих изделия на разных стадиях технологического процесса. Поскольку при разработке алгоритма была учтена возможность реализации в холдинговой структуре, межфирменное взаимодействие в планировании также задействовано. Однако, базовое различие состоит в том, что в предлагаемом в книге Пщелинского варианте учитываются дополнительные параметры (такие как спрос на i-й вид продукции, доплата за сверхурочную работу и пр.), которые будут перегружать программу при выполнении расчетов (что особенно критично для оперативного планирования) [14].

Таким образом, проведенное аналитическое сравнение позволяет сделать вывод о том, что предлагаемый алгоритм (рисунок 2.1.1) производственного планирования на базе платформы 1С:Предприятие 8 обладает качествами, имеющимися в каждой из рассмотренных моделей, и дополняет их своими особенностями, предлагая более гибкую систему, адаптированную под предприятия отечественного машиностроительного производства. При этом модуль планирования предполагает меньшие затраты на внедрение и сопровождение, более простое использование и универсальность при сохранении базовой функциональности наряду с программными продуктами подобного класса.

Алгоритм предполагает, что на 1-м шаге сотрудники производственной службы определили источники данных для формирования запусков в модуле планирования. В качестве источников данных используются наборы изделий, требуемых к производству. Эти данные поступают из планов производства на период, из заказов на производство, либо заполнены сотрудниками производственной службы вручную.

Поскольку источники данных могут быть по ошибке введены некорректно, программа будет выполнять контроль (шаг 2), в частности контролировать, что один источник (например, заказ на производство) не повторяется несколько раз в одном или нескольких запусках. Кроме того, сами сотрудники производственной службы на этом шаге должны убедиться, что все указанные для запуска данные заполнены без ошибок (поскольку процесс формирования графика производства занимает время, необходимо не ранних стадиях сократить число итераций процесса построения окончательного плана).

На шаге 3 сотрудники производственной службы определяют критерии для укрупненного планирования, а именно ожидаемые сроки начала и завершения выполнения заказов (изготовления изделий), а также порядок расположения работ (ближе к сроку или начиная от ожидаемой даты запуска).

После формирования запуска в производство (документ «Производственная программа») программа автоматически сформирует маршруты производства (шаг 4), в которых будет указана последовательность выполнения операций для изготовления изделий и деталей, однако без детализации по рабочим центрам, а также без распределения по времени.

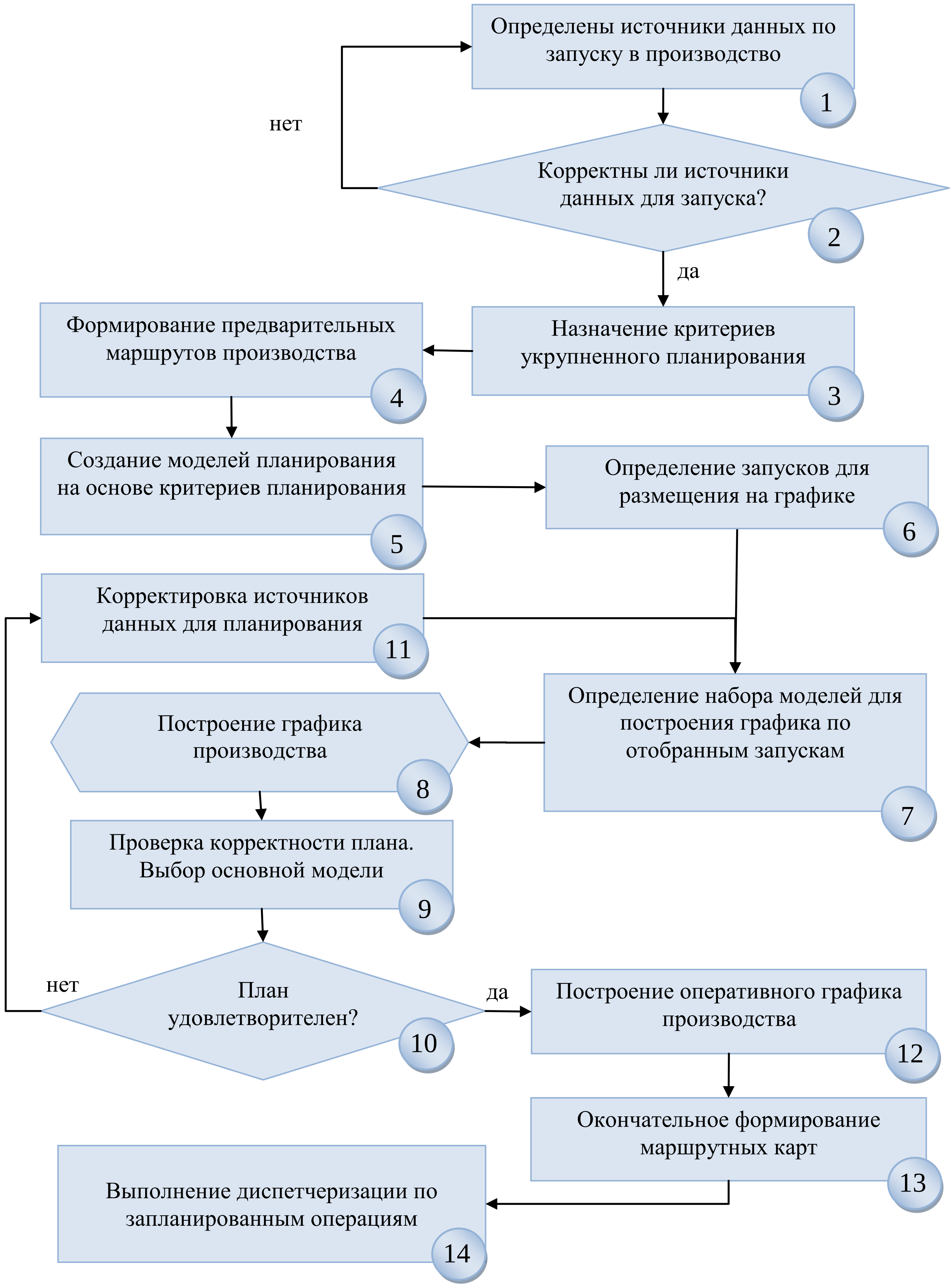


Рисунок 2.1.1 - Алгоритм модуля планирования производства

Далее перед началом построения графика сотрудники плановой службы должны сформировать набор моделей (шаг 5), которыми они будут пользоваться при создании графиков производства. Эти модели могут быть сформированы на любой стадии до начала построения графика и могут использоваться при построении графиков по другим запускам, если критерии планирования соответствуют этим запускам.

На 6-м шаге в интерфейсе подмодуля планирования отбирается набор запусков, для которых строится производственный график. Таким образом, согласно алгоритму, график можно строить частями для отобранных совокупностей запусков.

Дальнейшим шагом является отбор из ранее созданных моделей (шаг 7) тех, которые будут анализироваться сотрудниками после построения графика производства. После определения набора запусков и набора моделей для использования производится построение графика производства (шаг 8), на котором программа на временной шкале отображает предполагаемое время начала и завершения изготовления изделий и выполнения операций, выполняемых на указанных в технологической документации единицах или группах технологического оборудования.

Для каждой отобранной на 7-м шаге модели программа будет формировать отдельный график производства. Поэтому для принятия окончательного решения, какая модель наиболее подходит в данных производственных условиях, сотрудник плановой службы на 9-м шаге производит анализ построенного графика, проверку его корректности и выбирает модель, результатам расчетов по которой производство будет следовать в производственном процессе. Если план, по мнению сотрудника производственной службы, не удовлетворяет требованиям производства по срокам, загруженности оборудования и прочим критериям (в т.ч. экспертному мнению), на 10-м шаге предполагается возможность выполнить повторение итерации построения графика производства, перед которой сотрудник (на 11-м шаге) сможет откорректировать исходные данные, если такая необходимость возникнет. Кроме того, на каждой итерации возможно изменение набора моделей для использования при построении графика (7-й шаг), например, удаление моделей, которые уже на 1-й итерации показали свою несостоятельность.

Если сформированный график корректен, сотрудник (на 12-м шаге) сохранит в программе тот вариант графика, который был рассчитан по модели, принятой как основную (на шаге 9). В результате программа определит каждой операции конкретную единицу исполняемого оборудования и по итогам этого этапа сформирует маршрутные карты производства в окончательном виде (13-й шаг). Эти маршрутные карты будут готовы к выдаче в производство. На этом же шаге возможна корректировка сотрудниками планового отдела производственной службы маршрутных карт, полученных в ходе планирования.

Полученные маршрутные карты будут использоваться в процедуре диспетчеризации (шаг 14). Диспетчеризация может проводиться как по маршрутным картам производства, так и по сменно-суточным заданиям, заполняемым на основании этих маршрутных карт.

Таким образом, подсистема планирования обеспечивает построение укрупненного и оперативного плана производства, обеспечивая производственный процесс информацией о последовательности и графике выполнения операций, а также о сроках изготовления изделий при различных вариантах построения графика.

При проектировании программы для ЭВМ модуля планирования машиностроительного производства на платформе 1С:ПРЕДПРИЯТИЕ 8.Х сначала была разработана общей архитектуры системы планирования: на основании плана производства (исходные данные для производственной программы) на этапе 1 (предварительная проверка) определяется производственная программа (с разузлованием и примитивными маршрутными картами), затем на этапе 2 (укрупненное планирование) разрабатываются маршрутные карты с операциями, распланированными на укрупненные интервалы времени и назначенными на выполнение группами взаимозаменяемости рабочих центров, а также план снабжения материалами. Затем на этапе 3 (оперативное планирование) разрабатываются маршрутные карты для диспетчеризации с детализированным поминутно временем начала и завершения операций и назначенным оборудованием из группы взаимозаменяемости. Затем разрабатывается схема механизма укрупненного планирования в соответствии с организационной структурой конкретного подразделения.

В программе для ЭВМ первоначально создается заказ на производство. После проверки корректности заполненной КТД (конструкторско-технологической документации) технологами и конструкторами предприятия формируется документ «Производственная программа». Производственная программа использует в качестве источника данных либо производственный заказ, либо план производства, либо отдельные списки производимых деталей.

При этом реализован запрет на использование заказов на производство, задействованных в других производственных программах. Запрещенные для выбора заказы на производство автоматически выделяются красным цветом. Производственная программа позволяет получить разузлованную структуру изделий. После проведения разузлования пользователем (по одной или нескольким производственным программам) формируется график производства. Утверждается принимаемый в производство вариант графика, и после записи графика в программе формируются маршрутные карты производства на периоды до выбранной даты из предложенного программой списка.

Далее разработан механизма построения оперативного плана. Для варьирования создаваемых программным продуктом оперативных планов производства с целью получения плана, близкому к оптимальному в заданных условиях, разработаны три варианта планирования со своим набором настраиваемых критериев:

Вариант 1: Распараллеливание загрузки РЦ (рабочих центров) по приоритетам.

Параметры варианта планирования:

– КП (количество приоритетов) соответствует количеству приоритетов, по которым система распределяет загрузку РЦ. По-умолчанию данный параметр = 1;

– МПР (минимальная партия распараллеливания). Этот параметр указывается во времени и имеет значения для выбора: 1 час, 1 смена, 1 сутки, 1 неделя, 1 месяц, 1 квартал;

– МПУ% (максимальный процент увеличения общего времени обработки). Параметр указывается в процентах. По-умолчанию равен 10%. МПУ(время) – время изготовления минимальной партии из учета МПУ%. МПУ(время) = Тпз + Тшт/Min((МПУ%*(1+Тшт/Тпз)+1);0).

Пример расчета для Тпз=1; Тшт=10.

МПУ(время) = 1+10*Min((0,1*(1+10/1)+1);0) = 6

– учитывать минимальный размер партии (булева переменная);

– учитывать кратность партии (булева переменная).

Система распределяет загрузку РЦ из группы заменяемости РЦ по КП. Т.е. если КП = 1, то система распараллеливает загрузку только по РЦ с наивысшим приоритетом. Пример: РЦ только с приоритетом 10.

Если КП = 2, то система распараллеливает загрузку РЦ с наивысшим и на единицу меньшим приоритетом. Пример: РЦ с приоритетом 10 и 9.

Если КП = 3, то система распараллеливает загрузку РЦ с наивысшим, на единицу и на два меньшим приоритетом. Пример: РЦ с приоритетом 10, 9 и 8.

При распараллеливании система учитывает:

1. Если указан параметр планирования учета кратности и указана

кратность в спецификации, то система распараллеливает занятость РЦ согласно кратности. В этом случае шаг 2 не используется;

2. МПР и МПУ (время) и минимальную партию из спецификации (Тпз+Тшт*шт) (если в параметрах планирования установлен соответствующий флажок), и учитывает максимальный их них. Если МПР = 1 смена, то система заполняет график работы для первого РЦ с наивысшим приоритетом на одну смену, но кратное штукам (то есть нельзя делать перенос изготовления части детали). Далее для следующего по порядку РЦ; тоже на одну смену и т.д.

Вариант 2: Наименьшее подготовительно-заключительное время (ПЗ).

Параметры варианта планирования:

– КП соответствует количеству приоритетов, по которым система распределяет загрузку РЦ. По-умолчанию данный параметр = 1.

Система использует для загрузки РЦ один свободный РЦ из количества указанных приоритетов для всего количества по маршрутной карте (МК). Если КП = 2, то система рассматривает для планирования только РЦ с двумя наивысшими приоритетами.

Вариант 3: Минимальная кооперация.

Параметры планирования (все параметры аналогичны параметрам Варианта 1 Распараллеливание загрузки РЦ по приоритетам за исключением параметра Количество приоритетов):

– МПР (Минимальная партия распараллеливания). Этот параметр указывается во времени и имеет значения для выбора: 1 час, 1 смена, 1 сутки, 1 неделя, 1 месяц, 1 квартал;

– МПУ% по умолчанию равен 10%. МПУ(время) – время изготовления минимальной партии из учета МПУ%.

– МПУ(время) = Тпз + Тшт/Min((МПУ%*(1+Тшт/Тпз)+1);0).

Пример расчета для Тпз=1; Тшт=10.

МПУ(время) = 1+10*Min((0,1*(1+10/1)+1);0) = 6

- Учитывать минимальный размер партии (булева переменная)
- Учитывать кратность партии (булева переменная)

Система раздает приоритеты РЦ самостоятельно по логике:
Наивысший приоритет у РЦ с подразделениями, которые входят в группу родительского подразделения цеха приемосдатчика. Данный приоритет имеет числовой формат: АББ, где А – присвоенный системой приоритет, ББ – приоритет РЦ в группе заменяемости. Если РЦ входит в подразделение цеха приемосдатчика, то А=2; если нет, то А=1 Планирование работает только по наивысшему приоритету, установленному системой планирования. К примеру: цех приемосдатчик – Цех 2 Участок 22 => наивысший приоритет будет у РЦ цеха 2. Распределением нагрузки на отобранные планирование рабочие центры и размеры партий рассчитываются системой по параметрам МПР и МПУ%. Описание параметров МПР и МПУ% приведено выше в Варианте 1.

Помимо требований к каждому варианту, разработаны общие требования ко всем вариантам производственного планирования:

1. Все варианты планирования учитывают загруженность рабочих центров, и система выбирает свободный рабочий центр из равных по приоритету.
2. Следующая партия одной и той же детали на одном и том же станке планируется без учета ПЗ.
3. Учитывать параметр технологической карты «Параллельная загрузка, кратно» так, как это учитывает система сейчас. А именно: одновременная обработка деталей за один производственный цикл исполнения операции. Пример: сверление 10 пластин за один раз. Тобщ = Тпз + Тшт*штук/[Параллельная загрузка, кратно].

После формирования документа «Производственная программа» программа предоставляет возможность для создания графика производства. С помощью этого механизма программа распределяет изначально сформированную последовательность операций во времени. На форме

«Управление графиком производства» программа отображает перечень производственных программ, не прошедших данную процедуру планирования.

В результате расчета графика производства программа производит расчет по выбранным моделям планирования и составляет диаграмму Гантта в трех представлениях:

1. Укрупненное отображение без детализации по рабочим центрам и деталям. Используется для определения длительности изготовления всего конечного изделия.
2. Отображение графика изготовления изделий с детализаций по деталям. Служит для представления последовательности изготовления деталей, согласно структуре конечного изделия и маршруту, созданному по технологической карте.
3. Отображение детализированного планирования с графиком изготовления деталей на конкретных рабочих центрах. С целью получения сведений о графике с различной степенью детализации имеется возможность отображать диаграмму укрупненного планирования в трех временных разрезах: по месяцам, по кварталам и по годам, а диаграмму детального планирования в следующих трех разрезах: по дням, по неделям и по месяцам.

Перед формированием маршрутных карт, отдаваемых в производство, на полученной диаграмме Гантта выбирается в качестве основной та модель, которая наиболее подходит по критериям данной производственной организации. Данные в маршрутных картах заполняются по графику согласно выбранной основной модели. Формирование данных для заполнения графика производства с учетом разных моделей планирования. Для варьирования графика загрузки оборудования в программе разработан механизм построения графика по моделям планирования с учетом критериев оптимизации, описанных ранее. Набор моделей указывается пользователем на форме настроек перед началом расчета графика. Модели планирования создаются пользователем заблаговременно перед началом формирования графика производства. В них выбирается критерий оптимизации из рассмотренных выше. Каждый из критериев настраивается в отдельном окне: указываются параметры, учитываемые для проведения расчетов в ходе построения графика.

В правой части формы модели планирования пользователь может настроить правила для распределения операций, выстроенных в очередь выполнения на одном рабочем центре. К этим критериям относятся:

1. FCFS (first come, first served – «первой поступила, первой обслужена»). Работы выполняются в том порядке, в каком они поступают в подразделение.
2. LCFS (last come, first served – «последней поступила, первой обслужена»). Это правило часто применяется по умолчанию. При поступлении очередной работы она размещается на вершине пирамиды. Плановик первой выбирает последнюю поступившую работу (с вершины) эта работа выполняется первой.
3. SPT (shortest processing time – выбор в первую очередь коротких операций). Сначала выполняется работа с самым коротким временем выполнения, затем среди оставшихся работ опять отыскивается и выполняется работа с самым коротким временем выполнения и т.д.
4. LPT (longest processing time – выбор в первую очередь длительных операций).

По каждой модели, указанной при расчете графика производства, программа формирует свой вариант расписания загрузки оборудования. По окончании построения графика загрузки оборудования пользователь имеет возможность выбора из рассматриваемых в данный момент моделей планирования. Только та модель планирования, которая будет признана пользователем основной, будет использоваться при построении маршрутных карт по выбранным производственным программам.

Тестирование модуля планирования производилось на следующем этапе после разработки и введения в эксплуатацию основных частей подмодуля диспетчирования производства. Благодаря выполнению предшествующих мероприятий были выявлены основные замечания пользователей по работе с программой (в части наличия необходимой функциональности, а также информативности и удобства интерфейса). Кроме того, были окончательно сформированы структуры данных в программе (являющиеся исходными данными для подсистемы диспетчирования), в которых подмодуль планирования должен хранить результаты выполнения процедуры планирования.

Большая часть процесса тестирования проводилась в производственных цехах ООО «ЛПМ-Механика» и ООО «ЛПМ-Система». Такой выбор был сделан, исходя из того, что в ООО «ЛПМ-Механика» присутствовали небольшие запуски (коммерческого назначения) с коротким (до месяца) производственным циклом, которые проще поддавались анализу и оценке правильности полученных результатов планирования. ООО «ЛПМ-Система» была выбрана, потому что является источником формирования запусков в которые входят крупные изделия, и при этом сформированный план фактически является планом для остальных производственных организаций ХОЛДИНГ ЛЕНПОЛИГРАФМАШ, таких как ОАО «ЛЕНПОЛИГРАФМАШ», ООО «Полиграф Пласт» и ООО «ЛПМ-Авангард». Для всех организаций был предоставлен доступ к единой информационной базе с подмодулями планирования и диспетчеризации, и добавления новых элементов подмодуля (укрупненное планирование, оперативное планирование) автоматически отражались в единой базе разрабатываемой и тестируемой программы. Тестирование разработанных пользовательских интерфейсов программы проводилось на активных матрицах. Используемый при тестировании сервер имел следующие технические характеристики:

1. Материнская плата: X9SCM-F;
2. Процессор: Intel Xeon E3-1220 3.1 GHz;
3. Оперативная память: 4GB, DDR3, 1333MHz;
4. Контроллер запоминающих устройств: Adaptec RAID 6405.

Таким образом, поскольку сервер соответствовал минимальным техническим характеристикам, достаточным для работы с разрабатываемым бизнес-приложением, в ходе тестирования удалось убедиться в работоспособности разрабатываемой программы для ЭВМ при заложенных в техническое задание характеристиках.

Начальным этапом было тестирование механизма укрупненного планирования в ООО «ЛПМ-Механика» и ООО «ЛПМ-Система», проверена способность существующих вычислительных мощностей к обработке запусков на большие изделия. Протестирован механизм заполнения структуры изделия и формирования предварительных маршрутных карт с предполагаемым временем запуска деталей в производство. В самом начале тестирования была выявлена потребность в доработке программы для автоматической настройки новым пользователям, участвующим в формировании укрупненного плана производства, возможности разузловывать изделие при заполнении производственной программы.

Основным результатом выполнения работы в части разработки алгоритмов планирования и диспетчеризации производства стал программный продукт, позволивший решить ключевые задачи по балансировке промышленного оборудования согласно плану производства, сформированного на базе заказов покупателей. Также данный программный продукт позволил автоматизировать основные процессы по учету выполнения производственного цикла, с возможностью предоставления итоговых данных о понесенных затратах в бухгалтерию для расчета заработной платы и производственной себестоимости. Помимо этого, разработанный программный продукт получил возможность взаимодействия со станочным цеховым оборудованием, а также с основной учетной системой. Программу для ЭВМ можно применить для автоматизации серийного, дискретного производства, что позволяет добиться повышения технико-экономической эффективности за счет:

1. Повышения конкурентоспособности за счет предоставлению

заказчику оперативной информации о возможности исполнения заказа в заданные сроки

2. Увеличения количества выполненных заказов за счет сокращения производственного цикла (уменьшения времени межоперационного пролеживания)

3. Сокращения складских запасов.

Основной целью работы по разработке системы бизнес анализа и прогнозирования являлось создание автоматизированной системы прогнозирования межцеховой загрузки производственных мощностей машиностроительного предприятия. Предпосылкой к созданию разрабатываемой автоматизированной системы явилась потребность машиностроительных предприятий в наличии информации о прогнозных сроках изготовления заказанных изделий до перехода к этапу детального внутрицехового производственного планирования. Необходимость оперировать большим массивом исходных данных, используемых при планировании производственного процесса машиностроительного предприятия, позволяет говорить о целесообразности разработки модуля, который агрегирует исходные данные и позволяет без использования избыточной информации получить прогнозные сроки изготовления изделий, которые могут быть переданы в модуль внутрицехового планирования для дальнейшего распределения работ на конкретные рабочие центры.

Описан алгоритм взаимодействия разрабатываемого модуля прогнозирования межцеховой загрузки с ранее разработанным модулем внутрицехового производственного планирования машиностроительного предприятия. Возможность передачи прогнозных сроков изготовления изделий на уровень внутрицехового планирования позволяет при формировании оперативного производственного плана на внутрицеховом уровне опираться на приоритетность работ на заданный горизонт оперативного планирования, не охватывая детально те работы, которые не входят в заданный горизонт. Таким образом, разработанный модуль приводит как к повышению информативности о сроках изготовления на межцеховом уровне, так и к сокращению избыточности информации и вычислительной нагрузки при оперативном внутрицеховом планировании.

Основное предназначение модуля производственного прогнозирования межцеховой загрузки производственных мощностей заключается в расчете сроков изготовления изделий и входящих в него деталей и сборочных единиц по имеющимся у машиностроительного предприятия производственным заказам без детального планирования каждой операции на конкретные рабочие центры.

Производственные процессы машиностроительных предприятий характеризуются многостадийностью, сложностью и разнообразием применяемых методов обработки: гибка, резка, точение, фрезерование, сварка, монтаж, пайка, покрытие и т.п. Производственные процессы изготовления изделий относятся к прерывным и расчленяются на несколько стадий: заготовительную, обрабатывающую, сборочную [16]. Каждая из этих стадий может включать несколько технологических операций, которые могут выполняться в одном или различных производственных подразделениях.

Межцеховое прогнозирование относится к более высокому уровню управления, поэтому нуждается в более обобщенных данных при принятии решений, тогда как низшему звену управления (внутри цехов) необходимы наиболее подробные данные. Таким образом, при принятии решений об изготовлении продукции на длительный горизонт необходима информация не о сроках выполнения конкретных технологических операций, а о прогнозных сроках изготовления партий деталей и сборочных единиц с учетом свободных производственных мощностей. Детальное планирование каждой технологической операции с точностью до секунды на длительный горизонт приводит к избыточности информации на выходе, в то время как разрабатываемый модуль межцехового прогнозирования выполняет вычисления на основании агрегированных данных и выводит в качестве результата достаточную информацию для последующего принятия управленческих решений.

На основе полученного прогноза загрузки производственных мощностей, могут приниматься следующие управленческие решения.

На более верхнем уровне может производиться оценка возможности изготовления продукции в заданные заказчиком сроки (в том числе с привлечением дополнительного персонала и сторонних организаций по кооперации) [25], а также принимается решение о согласовании с заказчиком новых сроков. Кроме того, информация о прогнозе загрузки производственных мощностей может использоваться для оценки возможности привлечения дополнительных заказов, а также для обоснования необходимости расширения, либо (реже) сокращения доступного фонда производственных мощностей [19].

На более низком уровне информационная система получает данные о сроках изготовления партий деталей и сборочных единиц, которые затем эффективно распределяются внутри каждого цеха с использованием критериев производственного планирования.

При разработке модуля прогнозирования производственных мощностей машиностроительного производства были учтены следующие принципы рациональной организации производственного процесса в соответствии с точкой зрения В.А. Козловского [5].

Интегративность – принцип, предполагающий системную интеграцию составляющих для достижения целей системы с максимальной эффективностью. В разрабатываемом модуле данные принцип используется в следующих направлениях:

– интеграция производства со сбытовой службой: при поступлении нового заказа модуль прогнозирования межцеховой загрузки производственных мощностей предоставит для сбытовой службы информацию о выполнимости заказа и возможных сроках выполнения для последующего согласования сроков с заказчиком;

– интеграция производственного прогнозирования межцеховой загрузки и оперативного производственного планирования внутрицеховой загрузки производственных мощностей. Благодаря этому, спрогнозированные и утвержденные с заказчиками сроки выполнения заказов могут быть переданы в разрезе входящих в заказы деталей и сборочных единиц на внутрицеховой уровень для более эффективного распределения работ по рабочим центрам.

Гибкость – принцип, предполагающий проведение внутренних изменений в системах производства с максимальной эффективностью. Обеспечивает возможность реакции системы на разнообразные изменения в ее внутреннем состоянии (например, сбои в ходе работ) или во внешней среде (например, колебания спроса). Чем больше гибкость системы, тем шире диапазон разнообразных изменений, на которые в состоянии отреагировать система.

Применение разрабатываемого модуля позволит машиностроительному предприятию более гибко реагировать на изменения внешних и внутренних факторов, поскольку будет предоставлять информационную поддержку для принятия решений по реагированию. Также гибкость обеспечивается за счет предоставления свободы для оперативного планирования на внутрицеховом уровне для назначения работ на любую из машин из групп заменяемости, на которой была спрогнозирована загрузка.

Прямоточность – принцип, предполагающий организацию движения каждого предмета по рабочим позициям технологического процесса таким образом, чтобы обеспечить кратчайший (в пространстве и времени) путь, без возвратных и встречных перемещений, без излишних пересечений с маршрутами других предметов. Формирование этапов производства, предполагаемое в разрабатываемом модуле, использует данный принцип за счет объединения последовательно идущих технологических операций в рамках одного подразделения межцехового уровня при наличии данной возможности согласно технологическому процессу. В таблице 2.1.1 приведен сравнительный анализ модуля межцехового прогнозирования и модуля внутрицехового планирования.

Межцеховое прогнозирование охватывает больший интервал (горизонт), чем внутрицеховое планирование: на уровне между цехами осуществляется прогнозирование на период, охватывающий сроки выполнения всех текущих заказов (обычно, не менее 1 месяца). Детальное внутрицеховое планирование на длительный горизонт позволит добиться практически тех же задач, что и межцеховое прогнозирование, однако с большими затратами вычислительных мощностей. Поэтому на уровне внутрицехового планирования детальное планирование целесообразно производить на меньший промежуток времени: на ближайшие дни и недели. Перестроение плана-графика производства должно производиться как можно реже для обеспечения стабильной работы машиностроительного производства, но при этом план-график должен поддерживаться в актуальном состоянии, поэтому допускается внеплановое перестроение графика в случае выявления нештатной ситуации. При отсутствии нештатных ситуаций в данной работе межцеховое прогнозирование может осуществляться раз в несколько недель, а межцеховое планирование – раз в несколько дней.

В отличие от внутрицехового планирования, выдающего на выходе информацию о моментах начала и окончания выполнения технологических операций с точностью до секунд или минут, алгоритм межцехового прогнозирования предполагает предоставление на выходе информации о плановой загрузке групп рабочих центров наборами технологических операций (этапами производства) с точностью до дней или недель. Подобное укрупнение разреза оперируемых данных позволяет применять алгоритм прогнозирования межцеховой загрузки производственного оборудования на длительный промежуток времени без излишних затрат вычислительных мощностей на детализацию (к примеру, до минут и секунд).

Таблица 2.1.1

Сравнительный анализ модуля межцехого прогнозирования и внутрицехового планирования производства

	Сравнительная характеристика алгоритма	Межцеховое прогнозирование	Внутрицеховое планирование
1.	Решаемые задачи	Прогнозирование сроков изготовления изделия / деталей и сборочных единиц, выполнения заказов. Распределение загрузки по мощностям между производственными цехами.	Оперативное планирование расписания загрузки рабочих центров внутри производственного цеха на ближайший временной интервал.
2.	Горизонт планирования / прогнозирования	От 1 месяца	1 – 10 дней
3.	Частота перестроения плана-графика	Не чаще 1 раза в 10 дней	1 раз в 1 – 3 дня
4.	Необходимость внепланового перестроения плана-графика	Выход за рамки сроков изготовления изделия / деталей и сборочных единиц после перепланирования на внутрицеховом уровне. Добавление длительных ремонтов в план.	Выход фактического времени выполнения за рамки плановых сроков. Выход из строя единицы производственного оборудования.
5.	Степень детализации (по оборудованию)	Группа рабочих центров	Рабочий центр
6.	Степень детализации (по структуре предприятия)	Подразделение межцехового уровня (цех)	Подразделение (цех, участок)
7.	Разрез детализации	Дни, недели	Секунды, минуты
8.	Объекты распределения на графике	Упорядоченные наборы технологических операций	Технологические операции

Применение разработанного алгоритма прогнозирования производства и, как следствие, устранение необходимости проведения детальных расчетов сроков выполнения каждой технологической операции приводит к достижению следующих целей производственного планирования и прогнозирования:

– оперативность получения прогноза по срокам выполнения заказов и изготовления отдельных деталей и сборочных единиц;

– сокращение длительности формирования внутрицехового оперативного плана производства.

Для реализации данных целей была проведена разработка алгоритма производственного прогнозирования, а также алгоритма взаимодействия с модулем внутрицехового взаимодействия.

Разрабатываемый алгоритм производственного прогнозирования предназначен для расчета имеющихся свободных производственных мощностей всех цехов машиностроительного предприятия и объемов работ в рамках поступивших производственных заказов и определения предполагаемой прогнозной загрузки производственных мощностей на укрупненных интервалах времени по группам оборудования.

При разработке алгоритма производственного прогнозирования в первую очередь были сформулированы наиболее важные для выполнения прогнозирования составные части нормативно-справочной информации. С учетом дальнейшего обеспечения взаимодействия с модулем внутрицехового планирования производства была взята за основу структура нормативно-справочной информации из данного модуля, основные компоненты которой включают:

– справочник «Номенклатура» - для хранения информации о деталях и сборочных единицах, материалах и комплектующих;

– справочник «Спецификация номенклатуры» - для хранения информации о составе деталей и сборочных единиц;

– справочник «Подразделения» - для хранения информации о производственных подразделениях (например, цехах и участках);

– справочник «Рабочие центры» - для хранения информации об имеющемся на предприятии промышленном оборудовании и рабочих местах сотрудников;

– справочник «Группы заменяемости рабочих центров» - для хранения информации об объединенных в группы списках рабочих центров;

– справочник «Технологическая карта производства» - для хранения информации о последовательности технологических операций в техпроцессе изготовления деталей и сборочных единиц;

– документ «Заказ на производство» - содержит перечень предполагаемых к изготовлению конечных изделий.

В ходе разработки структура перечисленных элементов нормативно-справочной информации претерпела следующие изменения.

Поскольку алгоритм производственного прогнозирования межцехового уровня не должен погружаться во внутреннюю структуру производственного цеха (который может содержать отдельные участки) в разрабатываемом модуле добавлен признак «Межцеховое управление». При выполнении прогнозирования модуль агрегирует исходную информацию по данному подразделению, в том числе и технологические операции, для которых указаны для выполнения группы рабочих центров из подразделений, входящих в состав подразделения, для которого установлен признак «Межцеховое управление».

В целях оптимизации процесса агрегирования данных по подразделениям в группы рабочих центров добавлена привязка к подразделению. Таким образом, для каждой технологической операции техпроцесса будет предполагаться привязка к подразделению с признаком «Межцеховое управление» через группу заменяемости рабочих центров.

В отличие от алгоритма внутрицехового производственного планирования, алгоритм межцехового производственного прогнозирования предполагает размещение на плане-графике не отдельных технологических операций, а наборов технологических операций. Для объединения технологических операций в наборы принято решение о разработке нового объекта нормативно-справочной информации – этапа производства. Этап производства содержит перечень последовательных технологических операций только одного подразделения межцехового уровня по одному виду деталей и сборочных единиц и имеет на выходе номенклатурную позицию с определенными характеристиками (которые деталь или сборочная единица получает после обработки на содержащихся в этапе производства технологических операциях).

Разработанный алгоритм производственного прогнозирования в виде этапов представлен на рисунке 2.1.2. В качестве исходных данных для работы алгоритма требуется информация об имеющихся на предприятии производственных заказах (пункт 1 на схеме алгоритма). В заказах содержится информация об изготавливаемых конечных изделиях с указанием их количества, спецификации (содержащей информацию о составе изделия) и технологической карты (содержащей информацию о технологическом процессе изготовления изделия). При появлении нового заказа от покупателя (пункт 2) пользователь должен иметь возможность внести в информационную систему новый заказ на производство и добавить этот заказ в очередь заказов, представляющую собой отсортированный по приоритетности список заказов на производство.

При возможности объединения производственных заказов по срокам запуска и выпуска (пункт 3), согласно разработанному алгоритму предусмотрена возможность объединить внесенные в информационную систему заказы на производство в запуски. Формирование запусков позволит укрупнять партии одинаковых деталей и сборочных единиц, находящихся в составе различных или одинаковых изделий из разных заказов, таким образом уменьшая в объеме набор выходных данных (по результатам прогнозирования) и сокращая затраты вычислительных ресурсов на формирование дерева с составом деталей и сборочных единиц. В случае, если некоторые заказы не объединены в запуски, дальнейшая работа алгоритма будет производиться напрямую с заказами.

После формирования запусков, либо если пользователем принято решение о пропуске этапа формирования запусков, алгоритм приступает к автоматизированному формированию этапов производства (пункт 4). В рамках данного этапа производится разузлование изделий, содержащихся в заказах, объединение одинаковых деталей и сборочных единиц, находящихся в одном запуске либо заказе (в зависимости от параметров, заданных пользователем), после чего производится циклический обход технологических процессов каждой детали или сборочной единицы. При переходе к технологической операции, которая определена на новом подразделении межцехового уровня (отличном от подразделения предыдущей технологической операции данного техпроцесса), согласно алгоритму, формируется новый этап производства. Таким образом, в этап производства попадает как можно большее количество последовательно расположенных технологических операций, выполняющихся в пределах одного цеха.

В случае если сформированные этапы производства требуют ручной корректировки (пункт 5), согласно алгоритму она может быть произведена путем корректировки подразделения, выполняющего технологические операции данного этапа, либо распределения партии в рамках данного этапа производства между несколькими подразделениями (в том числе и подразделением, отвечающим за внешнюю кооперацию).

По окончании формирования и корректировки этапов производства производится прогнозирование (пункт 6) путем расстановки на плане-графике этапов производства с учетом доступности производственных мощностей подразделений межцехового уровня на заданный горизонт.

По итогам прогнозирования межцеховой загрузки производственных мощностей предприятия в информационной системе сохраняется план-график, содержащий информацию о прогнозных сроках начала и окончания этапов изготовления каждой детали или сборочной единицы.

Алгоритм формирования этапов производства для целей прогнозирования представлен на рисунке 2.1.2. После объединения деталей и сборочных единиц в запусках (если деталь или сборочная единица входит в изделие по заказу, хранящемуся в одном из запусков) либо в заказах (если деталь или сборочная единица входит в изделие по заказу, не указанному ни в одном из запусков) (пункт 1) начинается цикл формирования этапов производства (для каждой детали или сборочной единицы – см. пункт 2). При достижении очередной операции технологического процесса изготовления деталь или сборочная единица, согласно алгоритму, модуль осуществляет проверку принадлежности рабочего центра или группы рабочих центров на текущей операции определенному подразделению межцехового уровня (подразделению из предыдущей операции технологического процесса) (см. пункт 3). Если операция, согласно техпроцессу, должна выполняться в цехе, отличном от цеха на предыдущей операции, создается новый этап производства, в котором указан новый цех. При достижении последней операции техпроцесса (пункт 4) алгоритм переходит к следующей детали или сборочной единице. После перечисления всех деталей или сборочных единиц на выходе с алгоритма получается сформированный список этапов производства.

При проведении процедуры прогнозирования обход этапов производства осуществляется таким образом, чтобы в наибольшей степени удовлетворить пожелания всех участников производственного процесса и заказчиков. Для этого при определении приоритетов этапов производства применена характеристика под названием «производственная напряженность», введенная Мауэргаузом Ю.Е. [4]. Для численного определения данной характеристики используется два фактора: полное время, необходимое для выполнения работ, и имеющийся запас рабочего времени. В отличие от иных численных методов, данная характеристика может быть рассчитана даже при отрицательном запасе времени, который может образоваться при истечении срока изготовления ввиду выполнения более важного для предприятия заказа. Также данная характеристика обладает свойством аддитивности и позволяет получить суммарную производственную напряженность по отдельной группе рабочих центров либо по целому подразделению.

Помимо функции предоставления информации для пользователя о прогнозных сроках изготовления изделий, указанных в портфеле заказов, разрабатываемый модуль прогнозирования межцеховой загрузки производственных мощностей машиностроительного производства должен иметь возможность передавать данную информацию на более детальный уровень – на уровень модуля внутрицехового производственного планирования.

Координация между рассматриваемыми модулями может осуществляться с применением двух механизмов:

1) передачей прогнозных сроков для модуля внутрицехового оперативного планирования;
2) передачей обратной связи из модуля оперативного внутрицехового планирования в модуль прогнозирования межцеховой загрузки производственных мощностей.

В первом случае при формировании оперативного производственного плана информационная система будет ориентироваться на ранее рассчитанные данные по прогнозным срокам изготовления изделий и входящих в них деталей и сборочных единиц, тем самым снижая неопределенность на внутрицеховом уровне на ближайший горизонт оперативного производственного планирования и способствуя уменьшению сложности задачи и снижению загрузки вычислительных мощностей.

Во втором случае достигается более реалистичный прогноз загрузки межцеховой загрузки производственных мощностей, благодаря своевременному поступлению сигналов о необходимости пересмотра прогнозных сроков изготовления деталей и сборочных единиц. Какими стабильными бы ни были прогнозы и планы, в ходе производства неизбежно возникают изменения и отклонения, требующие корректировки. К ним относятся отсутствие на складе или в кладовой цеха материалов, заготовок, готовых деталей, приспособлений, инструмента или возникновение массового брака, невыход рабочих, ремонт оборудования и т.д. [17]. Данные отклонения в ходе работы производства могут служить сигналами для передачи обратной связи на уровень прогнозирования межцеховой загрузки оборудования.

Для реализации данной возможности был разработан алгоритм взаимодействия с модулем внутрицехового планирования (см. рисунок 2.1.3). Выходная информация из модуля прогнозирования межцеховой загрузки (о прогнозных сроках выполнения этапов производства) поступает на вход модуля внутрицехового оперативного планирования при выполнении очередной итерации оперативного перепланирования внутри определенного цеха (пункт 1). Модуль внутрицехового планирования получает информацию не обо всех этапах производства по выбранным производственным запускам и заказам, а только те, которые, согласно составленному прогнозу, должны выполняться на выбранном временном горизонте оперативного планирования. Таким образом, благодаря наличию разработанного модуля прогнозирования межцеховой загрузки, модуль внутрицехового планирования оперирует меньшим объемом данных, и информационная система не хранит излишнюю детальную информацию по деталям и сборочным единицам, выполнение которых в плановом периоде не прогнозируется.

В случае выявления отклонений фактического выполнения технологических операций от плановых, либо при поломке единицы оборудования, алгоритмом предусмотрено переформирование плана внутрицеховой загрузки производства (пункт 2). Если при перестроении плана срок выполнения части технологических операций вышел за рамки спрогнозированных сроков выполнения этапов производства, согласно алгоритму, на уровне прогнозирования межцеховой загрузки производственных мощностей должно производиться перестроение прогноза (пункт 3), после чего обновленные прогнозные сроки выполнения этапов заново спускаются на внутрицеховой уровень (пункт 1), цикл повторяется.

Тестирование разработанного модуля прогнозирования производилось на производственных подразделениях ХОЛДИНГ ЛЕНПОЛИГРАФМАШ (в том числе в организациях ООО «ЛПМ-Механика», ООО «ЛПМ-Система», ООО «Полиграф Пласт»). С применением разработанного модуля был построен прогноз загрузки производственных мощностей, основанный на портфеле текущих производственных заказов на серийные изделия, занимающие большую часть всех производственных мощностей и задействующие все производственные подразделения. Для работы алгоритма потребовалось адаптировать исходные данные с учетом проведенных в ходе проектирования модуля изменений:

– в информационной системе задана производственная структура межцехового уровня, включающая в себя шесть цехов;

– группы заменяемости рабочих центров, имевшиеся в информационной системе на момент начала апробации модуля, были откорректированы с учетом принадлежности к подразделениям межцехового уровня (цехам).

В целях проверки на работоспособность программы для ЭВМ проводился запуск платформе 1С:Предприятие 8.3.3 в режиме тонкого клиента, толстого клиента, а также через WEB-интерфейс. Во всех случаях программа отрабатывала в штатном режиме, предоставляя заложенный в неё функционал в полной мере. Работа модуля тестировалась, задействовав мощности сервера, имеющего следующие технические характеристики:

1. Материнская плата: X9SCM-F;
2. Процессор: Intel Xeon E3-1220 3.1 GHz;
3. Оперативная память: 4GB, DDR3, 1333MHz;

4. Контроллер запоминающих устройств: Adaptec RAID 6405.

Таким образом, поскольку сервер соответствовал минимальным техническим характеристикам, достаточным для работы с разрабатываемым бизнес-приложением, в ходе тестирования удалось убедиться в работоспособности разрабатываемой программы для ЭВМ.

Результатом апробации разработанного модуля явился сформированный в автоматизированном режиме перечень этапов производства, а также прогнозный план-график загрузки производственных мощностей всех производственных подразделений ХОЛДИНГ ЛЕНПОЛИГРАФМАШ. Длительность процедуры прогнозирования межцеховой загрузки производственных мощностей на портфеле текущих заказов с серийными изделиями, выпускаемыми ХОЛДИНГ ЛЕНПОЛИГРАФМАШ, составила не более 20 минут. Информация с прогнозируемыми сроками изготовления партий деталей и сборочных единиц по текущим производственным заказам успешно была передана в модуль внутрицехового планирования и принята к выполнению подразделениями.

В процессе тестирования модуля возникали потребности в корректировках прогнозного плана-графика в сторону увеличения сроков изготовления некоторых партий деталей и сборочных единиц ввиду наличия отклонений в штатной работе отдельных единиц производственного оборудования. Данные корректировки были внесены в исходные данные и успешно учтены в ходе перестроения прогнозного плана-графика загрузки производственных мощностей. Таким образом, проверена возможность регулирования загрузки производственных мощностей подразделений машиностроительного предприятия.

Главным результатом применения разработанного модуля прогнозирования загрузки производственных мощностей в ХОЛДИНГ ЛЕНПОЛИГРАФМАШ явилось повышение информативности о сроках выполнения текущих и поступающих производственных заказов, повышение оперативности информационной поддержки для принятия решений на уровне управления производством (в части корректировки приоритетов заказов, согласования сроков с заказчиками, отправки части деталей и сборочных единиц на кооперацию). Дополнительный эффект от внедрения разработанного модуля получен за счет применения результатов прогнозирования в области диспетчеризации производства для отслеживания сроков фактического выполнения этапов производства и сроков начала и окончания обработки деталей и сборочных единиц в каждом цехе.

Основным результатом выполнения работы в части разработки алгоритмов прогнозирования производства стал программный продукт, позволивший решить ключевые задачи по определению прогнозных сроков изготовления изделий, находящихся в составе производственных заказов, без проведения детального внутрицехового планирования на длительный горизонт планирования.

Также данный программный продукт позволил снизить нагрузку на модуль внутрицехового производственного планирования, благодаря разработанному алгоритму взаимодействия модуля межцехового прогнозирования производства с модулем внутрицехового планирования, позволяющему передавать информацию о работах, которые необходимо запланировать на уровне внутрицехового производственного планирования на заданный горизонт планирования.

Однако следует учесть, что получаемые в результате работы программы прогнозы производства являются лишь приближенными к действительно возможным ввиду наличия вероятности появления непредвиденных ситуаций в период выполнения производственного процесса (связанных как с самим предприятием, так и его внешним окружением). Результаты можно применить для автоматизации серийного, дискретного производства. Внедрение автоматизированной системы прогнозирования производства позволяет добиться повышения технико-экономической эффективности за счет:

- возможности варьирования приоритетов заказов от различных контрагентов с пересчетом прогноза по портфелю заказов без детализированного планирования;
- использования на внутрицеховом уровне информации о сроках выполнения работ, учитывающих сроки изготовления всего портфеля заказов на длительный горизонт;
- возможности выполнять внутрицеховое перепланирование без затрагивания произведенных прогнозных расчетов на длительную перспективу на межцеховом уровне;
- увеличения количества выполненных заказов за счет выявления и задействования свободных производственных мощностей, выявленных в результате построения прогноза.

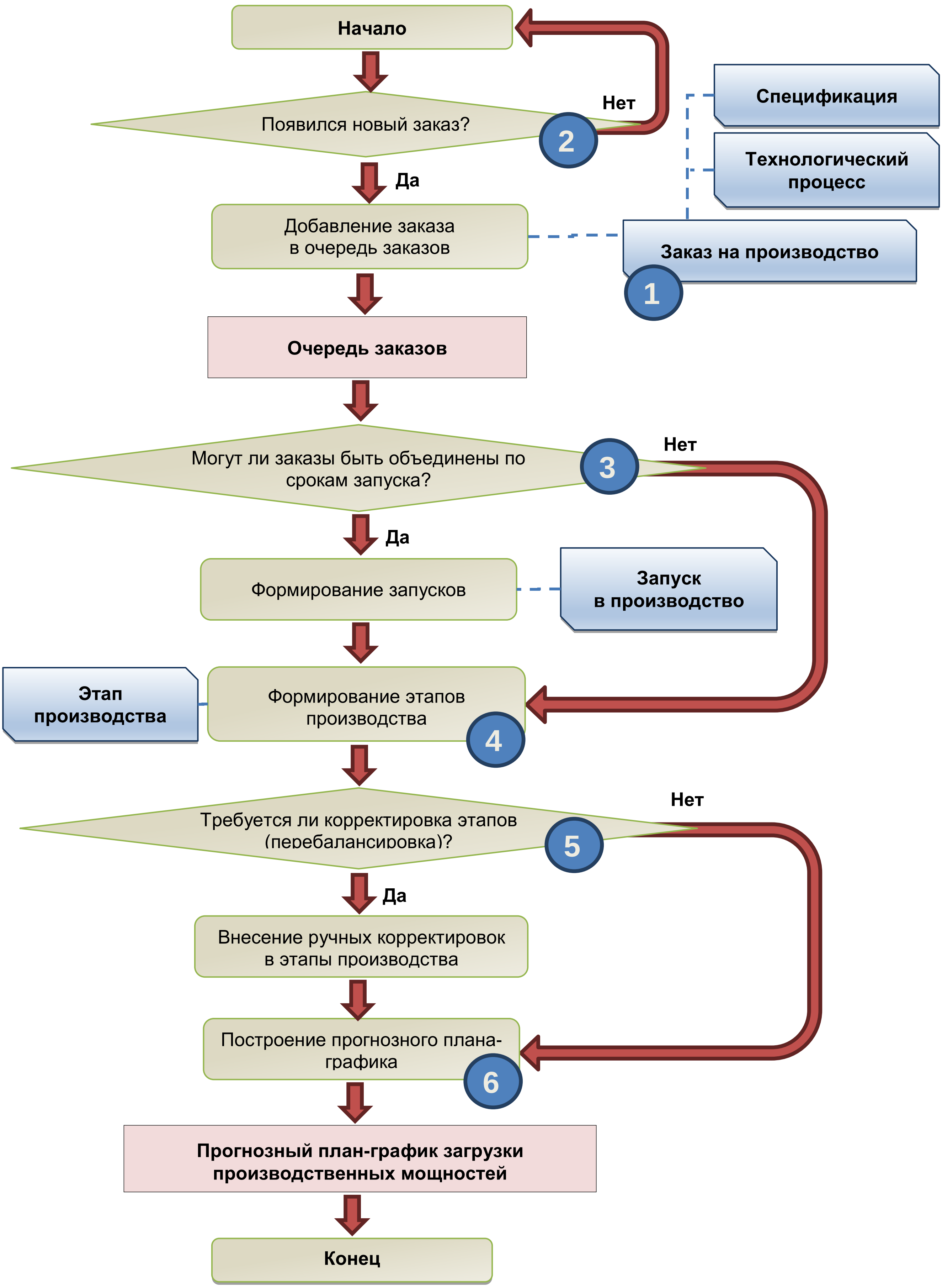


Рисунок 2.1.2 - Алгоритм прогнозирования межцеховой загрузки

производственных мощностей

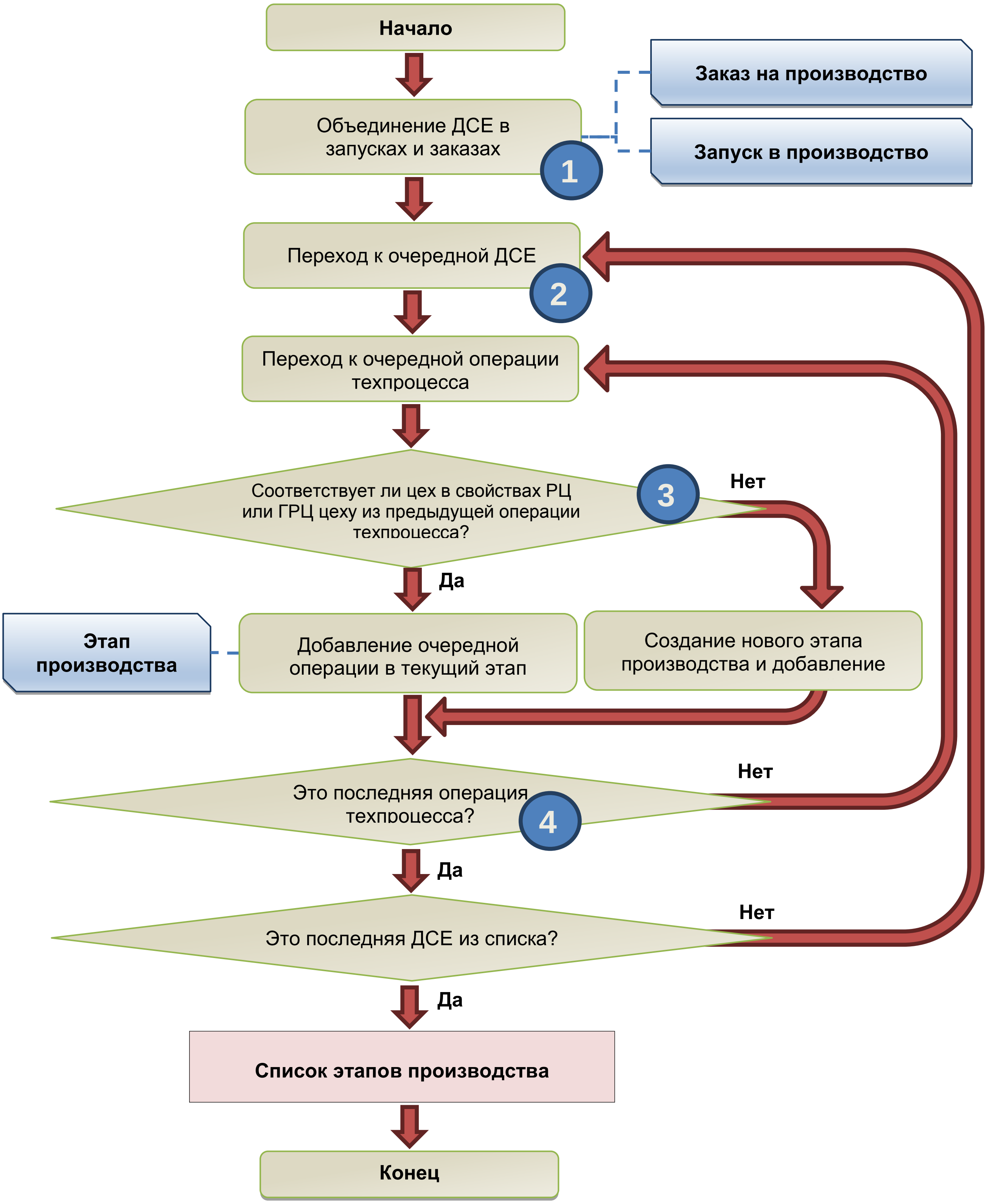


Рисунок 2.1.3 - Алгоритм формирования этапов производства для целей прогнозирования

2.2. Теория игр: игровые модели

Теория игр – раздел исследования операций, в котором изучаются процессы принятия решений в условиях конфликта. Другими словами, теория игр дает математический прогноз конфликтной ситуации. Для возможности проведения анализа конфликта, необходимо построить её абстрактную модель, которую будем называть **игрой**. Стороны, участвующие в конфликте, называются **игроками**, а исход конфликта — **выигрышем**.

Платежная матрица (матрица эффективности, матрица игры) включает все значения выигрышей (в конечной игре). Пусть игрок 1 имеет m стратегий A_i, а игрок 2 - n стратегий B_j, $(i=1,...,m, \quad j=1,...,n)$. Игра может быть названа игрой $m \times n$. Представим матрицу эффективности игры двух лиц с нулевой суммой, сопроводив ее необходимыми обозначениями (табл. 2.2.1).

Таблица 2.2.1

Игрок 1 \ Игрок 2	B_1	B_2	……	B_n	α_i
A_1	a_{11}	a_{12}	……	a_{1n}	α_1
A_2	a_{21}	a_{22}	……	a_{2n}	α_2
…………………………	……	……	……	……	……
A_m	a_{m1}	a_{m2}	……	a_{mn}	α_m
β_j	β_1	β_2	…….	β_n	

В данной матрице элементы a_{ij} – значения выигрышей игрока 1 – могут означать и математическое ожидание выигрыша (среднее значение), если выигрыш является случайной величиной. Величины α_i,– соответственно минимальные значения элементов a_{ij} по строкам и β_j - максимальные по столбцам. Их содержательный смысл будет отражен в следующих параграфах.

Целью каждого участника игры является получение возможного большего выигрыша.

Для каждой формализованной игры вводятся **правила**, т.е. система условий, определяющая: варианты действий игроков; объем информации каждого игрока о поведении партнеров; выигрыш, к которому приводит каждая совокупность действий.

Выигрыш (или проигрыш) может быть задан количественно; например, можно оценить проигрыш - нулем, выигрыш - единицей, а ничью - $1/2$.

Выбор и осуществление одного из предусмотренных правилами действий называется **ходом** игрока. Ходы могут быть личными и случайными. **Личный ход** — это сознательный выбор игроком одного из возможных действий (например, ход в шахматной игре). **Случайный ход** — это случайно выбранное действие (например, выбор карты из перетасованной колоды). В дальнейшем мы будем рассматривать только личные ходы игроков.

Стратегией игрока называется совокупность правил, определяющих выбор его действия при каждом личном ходе в зависимости от сложившейся ситуации. Обычно в процессе игры при каждом личном ходе игрок делает выбор в зависимости от конкретной ситуации. Однако в принципе, возможно, что все решения приняты игроком заранее (в ответ на любую сложившуюся ситуацию). Это означает, что игрок выбрал определенную стратегию, которая может быть задана в виде списка правил или программы. (Так можно осуществить игру с помощью ЭВМ).

Для того чтобы решить игру, или найти решение игры, следует для каждого игрока выбрать стратегию, которая удовлетворяет условию **оптимальности**, т.е. один из игроков должен получать **максимальный выигрыш**, когда второй придерживается своей стратегии. В то же время второй игрок должен иметь **минимальный проигрыш**, если первый придерживается своей стратегии. Такие **стратегии** называются

оптимальными. Оптимальные стратегии должны также удовлетворять **условию устойчивости**, т.е. любому из игроков должно быть невыгодно отказаться от своей стратегии в этой игре.

Если **игра повторяется достаточно много раз**, то игроков может интересовать не выигрыш и проигрыш в каждой конкретной партии, а **средний выигрыш (проигрыш) во всех партиях**.

Цель теории игр: определение оптимальной стратегии для каждого игрока. При выборе оптимальной стратегии естественно предполагать, что оба игрока ведут себя разумно с точки зрения своих интересов.

Важнейшее ограничение теории игр: единственность выигрыша как показателя эффективности, в то время как в большинстве реальных задач имеется более одного показателя эффективности. Кроме того, как правило, возникают задачи, в которых интересы партнеров не обязательно антагонистические. Однако конфликты приводят к разным исходам, а значит, и к различным видам игр, для каждой из которых есть свой метод решения.

Игры классифицируются по целому списку направлений:

1. **По количеству игроков:** парные игры и игры n игроков.

Игра называется парной, если в ней участвуют два игрока, и множественной, если число игроков больше двух.

2. **По количеству стратегий:** конечные и бесконечные.

В конечной игре каждый из игроков имеет конечное число возможных стратегий. Если хотя бы один из игроков имеет бесконечное число возможных стратегий, игра является бесконечной.

3. **По характеру взаимоотношений:** бескоалиционные, коалиционные и кооперативные.

Если игроки не имеют право вступать в соглашения, образовывать коалиции, то такая игра относится к бескоалиционным; если игроки могут вступать в соглашения, создавать коалиции - коалиционной. Кооперативная игра - это игра, в которой заранее определены коалиции.

4. **По характеру выигрышей:** игры с нулевой суммой (антагонистические) и игры с ненулевой суммой (неантагонистические).

Игра с нулевой суммой предусматривает условие: «сумма выигрышей всех игроков в каждой партии равна нулю». Игры двух игроков с нулевой суммой относят к классу антагонистических. Естественно, выигрыш одного игрока при этом равен проигрышу другого. Игра, в которой нужно вносить взнос за право участия в ней, является игрой с ненулевой суммой. Конечная игра с ненулевой суммой называется биматричной игрой. Доказано, что игру n лиц с ненулевой суммой всегда можно преобразовать в игру $n+1$ лиц с нулевой суммой путем добавления “фиктивного игрока”.

5. **По количеству ходов:** одношаговые и многошаговые.

Одношаговые игры заканчиваются после одного хода каждого игрока. Так, в матричной игре после одного хода каждого из игроков происходит распределение выигрышей.

Многошаговые игры бывают позиционными, стохастическими, дифференциальными и др.

6. **В зависимости от состояния информации:** игры с полной и неполной информацией.

Если каждый игрок на каждом ходу игры знает все ранее примененные другими игроками на предыдущих ходах стратегии, такая игра определяется как игра с полной информацией.

Если игроку не все стратегии предыдущих ходов других игроков известны, то игра классифицируется как игра с неполной информацией.

Мы далее убедимся, что игра с полной информацией имеет решение. Решением будет седловая точка при чистых стратегиях.

Степень неполноты информации. По этому критерию игры подразделяются на статистические (в условиях частичной неопределенности) и стратегические (в условиях полной неопределенности). Игры с природой часто относят к статистическим играм. В статистической игре имеется возможность получения информации на основе статистического эксперимента, при котором вычисляется или оценивается распределение вероятностей состояний (стратегий) природы. С теорией статистических игр тесно связана теория принятия экономических решений.

7. **По виду выигрыша:** матричные, биматричные и непрерывные.

Матричная игра - конечная игра двух игроков с нулевой суммой. В общем случае ее платежная матрица является прямоугольной (см. таблицу 2.2.1). Номер строки матрицы соответствует номеру стратегии, применяемой игроком 1. Номер столбца соответствует номеру стратегии игрока 2. Выигрыш игрока 1 является элементом матрицы. Выигрыш игрока 2 равен проигрышу игрока 1. Матричные игры всегда имеют решения в смешанных стратегиях. Они могут быть решены методами линейного программирования.

Биматричная игра - конечная игра двух игроков с ненулевой суммой. Выигрыши каждого игрока задаются своей матрицей, в которой строка соответствует стратегии игрока 1, а столбец — стратегии игрока 2. Однако элемент первой матрицы показывает выигрыш игрока 1, а элемент второй матрицы - выигрыш игрока 2. Для биматричных игр так же, как и для матричных, разработана теория оптимального поведения игроков.

Если функция выигрышей каждого игрока в зависимости от стратегий является непрерывной, игра считается непрерывной.

2.3. Нижняя и верхняя цена игры. Чистые стратегии. Седловая точка

Рассмотрим матричную игру, представленную матрицей выигрышей $m \times n$, где число строк $i = 1, \ldots, m$, а число столбцов $j = 1, \ldots, n$.

Применим принцип получения максимального гарантированного результата при наихудших условиях. Игрок 1 стремится принять такую стратегию, которая должна обеспечить максимальный проигрыш игрока 2. Соответственно игрок 2 стремится принять стратегию, обеспечивающую минимальный выигрыш игрока 1. Рассмотрим оба этих подхода.

Подход игрока 1. Он должен получить максимальный гарантированный результат при наихудших условиях. Значит, при выборе отвечающей этим условиям своей чистой стратегии он должен выбрать гарантированный результат в наихудших условиях, т.е. наименьшее значение своего выигрыша, которое обозначим

$$\alpha_i = \min_j a_{ij} \tag{2.3.1}$$

Чтобы этот гарантированный эффект в наихудших условиях был максимальным, нужно из всех α_i, выбрать наибольшее значение. Обозначим его α и назовем **чистой нижней ценой игры** («**максимин**»):

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_{ij} \tag{2.3.2}$$

Таким образом, максиминной стратегии отвечает строка матрицы, которой соответствует элемент α_i. Какие бы стратегии ни применял игрок 2, игрок 1 максиминной чистой стратегией гарантировал себе выигрыш, не меньший, чем α_i. Таково оптимальное поведение игрока 1.

Подход игрока 2. Своими оптимальными стратегиями он стремится уменьшить выигрыш игрока 1, поэтому при каждой j-й чистой стратегии он отыскивает величину своего максимального проигрыша

$$\beta_j = \max_i a_{ij} \tag{2.3.3}$$

в каждом j-м столбце, т.е. определяет максимальный выигрыш игрока 1, если игрок 2 применит j-ю чистую стратегию. Из всех своих n j-х чистых стратегий он отыскивает такую, при которой игрок 1 получит минимальный выигрыш, т.е. определяет **чистую верхнюю цену игры** («**минимакс**»):

$$\beta = \min_j \beta_j = \min_j \max_i a_{ij} \qquad (2.3.4)$$

Чистая верхняя цена игры показывает, какой максимальный выигрыш может гарантировать игрок 1, применяя свои чистые стратегии, - выигрыш, не меньший, чем α. Игрок 2 за счет указанного выше выбора своих чистых стратегий не допустит, чтобы игрок 1 мог получить выигрыш, больший, чем β. Таким образом, минимаксная стратегия отображается столбцом платежной матрицы, в котором находится элемент β. Она является оптимальной чистой гарантирующей стратегией игрока 2, если он ничего не знает о действиях игрока 1.

Принцип, диктующий игрокам выбор наиболее "осторожных" минимаксной и максиминной стратегий, называется **принципом минимакса**.

Чистая цена игры v - цена данной игры, если нижняя и верхняя ее цены совпадают:

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = v \qquad (2.3.5)$$

В этом случае игра называется **игрой с седловой точкой.**

Задача 2.3.1. Определить верхнюю и нижнюю цены при заданной матрице игры и указать максиминную и минимаксную стратегии. Представим матрицу игры с обозначениями стратегий β_j, α_i.

Таблица 2.3.1

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	1	2	3	1
A_2	4	5	6	4
β_j	4	5	6	

Решение. Определим нижнюю цену игры:

$\alpha_1 = 1$; $\alpha_2 = 4$, $\alpha = 4$ (см. столбец α_i).

Определим верхнюю цену игры:

$\beta_1 = 4$; $\beta_2 = 5$, $\beta_3 = 6$; $\beta = 4$ (см. строку β_j).

Таким образом, $\alpha = \beta = 4$, т.е.

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = \nu = 4.$$

Значит, $\nu = 4$ - чистая цена игры при стратегиях A_2 и B_1. Следовательно, имеем игру с седловой точкой.

Задача 2.3.2. Определим максиминную и минимаксную стратегии при заданной матрице эффективности.

Таблица 2.3.2

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	2	7	6	10	2
A_2	8	4	9	5	4
β_j	8	7	9	10	

Решение. Определим максиминную стратегию:

$\alpha_1 = 2$; $\alpha_2 = 4$, $\alpha = 4$ (см. столбец α_i).

Максиминная стратегиях - строка A_2.

Определим минимаксную стратегию:

$\beta_1 = 1$; $\beta_2 = 7$, $\beta_3 = 9$; $\beta_4 = 10$; $\beta = 7$ (см. столбец β_j).

Максиминная стратегия – столбец B_2.

Здесь $\alpha < \beta$, следовательно, Седловой точки нет.

Если матрица игры содержит элемент, минимальный в своей строке и максимальный в своем столбце, то он, как уже сказано выше, является седловой точкой. В этом случае мы имеем игру с седловой точкой.

Пусть в игре с седловой точкой один игрок придерживается седловой точки, тогда другой получит лучший результат, если также будет придерживаться этой точки. Лучшее поведение игрока не должно повлечь уменьшение его выигрыша. Зато худшее поведение может привести к этому.

В данном случае решением игры являются:

• чистая стратегия игрока 1;

• чистая стратегия игрока 2;

• седловой элемент.

Оптимальные чистые стратегии — это чистые стратегии, образующие седловую точку.

В игре без седловой точки, если игрок 1 информирован о стратегии, принятой игроком 2, он сможет принять оптимальную стратегию, которая не совпадает с максиминной.

Задача 2.3.3. Дана матрица игры

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 & 6 & 11 \\ 8 & 4 & 12 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

Допустим, игроку 1 стало известно, что игрок 2 принял минимаксную стратегию. Игрок 1 должен выбрать оптимальную стратегию при условии, что B_2 – стратегия игрока 2 ($\beta = 5$).

Решение. Определим максиминную стратегию игрока 1:
$\alpha_1 = 3$; $\alpha_2 = 4$, $\alpha = 4$.

Стратегия игрока 1 - A_2 - максиминная.

Выберем оптимальную стратегию для игрока 1. Ею будет не максиминная A_2, дающая игроку 1 выигрыш $\alpha = 4$, а та стратегия, которая соответствует $\max_i a_{ij}$. В этом случае его максимальный гарантированный выигрыш будет равен верхней цене игры $\beta = 5$, поэтому он выберет свою оптимальную стратегию A_1, зная, что игрок 2 выбрал свою стратегию B_2.

Таким образом, рассмотренная задача дает результат, отличный от результата при игре с седловой точкой.

Стратегия является **оптимальной**, если ее применение обеспечит игроку наибольший гарантированный выигрыш при любых возможных стратегиях другого игрока.

В задаче 2.3.3 показано, что бывают ситуации, когда игрок 1 может получить выигрыш, превосходящий максиминный, если ему известны намерения игрока 2.

При многократном повторении игры в сходных условиях можно добиться гарантированного среднего выигрыша, превосходящего для игрока 1 максиминный.

2.4. Смешанные стратегии

Если в матричной игре отсутствует седловая точка в чистых стратегиях, то находят верхнюю и нижнюю цены игры. Они показывают, что игрок 1 не получит выигрыша, превосходящего верхнюю цену игры, и что игроку 1 гарантирован выигрыш, не меньший нижней цены игры. В примере 2.3.3 игрок 1 получил по своей оптимальной стратегии A_1, отличной от максиминной, выигрыш, равный верхней цене игры. Такова плата за информированность о стратегии игрока 2. Это крайний случай. Не улучшится ли результат игрока 1, если информация о действиях противной стороны будет отсутствовать, но игрок будет многократно применять чистые стратегии случайным образом с определенной вероятностью?

В такой ситуации, оказывается, можно получать выигрыши, в среднем большие нижней цены игры, но меньшие верхней.

Смешанная стратегия игрока - это полный набор применения его чистых стратегий при многократном повторении игры в одних и тех же условиях с заданными вероятностями.

Подведем итоги сказанного и перечислим условия применения смешанных стратегий:

• игра без седловой точки;

• игроки используют случайную смесь чистых стратегий с заданными вероятностями;

• игра многократно повторяется в сходных условиях;

• при каждом из ходов ни один игрок не информирован о выборе стратегии другим игроком;

• допускается осреднение результатов игр.

Применяются следующие обозначения смешанных стратегий:

Для игрока 1 смешанная стратегия, заключающаяся в применении чистых стратегий A_1, $A_2,...,$ A_m с соответствующими вероятностями p_1, $p_2,...,$ p_m,

$$S_1 = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix}, \tag{2.4.1}$$

где $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1,\ p_i \geq 0$.

Для игрока 2

$$S_2 = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_m \\ q_1 & q_2 & \dots & q_m \end{pmatrix}, \tag{2.4.2}$$

где $\sum_{j=1}^{m} q_j = 1, q_j \geq 0$, q_j – вероятность применения чистой стратегии B_j.

В случае, когда $p_i = 1$, для игрока 1 имеем чистую стратегию:

$$S_1 = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & ,..., & A_i & ,..., & A_m \\ 0 & 0 & ,..., & 1 & ,..., & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.4.3}$$

Чистые стратегии игрока являются единственно возможными несовместными событиями. В матричной игре, зная матрицу A (она относится и к игроку 1, и к игроку 2), можно определить при заданных векторах $\vec{p}$ и $\vec{q}$ средний выигрыш (математическое ожидание эффекта) игрока 1:

$$M\left(A, \vec{p}, \vec{q}\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} p_i q_j\ , \tag{2.4.4}$$

где $\vec{p}$ и $\vec{q}$ - векторы; p_i и q_j - компоненты векторов.

Путем применения своих смешанных стратегий игрок 1 стремится максимально увеличить свой средний выигрыш, а игрок 2 - довести этот эффект до минимально возможного значения.

Игрок 1 стремится достигнуть

$$\beta = \min_{\vec{q}} \max_{\vec{p}} M\left(A, \vec{p}, \vec{q}\right). \qquad (2.4.5)$$

Игрок 2 добивается того, чтобы выполнялось условие

$$\alpha = \max_{\vec{p}} \min_{\vec{q}} M\left(A, \vec{p}, \vec{q}\right). \qquad (2.4.6)$$

Обозначим $\vec{p}_0$ и $\vec{q}_0$ векторы, соответствующие оптимальным смешанным стратегиям игроков 1 и 2, т.е. такие векторы $\vec{p}_0$ и $\vec{q}_0$, при которых будет выполнено равенство

$$\min_{\vec{q}} \max_{\vec{p}} M\left(A, \vec{p}, \vec{q}\right) = \max_{\vec{p}} \min_{\vec{q}} M\left(A, \vec{p}, \vec{q}\right) = M\left(A, \vec{p}_0, \vec{q}_0\right). \qquad (2.4.7)$$

Цена игры γ – средний выигрыш игрока 1 при использовании обоими игроками смешанных стратегий.

Следовательно, решением матричной игры являются:

1) $\vec{p}_0$ - оптимальная смешанная стратегия игрока 1;

2) $\vec{q}_0$ - оптимальная смешанная стратегия игрока 2;

3) γ - цена игры.

Смешанные стратегии будут оптимальными ($\vec{p}_0$ и $\vec{q}_0$), если они образуют седловую точку для функции $M\left(A, \vec{p}, \vec{q}\right)$, т.е.

$$M\left(A, \vec{p}, \vec{q}_0\right) \le M\left(A, \vec{p}_0, \vec{q}_0\right) \le M\left(A, \vec{p}_0, \vec{q}\right). \qquad (2.4.8)$$

Теорема 2.4.1. (основная теорема теории матричных игр). Для матричной игры с любой матрицей А величины $\alpha = \max_{\vec{p}} \min_{\vec{q}} M\left(A, \vec{p}, \vec{q}\right)$ и $\beta = \min_{\vec{q}} \max_{\vec{p}} M\left(A, \vec{p}, \vec{q}\right)$ существуют и равны между собой: $\alpha = \beta = \gamma$.

Из теоремы следует, что всякая матричная игра имеет цену; игрок в матричной игре всегда имеет оптимальную стратегию.

Следует отметить, что при выборе оптимальных стратегий игроку 1 всегда будет гарантирован средний выигрыш, не меньший, чем цена игры, при любой фиксированной стратегии игрока 2 (и, наоборот, для игрока 2).

Активными стратегиями игроков 1 и 2 называют стратегии, входящие в состав оптимальных смешанных стратегий соответствующих игроков с вероятностями, отличными от нуля. Значит, в состав оптимальных смешанных стратегий игроков могут входить не все априори заданные их стратегии.

Теорема 2.4.2. (об активных стратегиях). Если один из игроков придерживается своей оптимальной смешанной стратегии, то выигрыш остается неизменным и равным цене игры γ, если второй игрок не выходит за пределы своих активных стратегий.

Эта теорема имеет большое практическое значение — она дает конкретные модели нахождения оптимальных стратегий при отсутствии седловой точки.

Решить игру - означает найти цену игры и оптимальные стратегии.

Рассмотрение методов нахождения оптимальных смешанных стратегий для матричных игр начнем с простейшей игры, описываемой матрицей 2x2.

Игры с седловой точкой специально рассматриваться не будут. Если получена седловая точка, то это означает, что имеются невыгодные стратегии, от которых следует отказываться. При отсутствии седловой точки можно получить две оптимальные смешанные стратегии. Как уже отмечалось, эти смешанные стратегии записываются так:

$$S_1^0 = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}, \tag{2.4.9}$$

$$S_2^0 = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix}. \tag{2.4.10}$$

Для того чтобы их найти, воспользуемся теоремой об активных стратегиях.

Если игрок 1 придерживается своей оптимальной стратегии S_1^0, то его средний выигрыш будет равен цене игры γ, какой бы активной стратегией ни пользовался игрок 2. Для игры 2×2 любая чистая стратегия противника является активной, если отсутствует седловая точка. Выигрыш игрока 1 (проигрыш игрока 2) — случайная величина, математическое ожидание (среднее значение) которой является ценой игры. Поэтому средний выигрыш игрока 1 (оптимальная стратегия) будет равен γ и для 1-й, и для 2-й стратегии противника.

Пусть игра задана платежной матрицей: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. (2.4.11)

Средний выигрыш игрока 1, если он использует оптимальную смешанную стратегию S_1^0, а игрок 2 — чистую стратегию B_1 (это соответствует 1-му столбцу платежной матрицы A), равен цене игры γ: $a_{11}p_1^0+a_{21}p_2^0=\gamma$. Тот же средний выигрыш получает игрок 1, если 2-й игрок применяет стратегию B_2, т.е. $a_{12}p_1^0+a_{22}p_2^0=\gamma$.

Учитывая, что $p_1^0+p_2^0=1$, получаем систему уравнений для определения оптимальной стратегии S_1^0 и цены игры γ:

$$\begin{cases} a_{11}p_1^0+a_{21}p_2^0=\gamma \\ a_{12}p_1^0+a_{22}p_2^0=\gamma \\ p_1^0+p_2^0=1 \end{cases} \quad (2.4.12)$$

Решая эту систему, получим оптимальную стратегию p_1^0 и p_2^0:

$$\begin{aligned} p_1^0 &= \frac{a_{22}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}} \\ p_2^0 &= \frac{a_{11}-a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}} \end{aligned}. \quad (2.4.13)$$

Зная p_1^0 и p_2^0 находим γ:

$$\gamma=\frac{a_{22}a_{11}-a_{12}a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}. \quad (2.4.14)$$

Применяя теорему об активных стратегиях при отыскании S_2^0 оптимальной стратегии игрока 2, получаем, что при любой чистой стратегии игрока 1 (A_1 или A_2) средний проигрыш игрока 2 равен цене игры γ, т.е.

$$\begin{cases} a_{11}q_1^o + a_{12}q_2^o = \gamma \\ a_{21}q_1^0 + a_{22}q_2^o = \gamma \\ q_1^0 + q_2^0 = 1 \end{cases}. \qquad (2.4.15)$$

Тогда оптимальная стратегия определяется формулами:

$$\begin{aligned} q_1^0 &= \frac{a_{22}-a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}} \\ q_2^0 &= \frac{a_{11}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}} \end{aligned}. \qquad (2.4.16)$$

Задача решена, так как найдены векторы $\vec{q}_0\left(q_1^0, q_2^0\right)$, $\vec{p}_0\left(p_1^0, p_2^0\right)$ и цена игры γ.

Имея матрицу платежей A, можно решить задачу графически. При этом методе алгоритм решения весьма прост:

1. По оси абсцисс откладывается отрезок единичной длины.
2. По оси ординат откладываются выигрыши при стратегии A_1.
3. На линии, параллельной оси ординат, в точке 1 откладываются выигрыши при стратегии A_2.
4. Концы отрезков обозначаются $a_{11}-b_{11}$, $a_{12}-b_{21}$, $a_{22}-b_{22}$, $a_{21}-b_{12}$ и проводятся две прямые линии $b_{11}b_{12}$ и $b_{21}b_{22}$
5. Определяется ордината точки пересечения c. Она равна γ.

Данный метод имеет достаточно широкую область приложения. Это основано на **общем свойстве игр** $m\times n$, состоящем в том, что в любой игре $m\times n$ каждый игрок имеет оптимальную смешанную стратегию, в которой число чистых стратегий не больше, чем $\min(m,n)$. Из этого свойства можно получить известное **следствие**: в любой игре $2\times n$ и $m\times 2$ каждая оптимальная стратегия S_1^0 и S_2^0 содержит не более двух активных стратегий. Значит, любая игра $2\times n$ и $m\times 2$ может быть сведена к игре 2×2 Следовательно, игры $2\times n$ и $m\times 2$ можно решить графическим методом.

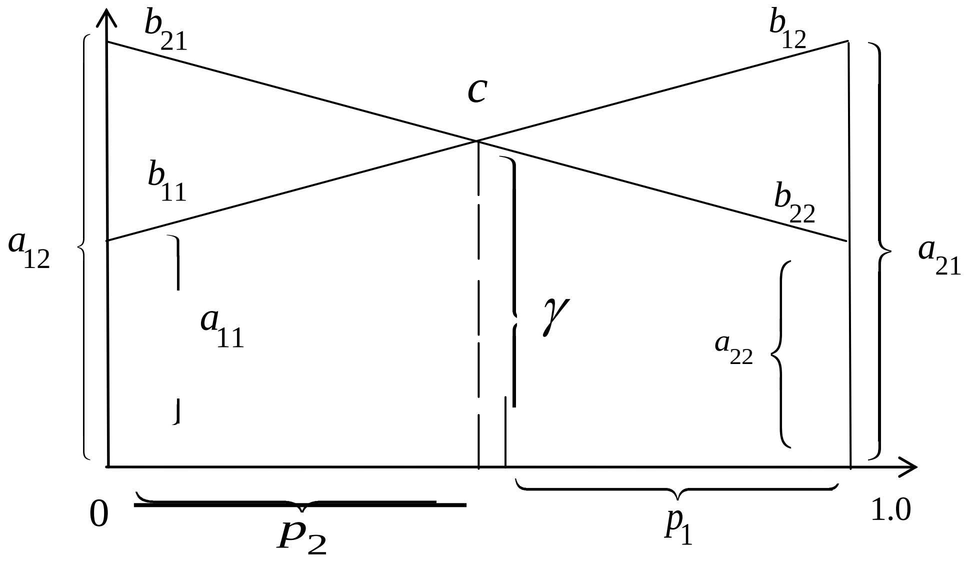


Рисунок 2.4.1. - Оптимальная смешанная стратегия

Рассмотрим некоторые практические задачи, в которых используются критерии игр для оценки наиболее эффективного поведения оперирующей стороны.

Задача 2.4.1. Выбрать оптимальный режим работы новой системы компьютеров, состоящей из компьютеров типов A_1 и A_2. Известны выигрыши от внедрения каждого типа компьютеров в зависимости от внешних условий, если сравнить со старой системой. При использовании компьютеров типов A_1 и A_2 в зависимости от характера решаемых задач B_1 и B_2 (долговременные и краткосрочные) будет разный эффект. Предполагается, что максимальный выигрыш соответствует наибольшему значению критерия эффекта от замены техники старого поколения на компьютеры типов A_1 и A_2.

Итак, дана матрица игры, где A_1, A_2 - стратегии руководителя; B_1, B_2 - стратегии, отражающие характер решаемых задач.

Таблица 2.4.1

Игрок 1 \ Игрок 2	B_1	B_2	α_i
A_1	0.3	0.8	0.3
A_2	0.7	0.4	0.4
β_j	0.7	0.8	

Требуется найти оптимальную смешанную стратегию руководителя и гарантированный средний результат, т.е. определить, какую долю времени должны использоваться компьютеры типов A_1 и A_2.

Решение. Запишем условия в принятых индексах:

$a_{11} = 0.3$, $a_{12} = 0.8$, $a_{21} = 0.7$, $a_{22} = 0.4$.

Определим нижнюю и верхнюю цены игры:

$\alpha_1 = 0.3$; $\alpha_2 = 0.4$, $\alpha = 0.4$.

$\beta_1 = 0.7$; $\beta_2 = 0.8$, $\beta = 0.7$.

Получаем игру без седловой точки, так как

$$\max_i \min_j a_{ij} = a_{22} = 0.4,$$

$$\min_j \max_i a_{ij} = a_{21} = 0.7.$$

Максиминная стратегия руководителя компьютерного центра – A_2. Для этой стратегии гарантированный выигрыш равен = 0.4 (40 %) по сравнению со старой системой.

Решение для определения γ, p_1 и p_2 проведем графически (рис. 2.4.2).

Алгоритм решения.

1. По оси абсцисс отложим отрезок единичной длины.
2. По оси ординат отложим выигрыши при стратегии A_1.
3. На вертикали в точке 1 отложим выигрыши при стратегии A_2.
4. Проводим прямую $b_{11}b_{12}$, соединяющую точки $a_{11}a_{21}$.

5. Проводим прямую $b_{21}b_{22}$, соединяющую точки $a_{12}b_{22}$.

6. Определяем ординату точки пересечения c линий $b_{11}b_{12}$ и $b_{21}b_{22}$. Она равна γ.

7. Определим абсциссу точки пересечения c. Она равна p_2, а $p_1 = 1 - p_2$.

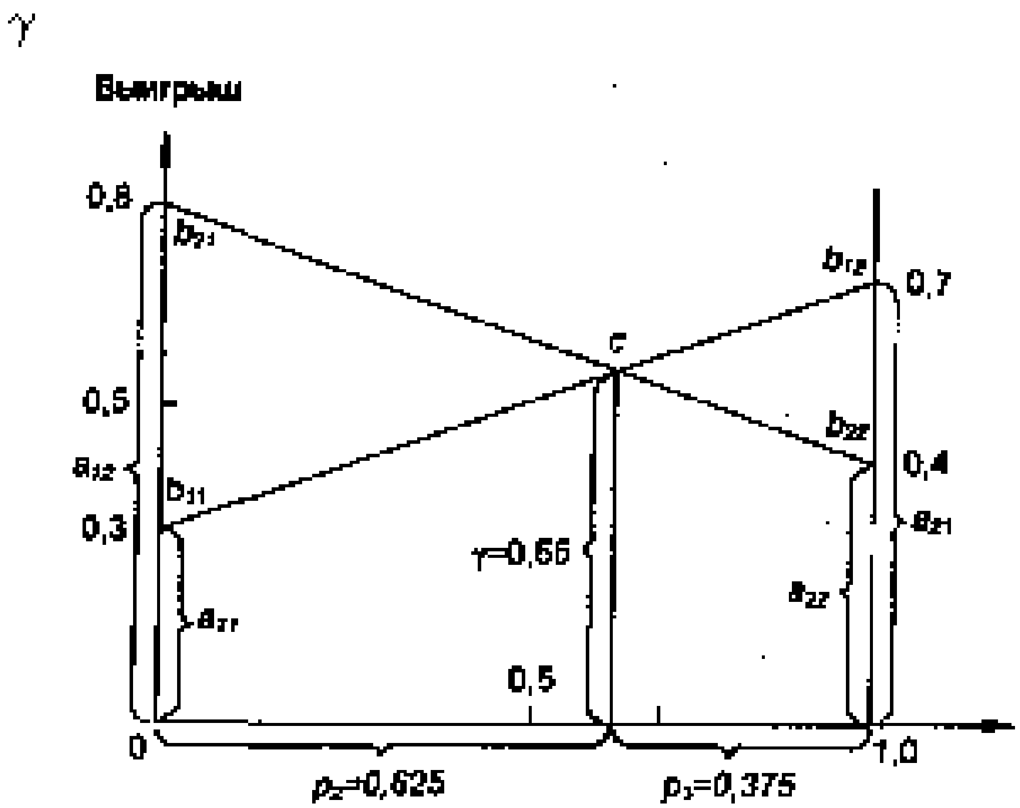


Рисунок 2.4.2. - Графическая интерпретация алгоритма решения

Выпишем решение и представим оптимальную стратегию игры:

$$p_1 = 0.3751;\ p_2 = 0.625;\ \gamma = 0.55;\quad S^o = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0.375 & 0.625 \end{pmatrix}.$$

Вывод. При установке компьютеров новой системы, если неизвестны условия решения задач заказчика, на работу компьютеров типа A_1 должно приходиться 37.5 % времени, а на работу компьютеров типа A_2 - 62.5 %. При этом выигрыш составит 55 % по сравнению с предыдущим поколением компьютеров.

2.5. Мажорирование стратегий по строкам и столбцам

Мажорирование представляет отношение между стратегиями, наличие которого во многих практических случаях дает возможность сократить размеры исходной платежной матрицы игры.

Рассмотрим это понятие на примере матрицы

$$\begin{pmatrix} -0.5 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Рассуждая с позиции игрока 2, можно обнаружить преимущество его третьей стратегии перед второй, поскольку при первой стратегии игрока 1 выигрыш игрока 2 равен (-3) (вторая стратегия) и 1 (третья стратегия), а при второй стратегии игрока 1 выигрыш игрока 2 равен (-2) (вторая стратегия) и (-0.5) (третья стратегия).

Таким образом, при любой стратегии игрока 1 игроку 2 выгоднее применять свою третью стратегию по сравнению со второй; при наличии третьей стратегии игрок 2, если он стремится играть оптимально, никогда не будет использовать свою вторую стратегию, поэтому ее можно исключить из игры, т.е. в исходной платежной матрице можно вычеркнуть 2-й столбец:

$$\begin{pmatrix} -0.5 & -1 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

С позиции игрока 1 его первая стратегия оказывается хуже второй, так как по первой стратегии он только проигрывает. Поэтому первую стратегию можно исключить, а матрицу игры преобразовать к виду:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Учитывая интересы игрока 2, следует оставить только его первую стратегию, поскольку, выбирая вторую стратегию, игрок 2 оказывается в проигрыше (0.5 - выигрыш игрока 1), и матрица игры принимает простейший вид: (0), т.е. имеется седловая точка.

Мажорирование можно распространить и на смешанные стратегии. Если элементы одной строки не все меньше (или равны) соответствующих элементов других строк, но все меньше (или равны) некоторых выпуклых линейных комбинаций соответствующих элементов других строк, то эту стратегию можно исключить, заменив ее смешанной стратегией с соответствующими частотами использования чистых стратегий.

В качестве иллюстрации к сказанному рассмотрим матрицу игры:

$$\begin{pmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 8 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Для первых двух чистых стратегий игрока 1 возьмем частоты их применения (вероятности) равными 0.25 и 0.75.

Третья стратегия игрока 1 мажорируется линейной выпуклой комбинацией первой и второй чистых стратегий, взятых с частотами 0.25 и 0,75 соответственно, т.е. смешанной стратегией

$$24 \cdot 0.25 + 0 \cdot 0.75 = 6 > 4;$$

$$0 \cdot 0.25 + 8 \cdot 0.75 = 6 > 5.$$

Поэтому третью стратегию игрока 1 можно исключить, используя вместо нее указанную выше смешанную стратегию.

Аналогично, если каждый элемент некоторого столбца больше или равен некоторой выпуклой линейной комбинации соответствующих элементов некоторых других столбцов, то этот столбец можно исключить из рассмотрения (вычеркнуть из матрицы).

Например, для матрицы $\begin{pmatrix} 10 & 0 & 6 \\ 0 & 10 & 7 \end{pmatrix}$ третья стратегия игрока 2 мажорируется смешанной стратегией из первой и второй его чистых стратегий, взятых с частотами 0.5 и 0.5:

$$10 \cdot 0.5 + 0 \cdot 0.5 = 5 < 6;$$

$$0 \cdot 0.5 + 10 \cdot 0.5 = 5 < 7.$$

Таким образом, исходная матрица игры эквивалентна матрице следующего вида: $\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$.

Как видно, возможности мажорирования смешанными стратегиями в отличие от чистых значительно менее прозрачны (нужно должным образом подобрать частоты применения чистых стратегий), но такие возможности есть, и ими полезно уметь пользоваться.

Рассмотрим экономическую задачу, сводящуюся к игровой модели.

Задача 2.5.1. Предприятие выпускает скоропортящуюся продукцию, которую может сразу отправить потребителю (стратегия A_1), отправить на склад для хранения (стратегия A_2) или подвергнуть дополнительной обработке (стратегия A_3) для длительного хранения. Потребитель может приобрести продукцию: немедленно (стратегия B_1), в течение небольшого времени (B_2), после длительного периода времени (B_3). В случае стратегий A_2 и A_3, предприятие несет дополнительные затраты на хранение и обработку продукции, которые не требуются для A_1, однако при A_2 следует учесть возможные убытки из-за порчи продукции, если потребитель выберет стратегии B_2 или B_3. Определить оптимальные пропорции продукции для применения стратегий A_1, A_2, A_3 руководствуясь "минимаксным критерием" (гарантированный средний уровень убытка) при матрице затрат, представленной табл. 2.5.1.

Таблица 2.5.1

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3
A_1	2	5	8
A_2	7	6	10
A_3	12	10	8

Решение. Получаем игру с платежной матрицей $P=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 7 & 6 & 10 \\ 12 & 10 & 8 \end{pmatrix}$. В этой матрице первую строку можно отбросить как невыгодную (ее элементы меньше соответствующих элементов второй строки). Матрица примет вид $P=\begin{pmatrix} 7 & 6 & 10 \\ 12 & 10 & 8 \end{pmatrix}$. Элементы первого столбца больше соответствующих элементов второго столбца, поэтому его можно отбросить.

Игра упростилась: $P=\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$.

По формулам (4.3.13) и (4.3.14) находим: $p_2^0=\dfrac{8-10}{6+8-10-10}=\dfrac{1}{3}$, $p_3^0=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$, $\gamma=\dfrac{6\cdot 1}{3}+\dfrac{10\cdot 2}{3}=\dfrac{26}{3}=8\dfrac{2}{3}$.

Вывод. Оптимальная стратегия производителя продукции $S_A^0=\left(0;\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3}\right)$, т.е. стратегия A_1 не применяется, **1/3** продукции отправляется на склад (стратегия A_2), **2/3** продукции дополнительно обрабатывается (стратегия A_3), при этом цена игры $\gamma=8\dfrac{2}{3}$.

2.6. Приведение матричной игры к паре двойственных задач линейного программирования

Игра $m\times n$ в общем случае не имеет наглядной геометрической интерпретации. Ее решение достаточно трудоемко при больших m и n, однако принципиальных трудностей не имеет, поскольку может быть сведено к решению задачи линейного программирования. Покажем это.

Пусть игра $m \times n$ задана платежной матрицей $p = (a_{ij})$, $i = 1,...,m$; $j = 1,...,n$. Игрок A обладает стратегиями A_1, A_2,..., A_m, игрок B - стратегиями B_1, $B_2, \ldots, B_n$. Необходимо определить оптимальные стратегии $S_A^0 = \left(p_1^0, p_2^0, ..., p_m^0\right)$ и $S_B^0 = \left(q_1^0, q_2^0, ..., q_n^0\right)$, где p_i^0, q_j^0 — вероятности применения соответствующих чистых стратегий A_i, B_j, $p_1^0 + p_2^0 + ... + p_m^0 = 1$, $q_1^0 + q_2^0 + ... + q_n^0 = 1$.

Оптимальная стратегия S_A^0 удовлетворяет следующему требованию. Она обеспечивает игроку A средний выигрыш, не меньший, чем цена игры v, при любой стратегии игрока B и выигрыш, равный цене игры v, при оптимальной стратегии игрока B. Без ограничения общности полагаем $v > 0$: этого можно добиться, сделав все элементы $a_{ij} \ge 0$. Если игрок A применяет смешанную стратегию $S_A^0 = \left(p_1^0, p_2^0, ..., p_m^0\right)$ против любой чистой стратегии B_j игрока B, то он получает средний выигрыш, или математическое ожидание выигрыша $a_j = a_{1j} p_1 + a_{2j} p_2 + ... + a_{mj} p_m$, $j = 1,...,n$ (т.е. элементы j-го столбца платежной матрицы почленно умножаются на соответствующие вероятности стратегий A_1, A_2,..., A_m и результаты складываются).

Для оптимальной стратегии S_A^0 все средние выигрыши не меньше цены игры v, поэтому получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} a_{11} p_1 + a_{21} p_2 + ... + a_{m1} p_m \ge v \\ a_{12} p_1 + a_{22} p_2 + ... + a_{m2} p_m \ge v \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n} p_1 + a_{2n} p_2 + ... + a_{mn} p_m \ge v. \end{cases} \qquad (2.6.1)$$

Каждое из неравенств можно разделить на число $v > 0$. Введем новые переменные:

$$x_1 = \frac{p_1}{v},\, x_2 = \frac{p_2}{v}, \ldots,\, x_m = \frac{p_m}{v}. \qquad (2.6.2)$$

Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m \geq 1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{m2}x_m \geq 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m \geq 1. \end{cases} \qquad (2.6.3)$$

Цель игрока A — максимизировать свой гарантированный выигрыш, т.е. цену игры v. Разделив на $v \neq 0$ равенство $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1$, получаем, что переменные x_i $(i = 1, \ldots, m)$ удовлетворяют условию: $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = \frac{1}{v}$.

Максимизация цены игры v эквивалентна минимизации величины $\frac{1}{v}$.

Поэтому задача может быть сформулирована следующим образом: определить значения переменных $x_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$ так, чтобы они удовлетворяли линейным ограничениям (4.5.3) и при этом линейная функция

$$Z = x_1 + x_2 + \ldots + x_m \qquad (2.6.4)$$

обращалась в минимум. Это задача линейного программирования. Решая задачу, получаем оптимальное решение $\left(p_1^0, p_2^0, \ldots, p_m^0\right)$ и оптимальную стратегию S_A^0.

Для определения оптимальной стратегии $S_B^0 = \left(q_1^0, q_2^0, \ldots, q_n^0\right)$ следует учесть, что игрок B стремится минимизировать гарантированный выигрыш, т.е. найти $\max \frac{1}{x}$. Переменные $q_1, q_2, \ldots, q_n$ удовлетворяют неравенствам:

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \ldots + a_{1n}q_n \leq v \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \ldots + a_{2n}q_n \leq v \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + \ldots + a_{mn}q_n \leq v, \end{cases} \qquad (2.6.5)$$

которые следуют из того, что средний проигрыш игрока B не превосходит цены игры, какую бы чистую стратегию не применял игрок A.

Если обозначить

$$y_1 = \frac{q_1}{v},\ y_2 = \frac{q_2}{v}, \ldots, y_n = \frac{q_n}{v}, \tag{2.6.6}$$

то получим систему неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \le 1 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \le 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n \le 1. \end{cases} \tag{2.6.7}$$

Переменные y_j $(j = 1,\ldots,n)$ удовлетворяют условию $y_1 + y_2 + \ldots + y_n = \frac{1}{v}$.

Игра свелась к следующей задаче: определить значения переменных $y_j \ge 0,\quad j = 1,\ldots,n,$ которые удовлетворяют системе неравенств и максимизируют линейную функцию

$$Z' = y_1 + y_2 + \ldots + y_n. \tag{2.6.8}$$

Решение задачи линейного программирования (2.6.6), (2.6.7) определяет оптимальную стратегию $S_B^0 = \left(q_1^0, q_2^0, \ldots, q_n^0\right)$.

При этом цена игры

$$v = \frac{1}{\max Z'} = \frac{1}{\min Z}. \tag{2.6.9}$$

Составив расширенные матрицы для задач (2.6.3), (2.6.4) и (2.6.7), (2.6.8), убеждаемся, что одна матрица получилась из другой транспонированием:

$$\begin{array}{cc} \geq & \leq \\ \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} & 1 \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} & 1 \\ \hline 1 & 1 & \dots & 1 & \min Z \end{array}\right) \leftrightarrow & \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 1 \\ \hline 1 & 1 & \dots & 1 & \max Z' \end{array}\right) \end{array}$$

Таким образом, задачи линейного программирования являются взаимно-двойственными. Очевидно, при определении оптимальных стратегий в конкретных задачах следует выбрать ту из взаимно-двойственных задач, решение которой менее трудоемко, а решение другой задачи найти с помощью теорем двойственности. Приведем пример задачи, которая описывается игровыми моделями $m \times n$ и может быть решена методами линейного программирования.

Задача 2.6.1. Предприятие может выпускать три вида продукции (A_1, A_2 и A_3), получая при этом прибыль, зависящую от спроса, который может быть в одном из четырех состояний (B_1, B_2, B_3, B_4). Дана матрица, ее элементы a_{ij} характеризуют прибыль, которую получит предприятие при выпуске i-и продукции с j-м состоянием спроса. Определить оптимальные пропорции в выпускаемой продукции, гарантирующие среднюю величину прибыли при любом состоянии спроса, считая его неопределенным.

Решение. Задача сводится к игровой модели, в которой игра предприятия A против спроса B задана платежной матрицей (см. табл. 2.6.1).

Прежде чем решать задачу, можно попытаться упростить игру, проведя анализ платежной матрицы и отбросив стратегии, заведомо невыгодные или дублирующие.

Таблица 2.6.1

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	3	6	8
A_2	9	10	4	2
A_3	7	7	5	4

Так, вторая стратегия (второй столбец матрицы (см. табл. 2.6.1)) является явно невыгодной для игрока B по сравнению с первой (элементы второго столбца больше элементов первого столбца), так как цель игрока B — уменьшить выигрыш игрока A. Поэтому второй столбец можно отбросить.

Получим матрицу размера **3×3**: $P=\begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 \\ 9 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Таблица 2.6.2

A_i \ B_j	B_1	B_3	B_4	α_i
A_1	3	6	8	3
A_2	9	4	2	2
A_3	7	5	4	4
β_j	9	6	8	6 \ 4

Определим нижнюю и верхнюю цены игры в таблице 2.6.2. Так как $\alpha \neq \beta$, то седловая точка отсутствует и оптимальное решение следует искать в смешанных стратегиях игроков: $S_A^0=\left(p_1^0,p_2^0,p_3^0\right)$ и $S_B^0=\left(q_1^0,q_2^0,q_3^0\right)$**.**

Обозначив $x_i=\dfrac{p_i}{v}$, $i=1,2,3$ и $y_j=\dfrac{q_j}{v}$, $j=1,2,3$ составим две взаимно-двойственные задачи линейного программирования (см. (2.6.2)-(2.6.3) и (2.6.6)-(2.6.7)).

1. $\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 + 7x_3 \geq 1 \\ 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 \geq 1 \\ 8x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 1 \end{cases}$
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$

$Z = x_1 + x_2 + x_3 \to \min$

2. $\begin{cases} 3y_1 + 6y_2 + 8y_3 \leq 1 \\ 9y_1 + 4y_2 + 2y_3 \leq 1 \\ 7y_1 + 5y_2 + 4y_3 \leq 1 \end{cases}$
$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0$

$Z' = y_1 + y_2 + y_3 \to \max$

Решаем 2 задачу симплексным методом, поскольку для нее первое базисное решение будет допустимым. Введем добавочные переменные и перейдем к уравнениям:

$$\begin{cases} 3y_1 + 6y_2 + 8y_3 + y_4 = 1 \\ 9y_1 + 4y_2 + 2y_3 + y_5 = 1 \\ 7y_1 + 5y_2 + 4y_3 + y_6 = 1. \end{cases}$$
$$y_j \geq 0,\ j = 1, 2, ..., 6$$

I шаг. Основные переменные — y_4, y_5, y_6; неосновные переменные — y_1, y_2, y_3.

$$\begin{cases} \boxed{y_4 = 1 - 3y_1 - 6y_2 - 8y_3} \\ y_5 = 1 - 9y_1 - 4y_2 - 2y_3 \\ y_6 = 1 - 7y_1 - 5y_2 - 4y_3 \end{cases}$$
$Z' = y_1 + y_2 + y_3.$

Базисное решение $Y_1 = (0;0;0;1;1;1)$ допустимое; переводим y_2 в основные; переводим y_4 в неосновные переменные.

II шаг. Основные переменные — y_2, y_5, y_6; неосновные переменные — y_1, y_3, y_4.

Получим после преобразований: $\begin{cases} y_2 = \dfrac{1}{6} - \dfrac{3}{6}y_1 - \dfrac{8}{6}y_3 - \dfrac{1}{6}y_4 \\ y_5 = \dfrac{1}{3} - 7y_1 + \dfrac{10}{3}y_3 + \dfrac{2}{3}y_4 \\ \boxed{y_6 = \dfrac{1}{6} - \dfrac{27}{6}y_1 - \dfrac{16}{6}y_3 + \dfrac{5}{6}y_4} \end{cases}$

$$Z' = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}y_1 - \frac{2}{6}y_3 - \frac{1}{6}y_4.$$

Базисное решение: $Y_2 = \left(0; \dfrac{1}{6}; 0; 0; \dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{6}\right)$. Переводим y_4 в основные; $y_1 = \min\left\{\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{21}; \dfrac{1}{27}\right\} = \dfrac{1}{27}$. Переводим y_6 в неосновные переменные.

III шаг. Основные переменные — y_1, y_2, y_5; неосновные переменные — y_1, y_3, y_4, y_6.

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{1}{27} - \dfrac{16}{27}y_3 + \dfrac{5}{27}y_4 - \dfrac{6}{27}y_6 \\ y_2 = \dfrac{4}{27} - \dfrac{28}{27}y_3 - \dfrac{7}{27}y_4 + \dfrac{1}{9}y_6 \\ y_5 = \dfrac{2}{27} + \dfrac{202}{27}y_3 - \dfrac{17}{27}y_4 + \dfrac{14}{9}y_6 \end{cases}$$

$$Z' = \frac{5}{27} - \frac{17}{27}y_3 - \frac{2}{27}y_4 - \frac{1}{9}y_6.$$

Базисное решение: $Y_3 = \left(\dfrac{1}{27}; \dfrac{4}{27}; 0; 0; \dfrac{2}{27}; 0\right)$.

Так как отсутствуют положительные коэффициенты при неосновных переменных, то критерий оптимальности выполнен, $\max Z' = \dfrac{5}{27}$ и базисное решение $Y_3 = \left(\dfrac{1}{27}; \dfrac{4}{27}; 0; 0; \dfrac{2}{27}; 0\right)$ является оптимальным.

Установим соответствие между переменными взаимно-двойственных задач и определим оптимальное базисное решение задачи с помощью теорем двойственности:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_4 & y_5 & y_6 & y_1 & y_2 & y_3 \\ \frac{2}{27} & 0 & \frac{1}{9} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{17}{27}. \end{array}$$

Оптимальное базисное решение: $\left(\frac{2}{27},0,\frac{1}{9},\frac{1}{2},0,\frac{17}{27}\right)$, причем $\min Z = \max Z' = \frac{5}{27}$. Из соотношений (2.6.9) находим цену игры $v = \frac{1}{\max Z'} = \frac{1}{\min Z} = \frac{27}{5} = 5.4$. Оптимальную стратегию $S_A^0 = \left(p_1^0, p_2^0, p_3^0\right)$ находим, используя (5.5.2): $p_i^0 = x_i \cdot v, \quad i = 1,2,3,$ т.е. $p_1^0 = 5.4 \cdot \frac{2}{27} = 0.4$, $p_2^0 = 5.4 \cdot 0 = 0$, $p_3^0 = 5.4 \cdot \frac{1}{9} = 0{,}6$, $S_A^0 = \left(0.4; 0; 0.6\right)$.

Следовательно, предприятие должно выпустить **40%** продукции A_1 и **60%** продукции A_3, а продукцию A_2 не выпускать. Оптимальная стратегия спроса S_B^0 определяется аналогично: $q_j^* = y_j \cdot v, \quad j = 1,2,3,$ т.е. $S_A^0 = \left(0.2; 0; 0.8; 0\right)$ (здесь учтено, что второй столбец исходной матрицы был отброшен как невыгодный). Таким образом, оптимальный спрос в **20%** находится в состоянии B_1 и в **80%** — в состоянии B_3.

При решении произвольной конечной игры размера $m \times n$ рекомендуется придерживаться следующей схемы:

1. Исключить из платежной матрицы заведомо невыгодные стратегии по сравнению с другими стратегиями. Такими стратегиями для игрока A (игрока B) являются те, которым соответствуют строки (столбцы) с

элементами, заведомо меньшими (большими) по сравнению с элементами других строк (столбцов).

2. Определить верхнюю и нижнюю цены игры и проверить, имеет ли игра седловую точку. Если седловая точка есть, то соответствующие ей стратегии игроков будут оптимальными, а цена совпадает с верхней (нижней) ценой.

3. Если седловая точка отсутствует, то решение следует искать в смешанных стратегиях. Для игр размера $m \times n$ рекомендуется симплексный метод, для игр размера 2×2, $2 \times n$, $n \times 2$ возможно геометрическое решение.

2.7. Биматричные игры. Основные понятия и ситуация равновесия

В матричной игре интересы двух игроков были прямо противоположны, то есть речь шла об антагонистической игре. Однако гораздо чаще случаются ситуации, в которых интересы игроков хотя и не совпадают, но не обязательно являются противоположными.

Рассмотрим конфликтную ситуацию, в которой каждый из двух участников имеет следующие возможности для выбора своей линии поведения:

игрок A – может выбрать любую из стратегий $A_1, A_2, ..., A_m$,

игрок B – любую из стратегий $B_1, B_2, \ldots, B_n$.

При этом в ситуации (A_i, B_j) выигрыш первого игрока будет равен a_{ij}, а выигрыш второго b_{ij}. Причем, вообще говоря $b_{ij} \neq a_{ij}$.

Тогда получаем две платежные матрицы размерности $m \times n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn} \end{pmatrix} \qquad (2.7.1)$$

Здесь A - платежная матрица первого игрока, B - платежная матрица второго игрока. В этом случае говорят, что речь идет о биматричной игре двух игроков с платежными матрицами (2.7.1).

Отметим, что при $b_{ij} = -a_{ij}$ получаем обычную матричную игру.

В общем случае биматричная игра – это **игра с ненулевой суммой**.

Класс биматричных игр значительно шире класса матричных (разнообразие новых моделируемых конфликтных ситуаций весьма заметно), а, значит, неизбежно увеличиваются и трудности, встающие на пути их успешного разрешения.

Рассмотрим один пример биматричной игры.

Задача 2.7.1. (Студент — Преподаватель). Студент (игрок A) готовится к зачету, который принимает Преподаватель (игрок B). Можно считать, что у Студента две стратегии – подготовиться к сдаче зачета (+) и не подготовиться (-). У Преподавателя также две стратегии – поставить зачет [+] и не поставить зачета [-]. В основу значений функций выигрыша игроков положим следующие соображения:

Выигрыш студента	Сдал зачет [+]	Не сдал зачет [-]
Готовился к зачету (+)	оценка заслужена	очень обидно
Не готовился к зачету (-)	удалось обмануть	оценка заслужена

Выигрыш преподавателя	Поставил зачет [+]	Не поставил зачет [-]
Готовился к зачету (+)	все нормально	был не прав
Не готовился к зачету (-)	дал себя обмануть	опять придет

Количественно это можно выразить, например, так

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

В приведенной задаче описана ситуация, в которой интересы игроков не совпадают. Встает вопрос о том, какие рекомендации необходимо дать игрокам для того, чтобы моделируемая конфликтная ситуация разрешилась.

Иными словами, что мы будем понимать под решением биматричной игры?

Попробуем ответить на это вопрос так: **вследствие того, что интересы игроков не совпадают, нам нужно построить такое (компромиссное) решение, которое бы в том или ином, но в одинаковом смысле удовлетворяло обоих игроков.**

Не пытаясь сразу выражать эту мысль совсем точно, скажем – попробуем найти некую **равновесную ситуацию**, явное отклонение от которой одного из игроков уменьшало бы его выигрыш.

Подобный вопрос мы ставили и при рассмотрении матричных игр. Напомним, что возникающее при разработке минимаксного подхода понятие равновесной ситуации приводило нас к поиску седловой точки, которая, существует не всегда – конечно, если ограничиваться только чистыми стратегиями игроков A и B, т.е. стратегиями $A_1,\ A_2,...,\ A_m, B_1,\ B_2,\dots,B_n$.

Однако при расширении матричной игры путем перехода к смешанным стратегиям, т. е. к такому поведению игроков, при котором они чередуют (чистые) стратегии с определенными частотами:

игрок A – стратегии $A_1,\ A_2,...,\ A_m$ с частотами $p_1, p_2,...p_m$, где

$$p_1 \geq 0, p_2 \geq 0,...p_m \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1,$$

а игрок B – стратегии $B_1,\ B_2,\dots,B_n$ с частотами $q_1,q_2,...q_n$, где

$$q_1 \geq 0, q_2 \geq 0,...q_n \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{n} q_j = 1.$$

Выяснилось, что в смешанных стратегиях равновесная ситуация всегда существует.

Иными словами, **любая матричная игра в смешанных стратегиях разрешима.**

Поэтому, рассматривая биматричные игры, перейдем к смешанным стратегиям игроков (этим мы предполагаем, что каждая игра может быть многократно повторена в неизменных обстоятельствах) и определим средние выигрыши игроков математическим ожиданием:

$$H_A(p,q)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}p_iq_j\,,\; H_B(p,q)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}p_iq_j\,. \qquad (2.7.2)$$

Определение 2.7.1. Будем говорить, что пара векторов $p^0=\left(p_1^0,p_2^0,...,p_m^0\right)$ и $q^0=\left(q_1^0,q_2^0,...,q_n^0\right)$ определяют **равновесную ситуацию (равновесие по Нэшу)**, если при любых p и q, удовлетворяющих условиям $\sum_{i=1}^{m}p_i=1,\ \sum_{j=1}^{n}q_j=1,\ 0\le p_i\le 1,\ 0\le q_j\le 1$, справедливы неравенства:

$$H_A\left(p,q^0\right)\le H_A\left(p^0,q^0\right),\ H_B\left(p^0,q\right)\le H_B\left(p^0,q^0\right). \qquad (2.7.3)$$

Неравенства (2.7.3) означают, что если игрок отклонится от равновесной ситуации $\left(p^0,q^0\right)$, то его выигрыш может только уменьшится.

Тем самым, получается, что если равновесная ситуация существует, то отклонение от нее невыгодно самому игроку.

На вопрос о существовании ситуации равновесия отвечает следующая теорема.

Теорема 2.7.1. (Дж. Нэш). Всякая биматричная игра имеет хотя бы одну равновесную ситуацию (точку равновесия) в смешанных стратегиях.

Итак, равновесная ситуация существует. Но как ее найти?

Если некоторая пара чисел $\left(p^0,q^0\right)$ претендует на то, чтобы определять ситуацию равновесия, то для того, чтобы убедиться в обоснованности этих претензий, или, наоборот, доказать их необоснованность, необходимо проверить справедливость неравенств (2.7.3) для любого p в пределах от 0 до 1 и для любого q в пределах от 0 до 1. В общем случае число таких проверок бесконечно. И, следовательно, действенный способ определения равновесной ситуации нужно искать где-то в ином месте.

Рассмотрим биматричную игру 2×2: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ с вероятностями $p_1=p$, $p_2=1-p$, $q_1=q$, $q_2=1-q$.

Вычислим средние выигрыши игроков

$$H_A(p,q)=a_{11}pq+a_{12}p(1-q)+a_{21}(1-p)q+a_{22}(1-p)(1-q), \qquad (2.7.4)$$

$$H_B(p,q)=b_{11}pq+b_{12}p(1-q)+b_{21}(1-p)q+b_{22}(1-p)(1-q). \qquad (2.7.4^1)$$

Для таких игр оказывается справедливой следующая теорема, позволяющая находить смешанные стратегии.

Теорема 2.7.2. Выполнение неравенств (2.7.3):

$$H_A(p,q^0)\le H_A(p^0,q^0),\ H_B(p^0,q)\le H_B(p^0,q^0),$$

равносильно выполнению следующих неравенств:

$$\begin{cases} H_A(0,q^0)\le H_A(p^0,q^0) \\ H_A(1,q^0)\le H_A(p^0,q^0) \\ H_B(p^0,0)\le H_B(p^0,q^0) \\ H_B(p^0,1)\le H_B(p^0,q^0) \end{cases}, \qquad (2.7.5)$$

Другими словами, чтобы убедиться в том, что пара (p^0,q^0) определяет равновесную ситуацию, достаточно проверить справедливость неравенств (2.7.3) не для всех $p\in[0,1]$ и $q\in[0,1]$, а только для двух чистых стратегий каждого игрока.

Перепишем формулу (2.7.4) в более удобном виде

$$H_A(p,q)=(a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22})pq+(a_{12}-a_{22})p+(a_{21}-a_{22})q+a_{22}.$$

Положим здесь $p=0$ и $p=1$:

$$H_A(1,q)=(a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22})q+a_{12}+(a_{21}-a_{22})q,$$

$$H_A(0,q)=(a_{21}-a_{22})q+a_{22}$$

и рассмотрим разности

$$H_A(p,q)-H_A(1,q)=(a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22})pq+(a_{12}-a_{22})p-$$
$$-(a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22})q+a_{22}-a_{12},$$

$$H_A(p,q)-H_A(0,q)=(a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22})pq+(a_{12}-a_{22})p.$$

Полагая

$$\begin{cases} C=a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22} \\ \alpha=a_{22}-a_{12} \end{cases}, \tag{2.7.6}$$

получим для них следующие выражения:

$$H_A(p,q)-H_A(1,q)=Cpq-\alpha p-Cq+\alpha=Cq(p-1)-\alpha(p-1)=$$
$$=(p-1)(Cq-\alpha),$$

$$H_A(p,q)-H_A(0,q)=Cpq-\alpha p=p(Cq-\alpha).$$

Так как в точке равновесия эти разности должны быть неотрицательными, то приходим к следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} (p-1)(Cq-\alpha)\geq 0 \\ p(Cq-\alpha)\geq 0. \end{cases}$$

Для $H_B(p,q)$, при обозначениях:

$$\begin{cases} D=b_{11}-b_{12}-b_{21}+b_{22} \\ \beta=b_{22}-b_{21} \end{cases}, \tag{2.7.7}$$

Получаем аналогичным образом: $\begin{cases} (q-1)(Dp-\beta)\geq 0 \\ q(Dp-\beta)\geq 0. \end{cases}$

Таким образом, для того, чтобы пара (p,q) определяла равновесную ситуацию в биматричной игре 2×2 необходимо и достаточно выполнение следующей системы:

$$\begin{cases}(p-1)(Cq-\alpha)\ge 0\\ p(Cq-\alpha)\ge 0\\ (q-1)(Dp-\beta)\ge 0\\ q(Dp-\beta)\ge 0\\ p\in[0,1],\ \ q\in[0,1]\end{cases}, \tag{2.7.8}$$

где C, D, α, β вычисляются по формулам (2.2.6.6)-(2.2.6.7).

Задача 2.7.2. Решить биматричную игру из задачи 2.7.1.

Решение. Вычислим параметры, входящие в систему (2.7.8):

$C=2-(-1)-1+0=2, \alpha=0+1=1,$

$D=1-(-3)-(-2)-1=5, \beta=-1-(-2)=1.$

Тогда получаем следующие системы неравенств:

$$\begin{cases}(p-1)(2q-1)\ge 0\\ p(2q-1)\ge 0\end{cases} \text{ и } \begin{cases}(q-1)(5p-1)\ge 0\\ q(5p-1)\ge 0\end{cases}.$$

Решим первую из систем:

1) $p=1,\ 2q-1\ge 0,\ q\ge\frac{1}{2}$;

2) $p=0,\ 2q-1\le 0,\ q\le\frac{1}{2}$;

3) $0<p<1,\ q=\frac{1}{2}$.

Перенесем эти результаты на чертеж в виде «зигзага» (рис. 2.7.1.).

Решим вторую систему:

1) $q = 1,\ 5p - 1 \geq 0,\ p \geq \frac{1}{5};$

2) $q = 0,\ 5p - 1 \leq 0,\ p \leq \frac{1}{5};$

3) $0 < q < 1,\ 5p - 1 = 0,\ p = \frac{1}{5}.$

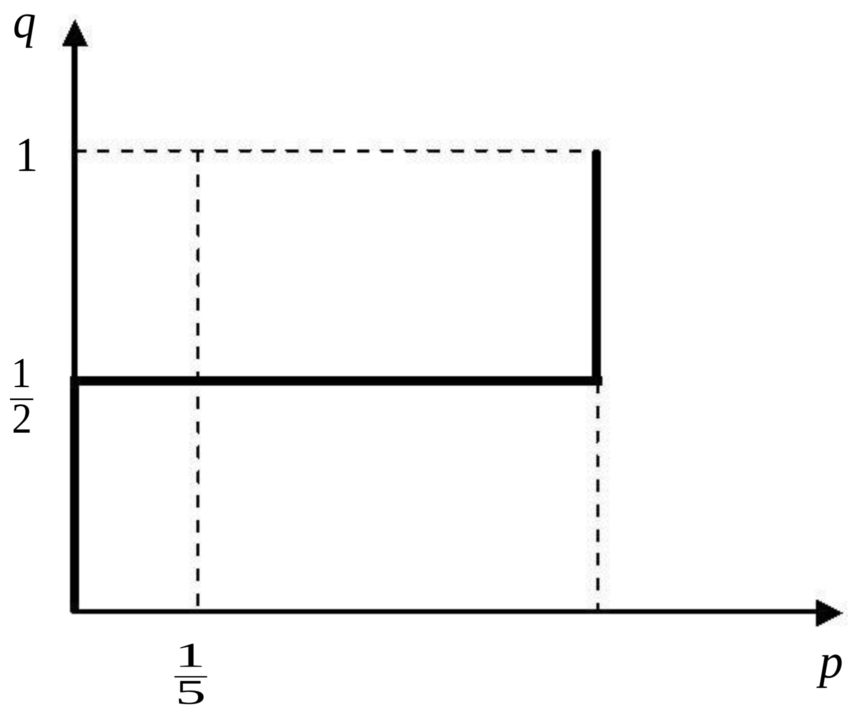


Рисунок 2.7.1.

Перенесем эти результаты на чертеж в виде «зигзага» (рис. 2.7.2).

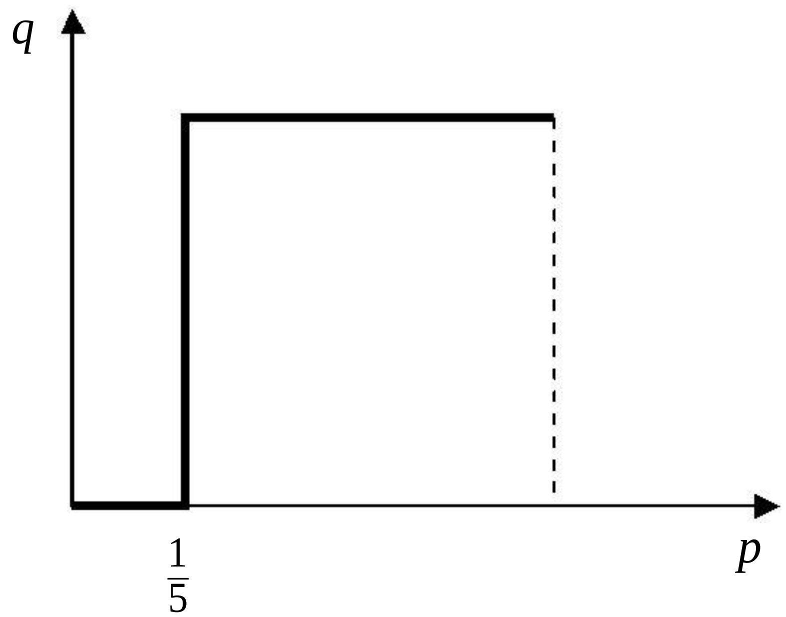


Рисунок 2.7.2

Объединим эти рисунки.

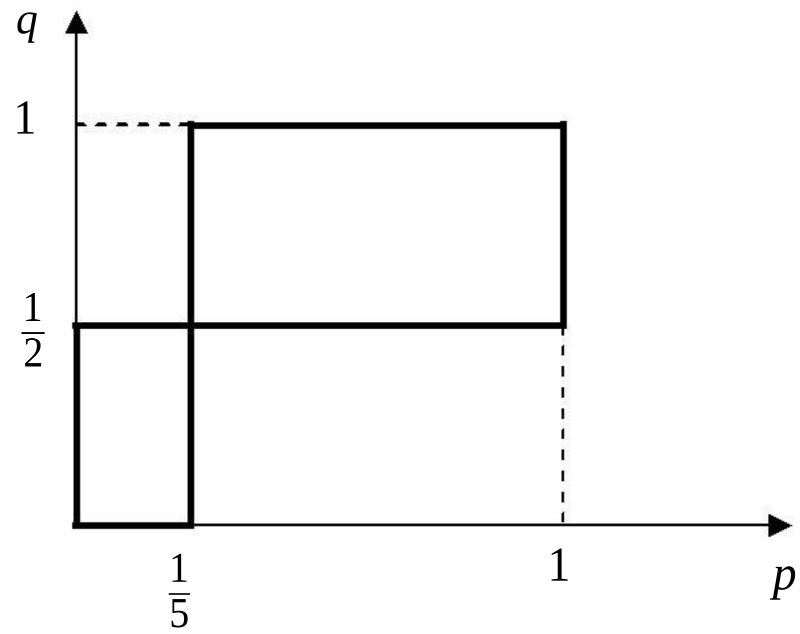


Рисунок 2.7.3

Видим, что игра имеет три равновесные ситуации с соответствующими выигрышами:

1) $p=1,\ q=1,\ H_A(1,1)=2,\ H_B(1,1)=1;$

2) $p=0,\ q=0,\ H_A(0,0)=0,\ H_B(0,1)=-1;$

3) $p=\frac{1}{5},\ q=\frac{1}{2},\ H_A\left(\frac{1}{5},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2},\ H_B\left(\frac{1}{5},\frac{1}{2}\right)=-\frac{7}{5}.$

Вывод. Из этих трех смешанных стратегий лучшей является первая с $p=q=1$, то есть хорошо подготовиться к зачету и поставить зачет.

В этой задаче реализуется весьма редкая для биматричных игр ситуация. Функции выигрышей игроков достигают максимума одновременно.

Задача 2.7.3. (Борьба за рынки). Небольшая фирма A намерена сбыть партию товара на одном из двух рынков, монополизируемых другой, более крупной фирмой B. Для этого фирма A готова предпринять по одному из рынков соответствующие приготовления, например, развернуть рекламную кампанию. Фирма B может воспрепятствовать этому, предприняв по одному из рынков предупредительные меры. Если фирма A встречает противодействие, то терпит поражение, в противном случае – захватывает рынок. Будем считать, что проникновение фирмы A на первый рынок более выгодно для нее, чем на второй, но и поражение на первом рынке принесет фирме A большие потери, чем на втором рынке. Таким образом, фирмы имеют по две стратегии: A_1 и B_1 - выбор первого рынка; A_2 и B_2 - выбор второго рынка. Составьте и решите биматричную игру.

Решение. Составим платежные матрицы игроков в условных единицах, исходя из соответствующих качественных соображений:

$$A=\begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из этих матриц видно, что если обе фирмы выберут один рынок, то выигрывает фирма B, если разные – то фирма A.

Найдем равновесные ситуации, вычислив параметры системы (4.6.8):

$$C=-10-2-1-1=-14, \alpha=-1-2=-3, \ D=5+2+1+1=9, \beta=1+1=2.$$

Тогда получаем следующие системы неравенств:

$$\begin{cases}(p-1)(-14q+3)\geq 0 \\ p(-14q+3)\geq 0\end{cases} \text{ и } \begin{cases}(q-1)(9p-2)\geq 0 \\ q(9p-2)\geq 0\end{cases}.$$

Решим первую систему:

1) $p=1,\ -14q+3\geq 0,\ q\leq \frac{3}{14}$;

2) $p=0,\ -14q+3\leq 0,\ q\geq \frac{3}{14}$;

3) $0<p<1,\ -14q+3=0, q=\frac{3}{14}$.

Решим вторую систему:

1) $q=1,\ 9p-2\geq 0,\ p\geq \frac{2}{9}$;

2) $q=0,\ 9p-2\le 0,\ p\le\frac{2}{9}$;

3) $0<q<1,\ 9p-2=0,\ p=\frac{2}{9}$.

Изобразим эти решения на рисунке:

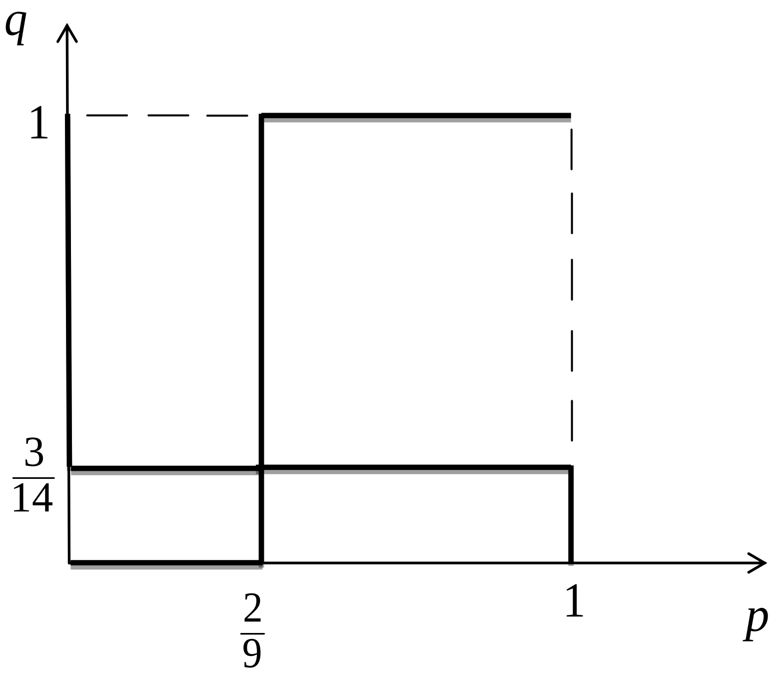


Рисунок 2.7.4

Видно, что получилась одна точка равновесия $p=\frac{2}{9}$, $q=\frac{3}{14}$. Это дает нам следующие оптимальные смешанные стратегии игроков: $p^0=\left(\frac{2}{9},\frac{7}{9}\right)$, $q^0=\left(\frac{3}{14},\frac{11}{14}\right)$, которым соответствуют оптимальные (средние) выигрыши $H_A\left(p^0,q^0\right)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}p_i^0q_j^0=-\frac{4}{7}$, $H_B\left(p^0,q^0\right)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}p_i^0q_j^0=\frac{1}{3}$.

Вывод. Таким образом, если игра может быть повторена многократно в схожих условиях, то фирма A в 22.22% случаев должна осуществлять попытки проникновения на первый рынок, а в 77.78% - на второй рынок. При этом (в среднем) она не проиграет больше, чем $\frac{4}{7}$ у.е. Фирме B

рекомендуется в 21.43% случаев оказывать противодействие на первом рынке, а в 78.57% - на втором. В этом случае ее средний выигрыш составит не менее $\frac{1}{3}$ у.е.

Отметим, что в этой задаче получилась одна равновесная точка, и $\nu_A \neq \nu_B$. В других биматричных играх можно получить несколько равновесных ситуаций, как, например, в примере «Студент - Преподаватель». В этом случае встает проблема выбора оптимальной в некотором смысле ситуации из нескольких равновесных. Эту задачу можно попытаться решить, исходя из содержательного смысла игры.

Из рассмотренных примеров видно, что точка равновесия определяется парой

$$p = \frac{\beta}{D},\ q = \frac{\alpha}{C}. \tag{2.7.9}$$

А это означает, что в равновесной ситуации выбор одного игрока полностью определяется платежной матрицей другого игрока и не зависит от собственной платежной матрицы. Иначе говоря, равновесная ситуация определяется не столько стремлением увеличить свой выигрыш, сколько желанием держать под контролем выигрыш другого игрока.

Проиллюстрируем это, пользуясь условием примера 2.7.3. Для этого разобьем биматричную игру на две матричные игры с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

и решим их:

$$\nu_A = -\frac{4}{7},\ \ p^0 = \left(\frac{1}{7}, \frac{6}{7}\right),\ q^0 = \left(\frac{3}{14}, \frac{11}{14}\right),$$

$$\nu_B = \frac{1}{3},\ p^0 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right),\ q^0 = \left(\frac{2}{9}, \frac{7}{9}\right).$$

То есть, если каждый игрок будет применять свои стратегии в биматричной игре, исходя только из собственной матрицы выигрышей, то он найдет свой оптимальный выигрыш и оптимальную стратегию другого игрока.

Таким образом, в биматричной игре вновь встречаемся с антагонизмом. А что же будет, если игроки попробуют договориться? Возможен ли больший выигрыш в этой ситуации? Оказывается, в биматричной игре кооперации может улучшить положение обоих игроков. Рассмотрим эту ситуацию на следующем примере.

Задача 2.7.4. Имеются два продавца, продающие определенный товар на рынке. Оба из них знают, что чем выше цена, тем меньше общий объем продаж. Для простоты предположим, что каждый из них может продать либо 400 единиц некоторого товара, либо 100 единиц. Известно, что при продаже 800 единиц на рынке складывается цена равная 100 фунтам, при 500 единицах - 200 фунтов, а при объеме продаж 200 единиц - 500 фунтов.

Решение. Матрицы выигрышей продавцов следующие:

Выигрыш 1 продавца.		Стратегии 2 продавца	
		400 ед.	100 ед.
Стратегии 1 продавца	400 ед.	40000 фунтов	80000 фунтов
	100 ед.	20000 фунтов	50000 фунтов

Выигрыш 2 продавца.		Стратегии 1 продавца	
		400 ед.	100 ед.
Стратегии 2 продавца	400 ед.	40000 фунтов	20000 фунтов
	100 ед.	80000 фунтов	50000 фунтов

Если бы игроки имели возможность и желание согласовывать свои действия, то они решили бы продать по 100 единиц и получить прибыль по 50000 единиц каждый.

Предположим теперь, что по каким-либо причинам они принимают решения независимо друг от друга.

Каковы оптимальные стратегии для игроков в этом случае?

Пара стратегий (400,100) не является ситуацией равновесия, так как в этом случае второму игроку выгодно изменить свою стратегию на 400 и тем самым увеличить свой выигрыш с 20000 до 40000.

Если рассмотреть пару стратегий (100,100), то она также не является ситуацией равновесия, поскольку каждому отдельному игроку выгодно поменять свою стратегию на 100 и получить вместо 50000 выигрыш в 80000.

Если же мы рассмотрим пару стратегий (400,400), то, как легко заметить, отклонение каждого отдельного игрока является для него невыгодным. Такую ситуацию называют ситуацией равновесия (**равновесия по Нэшу**) или некооперативного равновесия.

Напротив, когда возможность достигать определенные договоренности между игроками существует, игроки стараются найти такую пару стратегий, для которой не существует другой пары, одновременно улучшающей выигрыши обоих игроков. Такая пара стратегий называется ситуацией кооперативного ***(оптимальность по Парето)*** равновесия. Таковой является пара стратегий (100,100).

Таким образом, очевиден выигрыш от кооперации. Работать – меньше, а прибыль – больше.

Подчеркнем различие ситуации равновесия по Нэшу от ситуации, оптимальной по Парето: в первой ни один игрок, действуя в одиночку, не может увеличить свой собственный выигрыш; во второй – все игроки, действуя совместно, не могут (даже нестрого) увеличить выигрыш каждого.

Итак, в биматричных играх существует несколько критериев оптимальности. Важнейшими из них являются ситуация равновесия по Нэшу и критерий оптимальности по Парето.

Отметим, что в биматричных играх (в отличие от матричных) при наличии нескольких ситуаций равновесия средний выигрыш игрока в разных равновесных ситуациях различен (напомним, что в матричной игре выигрыш игрока один и тот же вне зависимости от количества точек равновесия).

Наконец, еще одно, не менее интересное обстоятельство. Достаточно сложной является и проблема перехода от качественных оценок ситуации к количественным оценкам. То есть, если, например, в примере «Студент-Преподаватель» принять другие количественные оценки выигрышей, то можно получить и другие ситуации равновесия. Однако если эти изменения будут не слишком значительными – элементы платежной матрицы "пошевельнутся" слегка – то слегка "пошевельнутся" и зигзаги, не изменяя ни своей общей формы, ни взаимного расположения, а значит, число равновесных ситуаций не изменится. Впрочем, сказанное относится лишь к случаю, когда множество ситуаций равновесия конечно и состоит из нечетного числа точек (одной или трех). Как принято говорить в подобных случаях, это число «устойчиво относительно малых шевелений».

Конечно, в некоторых биматричных играх равновесные ситуации случаются и в чистых стратегиях. Но, как показывают разобранные примеры, во-первых, чистой ситуации равновесия может вовсе не быть, и, во-вторых, даже при ее наличии не исключено существование равновесных ситуаций в смешанных стратегиях. И, чтобы найти их все, неизбежно приходится обращаться к описанному выше подходу.

2.8. Игра двух лиц, в которой одним из игроков является "природа"

Ситуации, описываемые рассмотренными выше моделями в виде игр, на практике могут не в полной мере оказаться адекватными действительности, поскольку реализация модели предполагает многократность повторения действий (решений), предпринимаемых в похожих условиях. В реальности количество принимаемых решений в неизменных условиях жестко ограничено. Нередко ситуация является уникальной, и решение в условиях неопределенности должно приниматься однократно. Это порождает необходимость развития методов моделирования принятия решений в условиях неопределенности и риска.

Традиционно следующим этапом такого развития являются игры с природой. Формально изучение игр с природой должно начинаться с построения платежной матрицы, что является, по существу, наиболее трудоемким этапом подготовки принятия решения.

Ошибки в платежной матрице не могут быть компенсированы никакими вычислительными методами и приведут к неверному итоговому результату.

Отличительная особенность игры с природой состоит в том, что в ней сознательно действует только один из участников, в большинстве случаев называемый игроком 1. Игрок 2 (природа) сознательно против игрока 1 не действует, а выступает как не имеющий конкретной цели и случайным образом выбирающий очередные «ходы» партнер по игре. Поэтому термин «природа» характеризует некую объективную действительность, которую не следует понимать буквально, хотя вполне могут встретиться ситуации, в которых «игроком» 2 действительно может быть природа (например, обстоятельства, связанные с погодными условиями или с природными стихийными силами).

Мажорирование стратегий в игре с природой имеет определенную специфику: исключать из рассмотрения можно лишь доминируемые стратегии игрока 1: если для всех $j = 1,...,n$ $a_{kj} \le a_{lj}$, $k,l = 1,...,m$, то k-ю стратегию принимающего решения игрока 1 можно не рассматривать и вычеркнуть из матрицы игры. Столбцы, отвечающие стратегиям природы, вычеркивать из матрицы игры (исключать из рассмотрения) недопустимо, поскольку природа не стремится к выигрышу в «игре» с человеком, для нее нет целенаправленно выигрышных или проигрышных стратегий, она действует неосознанно.

На первый взгляд отсутствие обдуманного противодействия упрощает игроку задачу выбора решения. Однако, хотя ЛПР никто не мешает, ему труднее обосновать свой выбор, поскольку в этом случае гарантированный результат не известен.

Методы принятия решений в играх с природой зависят от характера неопределенности, точнее от того, известны или нет вероятности состояний (стратегий) природы, т.е. имеет ли место **ситуация риска** или **ситуация неопределенности**.

Собственно разница между риском и неопределённостью касается того, знает ли принимающий решение что-либо о вероятности наступления определённых событий. **Риск** присутствует тогда, когда вероятности, связанные с различными последствиями принятия решения, могут оцениваться на основе данных предшествующего периода (имеется статистическая информация о подобных ранее принимаемых решениях, о подобных изучаемой ситуациях и т.п.). **Неопределённость** существует тогда, когда эти вероятности приходится определять субъективно, т.к. нет данных предшествующего периода (нет соответствующей статистики).

Задача выбора решения в условиях неопределённости сводится к следующему.

Пусть задан некоторый **вектор** $S=\left(S_1,S_2,...,S_n\right)$, описывающий n **состояний внешней среды**, и **вектор** $X=\left(X_1,X_2,...,X_m\right)$, описывающий m **допустимых решений**. Требуется найти такой вектор $X^*=\left(0,0,...,0,X_i,0,...,0\right)$, который бы обеспечивал **оптимум** некоторой **функции полезности** $W=\left(X,S\right)$ **по** некоторому **критерию** K.

Значение оптимума функции $W=\left(X,S\right)$ раскрывается, исходя из постановки конкретной задачи (к примеру, если обсуждается получение прибыли, то значение функции стремятся максимизировать, если себестоимость – минимизировать).

Информацию об указанной функции полезности (по сути *исходные данные задачи* такого типа) представляют **матрицей размерности** $m\times n$ с элементами $W_{ij} = F\left(X_i, S_j\right)$, где F - **решающее правило** (определяемое из постановки конкретной задачи).

Формирование решающего правила во многом предопределяет конечный результат расчетов (в случае его неточности даже правильный выбор критерия оптимальности и соответствующие расчеты не дают основания считать принятое решение наилучшим).

При достаточно четкой экономической постановке задачи практически не возникает проблем с формированием матрицы $\left\{W_{ij}\right\}$.

Критерий принятия решения в ситуации риска.

Предположим, что в нашем распоряжении имеются статистические данные, позволяющие оценить вероятность того или иного состояния внешней среды, и этот опыт может быть использован для оценки будущего. При известных вероятностях P_j для возникновения состояния S_j можно найти математическое ожидание $W = \left(X, S, P\right)$ и определить вектор X^*, обеспечивающий

$$W = \max_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1}^{n} W_{ij} P_j . \qquad (2.8.1)$$

Критерии принятия решения в ситуации неопределённости.

Неопределенность, связанную с отсутствием информации о вероятностях состоянии среды (природы), называют «безнадежной» или «дурной». В таких случаях для определения наилучших решении используются следующие критерии: Лапласа, Вальда, Сэвиджа, Гурвица.

1. Критерий Лапласа.

По принципу недостаточного основания в условиях, когда невозможно выяснить вероятности для возникновения того или иного состояния внешней среды, им сопоставляют *равные вероятности*, находят *средний эффект для* *каждого из рассматриваемых вариантов решения* и выбирается тот из них, где средний эффект максимален:

$$W = \max_{i=1,\dots,m} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} W_{ij} \qquad (2.8.2)$$

2. Критерий Вальда (критерий наибольшей осторожности/ пессимиста).

Для каждого из рассматриваемых вариантов решения X_i выбирается *самая худшая ситуация* (наименьшее из W_{ij}) и среди них отыскивается гарантированный максимальный эффект:

$$W = \max_{i=1,\dots,m} \min_{j=1,\dots,n} W_{ij} \qquad (2.8.3)$$

3. Критерий Гурвица.

Ориентация на самый худший исход является своеобразной перестраховкой, однако опрометчиво выбирать и излишне оптимистичную политику. Критерий Гурвица *предлагает некоторый компромисс*:

$$W = \max_{i=1,\dots,m} \left[\alpha \max_{j=1,\dots,n} W_{ij} + (1-\alpha) \min_{j=1,\dots,n} W_{ij} \right], \qquad (2.8.4)$$

где параметр α принимает значение от 0 до 1 и выступает как *коэффициент оптимизма*. К примеру, при $\alpha = 0$ (полный пессимизм) критерий Гурвица превращается в критерий Вальда, при $\alpha = 0.5$ мы расцениваем равновероятно шансы на успех и неудачу, при $\alpha = 0.2$ мы более осторожны и вероятность успеха считаем меньшей (0.2), чем возможную неудачу.

4. Критерий Сэвиджа.

Суть его - *нахождение минимального риска*. При выборе решения по этому критерию:

- матрице функции полезности (эффективности) сопоставляется новая матрица - *матрица сожалений*

$$D_{ij} = W_{ij} - \max_i W_{ij}, \tag{2.8.5}$$

элементы которой отражают убытки от ошибочного действия, т.е. выгоду, упущенную в результате принятия i-го решения в j-м состоянии;

- по матрице D выбирается решение по пессимистическому критерию Вальда, дающее наименьшее значение максимального сожаления

$$W = \max_{i=1,\dots,m} \min_{j=1,\dots,n} D_{ij}. \tag{2.8.6}$$

Вполне логично, что **различные критерии приводят к различным выводам относительно наилучшего решения**. Вместе с тем *возможность выбора критерия дает свободу лицам, принимающим экономические решения* (если они, конечно, располагают достаточными средствами для постановки подобной задачи). ***Любой критерий должен согласовываться с намерениями решающего задачу и соответствовать его характеру, знаниям и убеждениям.***

Задача 2.8.1. В приморском городе решено открыть яхт-клуб. *Сколько следует закупить яхт* (из расчета: одна яхта на 5 человек), если предполагаемое число членов клуба колеблется от 10 до 25 человек. Годовой абонемент стоит 100 денежных единиц. Цена яхты - 170 денежных единиц. Аренда помещения и хранение яхт обходится в 730 денежных единиц в год.

Решение. Несомненно, что имеет смысл рассматривать количество приобретаемых яхт в диапазоне от двух до пяти (4 варианта) и количество потенциальных яхтсменов от 10 до 25. Однако объем перебора будет великоват и потому ограничимся вариантами 10, 15, 20, 25 (если полученные выводы для смежных вариантов будут существенно разниться, проведем дополнительный, уточняющий расчет).

Итак: $X=\{X_i\}=\{2,3,4,5\}$ – количество яхт $(i=1,2,3,4)$; $S=\{S_j\}=\{10,15,20,25\}$ – количество членов яхт-клуба $(j=1,2,3,4)$.

Для того чтобы начать поиск решения, построим матрицу полезности, элементы которой показывают прибыль при принятии i - го решения при j - ом количестве членов яхт-клуба:

$$W_{ij}=100\cdot\min\left(5X_i;S_j\right)-170X_i-730,$$

т.е. решающее правило в нашей задаче формулируется как «доход – затраты».

Выполнив несложные расчеты, заполним матрицу полезности $\{W_{ij}\}$:

Таблица 2.8.1

	$S_1=2$	$S_2=15$	$S_3=20$	$S_4=25$
$X_1=2$	-70	-70	-70	-70
$X_2=3$	-240	260	260	260
$X_3=4$	-410	90	590	590
$X_4=5$	-580	-80	420	920

Например, $W_{11}=100\cdot\min(5\cdot2;10)-170\cdot2-730=-70$

$W_{12}=100\cdot\min(5\cdot2;15)-170\cdot2-730=-70$

$W_{13}=W_{14}=-70$ (спрос на яхты останется неудовлетворенным).

Отрицательные значения показывают, что при этих соотношениях спроса на яхты и их наличия яхт-клуб несет убытки.

Критерий принятия решения в ситуации риска.

Предположим, что есть статистические данные, позволяющие оценить вероятность того или иного спроса на членство в яхт-клубе: $P=(0.1;0.2;0.4;0.3)$. Тогда математическое ожидание величины прибыли для каждого из рассматриваемых вариантов решения (предложение яхт в яхт-клубе):

$W_1=(-70\cdot)0.1+(-70)\cdot 0.2+(-70)\cdot 0.4+(-70)\cdot 0.3=-70$;

$W_2=(-240)\cdot 0.1+(260)\cdot 0.2+(260)\cdot 0.4+(260)\cdot 0.3=210$;

$W_3=390$; $W_4=370$.

Вывод: в условиях рассматриваемой ситуации наиболее целесообразно закупить 4 яхты (в этом случае максимальная ожидаемая прибыль яхт-клуба составит 390 денежных единиц).

Принятие решения в ситуации неопределенности.

1. Для применения ***критерия Лапласа*** находим:

$W_1=((-70)+(-70)+(-70)+(-70))/4=-70$;

$W_2=((-240)+(260)+(260)+(260))/4=135$;

$W_3=215$; $W_4=170$.

Вывод: в условиях равновероятности возникновения той или иной величины спроса на членство в яхт-клубе следует закупить 4 яхты и при этом можно рассчитывать на прибыль в размере 215 д.е.

2. ***Критерий Вальда*** (выбор осторожной, пессимистической стратегии) - для каждой альтернативы (количество яхт в клубе) выбирается самая худшая ситуация (наименьшее значение величины прибыли) и среди них отыскивается гарантированный максимальный эффект:

$$W=\max\{-70;-240;-410;-580\}=-70$$

Вывод: принимая решение по критерию Вальда, яхт-клубу следует закупить 2 яхты и максимум ожидаемого убытка не превысит 70 д.е.

3. ***Критерий Гурвица*** (компромиссное решение между самым худшим исходом и излишне оптимистическим). Рассмотрим изменение решения нашей задачи в зависимости от значений коэффициента оптимизма (в таблице выделены значения, удовлетворяющие критерию Гурвица при различных α):

Таблица 2.8.2

	α = 0.2	α = 0.5	α = 0.8
$X_1 = 2$	**-70**	-70	-70
$X_2 = 3$	-140	10	160
$X_3 = 4$	-210	90	390
$X_4 = 5$	-380	**170**	**620**

***Вывод*:** при $\alpha \geq 0,5$ следует закупить 5 яхт и ожидать прибыль порядка, не меньшую 170 д.е. (надеемся на широкую популярность нашего клуба и определенную финансовую состоятельность любителей), при $\alpha = 0,2$ не следует закупать более 2 яхт (мы более осторожны в своих прогнозах и, скорее всего, предпочтем отказаться от создания клуба).

4. ***Критерий Сэвиджа*** (нахождение минимального риска). При выборе решения по этому критерию сначала матрице полезности сопоставляется матрица сожалений D - для нашего примера, вычитанием (-70) из первого столбца матрицы полезности, 260 из второго столбца, 590 и 920 из третьего и четвертого столбцов соответственно.

Таблица 2.8.3

	$S_1 = 2$	$S_2 = 15$	$S_3 = 20$	$S_4 = 25$
$X_1 = 2$	0	-330	-660	**-990**
$X_2 = 3$	-170	0	-330	**-660**

$X_3 = 4$	**-340**	-170	0	-330
$X_4 = 5$	**-510**	-340	-170	0

Наибольшее значение среди минимальных элементов строк (выделенные в таблице значения) равно:

$\max\{-990; -660; -340; -510\} = -340$

***Вывод*:** покупая 4 яхты для открываемого яхт-клуба, мы уверены, что в худшем случае убытки клуба не превысят 340 д.е.

Общий вывод. Рассмотренные критерии приводят к различным решениям и дают тем самым информацию к размышлению (принятое решение здесь будет существенно зависеть от психологии и интуиции субъекта решения).

Аналогично задачи могут решаться различными приближенными методами вычисления (алгоритм Данцига («жадный» алгоритм), генетический алгоритм, алгоритм муравьиных колоний), а если требуются точные ответы, то методами динамического программирования.

2.9. Применение приближенных методов вычисления при оперативно-производственном планировании машиностроительного предприятия

В настоящее время, все отрасли промышленности встречают новую эру развития, предполагающую множество фундаментальных изменений. Конечные пользователи все чаще хотят видеть индивидуальные продукты, и в то же время жизненные циклов продуктов становятся все короче. Кроме того, негативное воздействие промышленности на окружающую среду становится все более серьезным и остро встает вопрос о снижении потребления природных ресурсов. Следовательно, необходимо создавать более гибкие, адаптивные, надежные, быстрые и эффективные системы управления производством [1]. Предприятия машиностроения также попадают под влияние общего тренда развития и должны научиться справляться с увеличением сложности изделий, сокращением времени разработки, вывода новых изделий на рынок и их производства, а также уменьшением затрат [2].

В качестве ответа на эти и другие проблемы выступает четвертая промышленная революция, одной из начальных ступеней которой можно считать внедрение интернета вещей и услуг в производственной среде – «Индустрию 4.0». «Индустрия 4.0» означает глубокую трансформацию для всей промышленности и «умные» фабрики будут одной из ключевых направлений развития. «Умные» фабрики представляют собой системы комплексных технологических решений, обеспечивающих изготовления продукции от заготовки до готового изделия по цене серийного производства, а также гибкое производство и массовую кастомизацию [3]. Главной особенностью является то, что они должны управлять постоянно возрастающей сложностью работы промышленных предприятий и в то же время быть более гибкими, надежными и экологичными. Для выполнения данных требований предполагается организация управлением физическими объектами в информационных системах, таких как MES и ERP [4].

Системы MES предназначены для диспетчеризации и оперативно-производственного планирования. Однако функционал оперативно-производственного планирования на множестве предприятий в системе MES используется слабо и большая часть работы, связанной с процессом планирования, выполняется вручную и основывается на опыте и знаниях сотрудников предприятия. Тем не менее, цифровизация процессов планирования важна не только для внедрения систем MES, но и для полноценного перехода к «Индустрии 4.0».

Вследствие этого в данной работе анализируется процесс оперативно-производственного планирования на одном из ведущих машиностроительных предприятий города Санкт-Петербург – ОАО «ЛЕНПОЛИГРАФМАШ». Планирование операций является одним из наиболее важных вопросов оперативно-производственного планирования и управления производственными процессами [5]. Поиск наилучшего графика может быть как простым, так и очень сложным, в зависимости от типа производства, ограничений и показателей производительности [6]. Проблема планирования операций существует в различных областях, таких как: оперативно-производственное планирование, производственная и транспортная логистика, управление цепочками поставок, управление проектами, гибкие системы производства [7]. Общая черта многих из этих проблем – отсутствие эффективных алгоритмов нахождения оптимального решения за полиномиально ограниченное время, в соответствии с размером задачи.

Таким образом, целью работы является разработка модели и алгоритмов, которые позволят эффективнее организовать оперативно-производственное планирование на предприятии и сделают процесс принятия управленческих решений более гибким и оперативным. Для достижения поставленной цели в работе предполагается описать производственную систему машиностроительного производства с помощью математической модели, разработать алгоритмы оперативно-производственного планирования, провести их апробацию на производстве и сравнить с текущими алгоритмами, используемыми на производстве.

В задаче оперативно-производственного планирования или многостадийной задаче теории расписаний может быть условно выделено пять классов подзадач: «один рабочий центр (РЦ)» (*single machine*), «параллельные РЦ» (*parallel machine*), «открытая линия» (*open shop*), «потоковая линия» (*flow shop*), «рабочий цех» (*job shop*) [6]. Задача «рабочий цех» является наиболее широко распространённой на практике, особенно в отраслях дискретного производства и заключается в нахождении оптимальной последовательности выполнения определенного набора работ на заданном наборе рабочих центров. Каждая работа состоит из некоторого количества операций, которые должны выполняться в заданном порядке.

Каждая операция соответственно связана с определенной работой, рабочим центром и имеет все необходимое для ее выполнения. У данного класса задач есть расширение – *flexible job shop(FJS)*. Его особенность заключается в гибкости производственной системы, где операция может выполняться на разных РЦ или один РЦ может выполнять разные операции [8]. В первом случае это достигается наличием идентичных машин, а во втором – использованием высокотехнологичных универсальных РЦ. Данный класс задач наиболее схож с задачами реального промышленного предприятия, и рассматриваемая в работе производственная система наилучшим образом подходит под описание.

Данный класс задач относится к NP-полным, они являются одними из самых трудных задач теории расписаний с точки зрения вычислительной сложности. Поэтому они представляют большой интерес для исследователей, и существует большое количество разнообразных подходов к решению проблемы. В последних обзорных исследованиях [9, 10, 11] предоставлен анализ большинства существующих подходов.

Методы решения задач оперативно-производственного планирования образуют два класса: точные и эвристические методы. Эти классы могут быть классифицированы далее, как стохастические и детерминированные. Точные методы гарантируют нахождение оптимального решения, если оно существует, и, как правило, представляют некоторые показатели, если точное решение невозможно найти. Эвристические методы не гарантируют нахождение точного решения, но обычно обеспечивают определенную степень оптимальности в своих решениях. Стохастические методы включают вероятностные операции, поэтому они могут никогда не работать одинаково дважды по одной задаче, но в то же время два разных запуска могут привести к одинаковому решению. Детерминированные методы работают одинаково каждый раз при решении задачи планирования.

Среди наиболее распространенных методов решения задач оперативно-производственного планирования (ОПП) можно выделить следующие:

математические модели, приводящие к оптимальному решению, эвристические методы, мета-эвристические методы, гибридные методы, моделирование, экспертные системы, правила приоритетов, поиск по окрестности, методы локального поиска, искусственные нейронные сети. Существует множество гибридных методов, которые сочетают характеристики разных классов и являются наиболее частым выбором исследователей задач ОПП класса FJS [10].

В рамках данной работы для решения задачи оперативно-производственного планирования были выбраны два метода: «жадные» алгоритмы и генетические. Далее представлен краткий обзор исследований, связанный именно с этими методами. «Жадные» алгоритмы существуют достаточно давно, но по-прежнему вызывают интерес [11, 12, 13]. Среди значимых работ по изучению генетических алгоритмов можно отметить [14]. Дэвис был первым, кто использовал генетические алгоритмы для решения задачи планирования производства и формировал предпочтительную последовательность операций для каждого РЦ. В [15] улучшили генетику, кодируя все операции каждого РЦ как предпочтительную последовательность символов. Авторы [16] провели сравнение генетического алгоритма с алгоритмом имитации отжига и продемонстрировали, что первый эффективнее. Как отмечено в [10] генетические алгоритмы применяются чаще всего среди исследований, не использующих гибридные методы. «Жадные» и генетические алгоритмы использовали для решения задач оперативно-производственного планирования на различных оперирующих системах и их популярность обусловлена качеством получаемых результатов. Соответственно, использование в исследовании «жадных» и генетических алгоритмов является одним из наилучших решений для оперативно-производственного планирования, как с точки зрения их эффективности результатов на реальных задачах, так и с точки зрения возможности реализации.

Математическая модель оперативно-производственного планирования производства сильно зависит от особенностей рассматриваемой производственной системы и постановки задачи [17]. Задача может быть сформулирована следующим образом: заказ на производство состоит из конечного числа работ – деталей и сборочных единиц (ДСЕ), которые необходимо изготовить на имеющихся рабочих центрах (РЦ). РЦ объединяются по различным признакам в группы заменяемости. Изготовление каждой ДСЕ состоит из строгой последовательности технологических операций, каждая из которых может быть произведена на одном из РЦ соответствующей группы. Часть ДСЕ доступна к изготовлению в момент времени 0 – те ДСЕ, что не являются сборками и не требуют других ДСЕ для изготовления. РЦ могут обрабатывать только один тип ДСЕ одновременно. Изготовление ДСЕ на РЦ не прерывается после начала обработки. В рассматриваемой модели время транспортировки ДСЕ между операциями не учитывается. Время подготовительно-заключительное постоянно и не зависит от выбранного РЦ из группы. РЦ не выходят из строя, т.е. доступны в течение всего рабочего времени. Условия предшествования изготовления ДСЕ задаются в виде ориентированного графа. Целевой функцией является минимизация общей продолжительности изготовления всех ДСЕ в производственной программе определенного размера – C_{max}. Для более четкого понимания математической модели введем соответствующе параметры и переменные:

Индексы:

i,h – индексы для ДСЕ ($i = 1,2,\dots D$; $h = 1,2,\dots D$);

j,g – индексы для операций ($j = 1,2,\dots J_j$; $g = 1,2,\dots J_g$);

m – индекс для РЦ ($m = 1, 2,\dots,M$);

k – индекс последовательности операций, назначенных на m РЦ ($k = 1, 2,\dots,k_m$).

Параметры:

D – $\{D_1, D_2, \dots D_i\}$ – множество ДСЕ;

M – $\{M_1, M_2, \ldots M_m\}$ – множество РЦ;

J_i – количество операций по i-ой ДСЕ;

O_{ij} – j-ая операция над i-ой ДСЕ;

p_{ij} – продолжительность выполнения j-ой операции над i-м ДСЕ, сек.;

a_{ijm} – булева переменная, которая принимает значение равное 1, если O_{ij} может быть выполнена на m РЦ, 0 в противном случае;

L – большое число.

Переменные:

S_{ij} – момент времени начала выполнения O_{ij}, сек.;

C_{ij} – момент времени окончания выполнения O_{ij}, сек.;

C_i – момент времени окончания изготовления i-го ДСЕ;

$C_{\max}$ – общая продолжительность изготовления всех ДСЕ, сек.;

k_m – количество назначенных на m-й РЦ операций;

SM_{mk} – начало рабочего времени для m-го РЦ по k очереди, сек.;

X_{ijmk} – булева переменная, принимающая значение равное 1, если O_{ij} назначена на m-е РЦ на k-ое место в очереди, 0 в противном случае;

Y_{ijm} – булева переменная, принимающая значение равное 1, если m-й РЦ выбран для исполнения O_{ij}, 0 в противном случае;

Z_{hi} – булева переменная, принимающая значение равное 1, если i-ая ДСЕ входит в состав h, 0 в противном случае.

Математическая модель:

Целевая функция минимизирует общее время изготовления всех ДСЕ.

$$C_{\max} \to \min \tag{2.9.1}$$

Ограничение определяет время завершения изготовления всех ДСЕ.

$$C_{\max} \geq C_i, \qquad \forall i \tag{2.9.2}$$

Ограничение определяет время завершения изготовления каждого ДСЕ.

$$C_i \geq \max\left\{C_{ij}\right\}, \quad \forall i, j \tag{2.9.3}$$

Ограничение определяет, что прерывания операций недопустимы и рассчитывает время завершения операций над ДСЕ.

$$C_{ij} = S_{ij} + p_{ij}, \quad \forall i, j \tag{2.9.4}$$

Ограничение задает строгое следование технологическому процессу изготовления ДСЕ.

$$S_{ij} + p_{ij} \le S_{ij+1}, \quad \forall i, \forall j = 1, 2, ..., J_{j-1} \tag{2.9.5}$$

Дизъюнктивное ограничение, т.е. должно соблюдаться только одно ограничение. Оно означает, что операция O_{hg} не должна быть выполнена до операции O_{ij} при условии, что они выполняются на одном РЦ. Другими словами, в выполнении операций на j-м рабочем центре должна соблюдаться последовательность изготовления ДСЕ.

$$\begin{aligned}&\left[\left(C_{hg} - C_{ij} - p_{hg}\right) * x_{ijmk} x_{hgmk} \ge 0\right] \vee \\ &\left[\left(C_{ij} - C_{hg} - p_{ij}\right) * x_{ijmk} x_{hgmk} \ge 0\right], \qquad \forall (i,h), (j,g), m, k\end{aligned} \tag{2.9.6}$$

Ограничение гарантирует, что изготовление сборочных ДСЕ не начнется до изготовления входящих в них ДСЕ.

$$\min\left\{S_{hg}\right\} \ge \max\left\{C_{ij}\right\} * Z_{hi}, \qquad \forall (i,h), (j,g) \tag{2.9.7}$$

Ограничение заставляет каждый РЦ обрабатывать не более одного типа ДСЕ одновременно.

$$SM_{mk} + p_{ij} * X_{ijmk} \le SM_{mk+1} \qquad \forall i, j, m, k = 1, 2, ..., k_{m-1} \tag{2.9.8}$$

Ограничения (2.9.9 и 2.9.10) определяют, что выполнение операции O_{ij} может начинаться только после того, как выбранный РЦ освободился и предыдущая операция O_{ij-1} завершена.

$$SM_{mk} \le S_{ij} + (1 - X_{ijmk}) * L \qquad \forall i, j, m, k \tag{2.9.9}$$

$$SM_{mk} + (1 - X_{ijmk}) * L \ge S_{ij} \qquad \forall i, j, m, k \tag{2.9.10}$$

Ограничение назначает операции на РЦ для всех ДСЕ.

$$\sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J_i} X_{ijmk} = 1, \quad \forall m, k \tag{2.9.11}$$

Ограничение определяет, что только на один РЦ из группы взаимозаменяемости назначается выполнение операции.

$$\sum_{m=1}^{M} Y_{ijm} = 1, \qquad \forall i, j \tag{2.9.12}$$

Ограничение определяет подходящий РЦ для каждой операции.

$$Y_{ijm} \le a_{ijm} \qquad \forall i, j, m \tag{2.9.13}$$

Ограничение гарантирует, что выполнение операции над ДСЕ будет происходить только один раз и в одном приоритете на РЦ.

$$\sum_{k=1}^{k_m} X_{ijmk} = Y_{ijm} \qquad \forall i, j, m \tag{2.9.14}$$

Три ограничения задают условия не отрицательности переменных.

$$S_{ij} \ge 0, \quad \forall i, j \tag{2.9.15}$$

$$C_{ij} \ge 0, \quad \forall i, j \tag{2.9.16}$$

$$SM_{mk} \ge 0, \qquad \forall m, k \tag{2.9.17}$$

Еще ри ограничения задают значения булевых переменных.

$$X_{ijmk} \in \{0,1\}, \qquad \forall i, j, m, k \tag{2.9.18}$$

$$Y_{ijm} \in \{0,1\}, \qquad \forall i, j, m \tag{2.9.19}$$

$$Z_{hi} \in \{0,1\}, \qquad \forall i, h \tag{2.9.20}$$

В результате каждая операция каждой ДСЕ становится запланированной на конкретном РЦ, и у каждого РЦ есть последовательность назначенных операций.

«Жадный» алгоритм (Greedy Algorithm)

Для решения поставленной задачи, как уже было упомянуто ранее, были выбраны «жадный» и генетический алгоритмы. Данный выбор основывается на том, что реальные производственные задачи оперативно-производственного планирования в большинстве случаев являются NPтрудными и использование точных методов для решения таких задач не является лучшим вариантом, ввиду их вычислительной сложности и времени, необходимого для нахождения оптимального решения. Поэтому для решения реальных практических задач планирования производства лучшим вариантом является использование эвристических алгоритмов и нахождение квазиоптимальных решений.

Первый из предлагаемых в работе методов решения задачи оперативно-производственного планирования можно отнести к «жадным» алгоритмам. «Жадные» алгоритмы относятся к классу эвристических алгоритмов. Они основываются на принципе наилучшего выбора на каждом шаге с расчетом на то, что итоговое решение будет оптимальным. Иными словами, алгоритмы основываются на предположении, что локально-оптимальные решения приведут к оптимальному решению глобальной задачи. Данная эвристическая стратегия не всегда дает оптимальное решение, но, как правило, даёт хорошее приближение. «Жадные» алгоритмы отличаются низкой вычислительной сложностью и подходят для довольно широкого класса задач, что было одним из факторов выбора метода решения задачи планирования в данной работе.

Использование «жадного» алгоритма предполагает разбиение сложной задачи на более простые – декомпозицию. Все подходы к решению могут быть классифицированы по признаку декомпозиции на три категории: на основе работ или изделий, на основе ресурсов или РЦ и на основе событий. В работе выбран подход, основанный на событиях. Подходы, основанные на событиях, разбивают проблему до уровня операций. Эти подходы определяют, какая работа должна выполняться на РЦ на каждом уровне операции. Вместо планирования всех операций, включенных в процесс изготовления изделия сразу, как в подходах, основанных на работе, операции планируются отдельно. Конечно, последовательности между операциями в процессе изготовления ДСЕ должны быть при этом сохранены. В [18] этот тип планирования называется вертикальной загрузкой.

В подходах, основанных на событиях, считается, что время изменяется от события к событию. Рассматриваемые события – это мероприятия, которые изменяют состояние системы и требуют принятия некоторых мер. В каждом случае учитывается текущее состояние системы и предпринимаются действия, такие как запуск новой операции на РЦ. Разбивая проблему до уровня события появляется больше возможностей для применения правил, которые определяют приоритетность обхода РЦ и выбора одновременно доступных операций. В работе было выбрано правило, согласно которому приоритетной является операция с наиболее длинным временем изготовления последующих операций в дереве изделия – длинно-цикловая операция. Далее приведен «жадный» алгоритм, который выполняется в каждый момент совершения события.

Предложенный алгоритм состоит из 3-х шагов.

Шаг 1: Обход всех рабочих центров, которые могут выполнить какую-то операцию в текущий момент времени.

Шаг 2: Выбирается любой из РЦ, у которых очередь уведомлений не пуста, то есть существуют операции, которые можно выполнить, из списка доступных этому РЦ операций в текущий момент времени. В соответствии с «жадным» критерием и правилом приоритета выбирается операция. Если количество доступных операций меньше минимума из передаточной партии и требуемого количества, то РЦ не будет их планировать. В случае удовлетворения предыдущих условий и соответствия ограничениям математической модели операция занимает место в расписании и момент завершения операции фиксируется как событие системы. Если РЦ не может взять ни одну из доступных операций, он исключается из рассмотрения до момента наступления следующего события.

Шаг 3: Выбирается следующий РЦ и повторяется шаг 2. Если ни один РЦ не может взять операцию, то происходит завершение работы алгоритма и переход к следующему событию. В момент завершения события последующие по технологическому процессу операции добавляются в множество операций к выполнению и привязываются к последующим событиям, и все РЦ, которые могут их выполнять получают уведомления о появлении новых доступных операций.

В каждый момент времени, за исключением времени t = 0, алгоритм перебирает очень небольшое количество РЦ и доступных им операций. Данный подход существенно увеличивает быстродействие алгоритма по сравнению с подходами, основанными на работах или ресурсах. При планировании производственной программы, в которой задействовано 447 РЦ, среднее число РЦ в переборе составляло 8 РЦ.

Генетический алгоритм (genetic algorithm)

Генетический алгоритм является очень эффективным в контексте решения задач оперативно-производственного планирования. Генетический алгоритм основан на механизме естественной эволюции [18]. Он имитирует процессы воспроизводства и естественного отбора популяций для достижения эффективной и надежной оптимизации. Через процесс искусственных последовательных эволюций поколений находятся полезные адаптации для решения проблемы. Каждое поколение состоит из популяции хромосом, также называемых индивидуумами, и каждая хромосома представляет собой допустимое решение задачи.

Первое поколение может строиться различными путями, например, они могут формироваться случайно, на основе эвристических алгоритмов или каким-то другим методом. У каждого индивидуума оценивается результат решения, который обычно основывается на значении целевой функции и выполнению ограничений для рассматриваемой задачи.

Для создания новых популяций используются такие функции генетических алгоритмов, как воспроизводство, принцип «выживания наиболее приспособленного» и генетические операции рекомбинации (кроссинговер) и мутации. Операция воспроизводства включает в себя выбор хромосомы из текущей популяции и предоставления ей возможности выжить путем копирования ее в новую популяцию. Затем из этой популяции случайно выбирается одна или две хромосомы для запуска процедур кроссинговера и мутации, с помощью которых появляются новые хромосомы потомства. Кроссинговер или скрещивание заключается в замене двух случайно расположенных субхромосом двух спаривающихся хромосом. Мутация применяется к случайно выбранным генам хромосомы, некоторые случайные гены заменяется на другие из разрешенного интервала. Функция мутации не является обязательной для работы генетики, и в предложенном в работе алгоритме она не использовалась. Популяция потомков заменяет предыдущее поколение полностью или частично, и процесс повторяется для множества поколений с целью нахождения наилучшего индивидуума, который и будет являться наилучшим решением задачи оперативно-производственного планирования. Обычно у генетических алгоритмов нет очевидного критерия остановки, особенно для больших задач, поэтому необходимо сообщить алгоритму, когда ему остановиться. В качестве критериев остановки могут выступать: время работы алгоритма, количество поколений, количество поколений без улучшения значения целевой функции или какой-то специфический критерий для конкретной задачи.

Наиболее простое описание генетического алгоритма представлено в [19]:

1. Построить начальную популяцию.
2. Рассчитать значение целевой функции для каждого индивидуума в популяции.
3. Повторять, пока не будут достигнуты критерии остановки алгоритма:
    3.1. Выбрать наилучших индивидуумов для воспроизводства.
    3.2. Создать новую популяцию с помощью генетических операций.
    3.3. Оценить значение целевых функций потомков.

Предложенный в работе алгоритм имеет ряд отличий от классического генетического алгоритма. Перед запуском алгоритма задается количество особей в популяции и время работы алгоритма. Время работы алгоритма является критерием остановки. Процесс формирования начального поколения представляет собой следующую схему:

1. Формирование множества операций, которые можно выполнить, в начальный момент времени оно состоит из первых операции ДСЕ, для изготовления которых не нужны другие ДСЕ, то есть которые можно начать делать в начальный момент времени.

2. Случайно выбирается одна операция, и в качестве первого гена в хромосоме закладывается номер ДСЕ этой операции, в набор доступных операций попадает следующая операция по этой ДСЕ.

3. Для каждой ДСЕ отслеживается, необходимо ли для ее выполнения завершение других операций, так реализуется принцип последовательности изготовления. Если все операции по всем необходимым ДСЕ выполнены, в набор попадают первые операции уровня выше из дерева изделия.

4. Процесс повторяется, пока множество доступных операций не будет пустым.

Далее приведен пример формирования хромосомы на простом примере. Допустим, что у нас имеется три ДСЕ с номерами 1,2,3, при этом 3 – сборка, состоящая из 1 и 2. Для изготовления каждой ДСЕ необходимо выполнить 2 операции. Выделим множество операций, которые мы можем запланировать. В начальный момент времени это первые операции для 1 и 2 ДСЕ, которые обозначим как 1.1 и 2.1. Случайно выбираем одну из них и в качестве гена помещаем в последовательность. При этом добавим следующую операцию и проверим не добавляются ли в множество операции других ДСЕ. Если случайно была выбрана операция 1.1, то в множество добавится операция 1.2. Далее для краткости: {множество} – операция, добавляемая в хромосому.

{1.1, 2.1} – 1.1;

{1.2, 2.1} – 2.1;

{1.2, 2.2} – 1.2;

{2.2} – 2.2;

{3.1} – 3.1;

{3.2} – 3.2.

Как только множество становится пустым, процедура формирования начального решения считается завершенной, в рассмотренном примере хромосома имеет вид «121233». За счет случайности мы можем получить различные решения, каждое из которых является корректным. После этого оценивается целевая функция каждого решения. Далее рассмотрим процесс формирования нового поколения. Лучшая особь гарантированно попадает в новую популяцию без скрещивания. Иначе существует вероятность потерять лучшее решение, которое из-за скрещивания может стать хуже. Из генетических операций оставлен только кроссинговер, мутация не включена в алгоритм, так как при ее реализации увеличивается время на создание новой популяции и ухудшается качество получаемых решений за равные промежутки времени, в рамках периода в 24 часа.

Операция кроссинговера в алгоритме реализована и работает по следующей схеме: случайно выбирается два числа в промежутке от нуля до длинны хромосомы, распределение равномерное и они назначаются началом и концом субхромосомы, также случайно выбирается место для вставки в хромосоме. Далее представлен пример работы операции кроссинговера. Возьмем тот же пример и предположим, что мы выбрали 2 хромосомы:

2 1 1 2 3 3 и 1 2 1 2 3 3

Во второй случайным образом выделим субхромосому – пусть это 2 1 2. Вставим ее в случайное место первой особи – 2 (2 1 2) 1 1 2 3 3. Далее проходим по последовательности, исключая операции, которые мы в данный момент уже выполнили или еще не можем выполнить:

2 2 1 - остаётся без изменений;

2 - уже выполнили;

1 - оставляем в последовательности;

1 2 - уже выполнили;

3 3 – оставляем.

В итоге получаем новую особь: 2 2 1 1 3 3. Далее происходит оценка целевой функции – минимальное время изготовления всех ДСЕ, в рассматриваемой в работе задаче, и наилучшие особи участвуют в последующих этапах эволюционных улучшений до момента наступления критерия остановки.

Для апробации работы ранее представленных алгоритмов был реализован механизм, способный брать необходимые данные из информационной системы «1С: MES Оперативное управление производством», которая является основной системой производственного учета на предприятии. Данный механизм позволяет использовать реальные данные: о заказах на производство, спецификациях, технологических процессах, доступных рабочих центрах, графике их работы, количеству необходимых изделий к изготовлению, входящие в них ДСЕ и применяемость, штучное и подготовительно-заключительное время. Запуск алгоритмов производился по данным производства, однако с целью сохранения информации, являющейся коммерческой тайной предприятия и информации об изделиях для специальных условий эксплуатации в работе, в таблице 2.9.1 представлена переработанная информация об одном из запусков изделия.

В рассматриваемом примере предполагается производственная программа на изготовление 400 изделий ДСЕ №3. ДСЕ №1 и ДСЕ №2 входят в состав ДСЕ №3 по одной единице. На основе исходных данных был запущен «жадный» алгоритм. Результаты запланированной производственной программы представлены на графике Гантта на рисунке 2.9.1.

Таблица 2.9.1

Исходные данные для задачи оперативно-производственного планирования №1

Наименование детали	Номер операции	Рабочие центры	Время подготовительно - заключительное, сек.	Время выполнения шт., сек.
ДСЕ №1	O_{11}	1	1500	3
	O_{12}	2	1500	92
	O_{13}	3,4,5	300	10
	O_{14}	6	1200	5
	O_{15}	7,8,9	3900	450
ДСЕ №2	O_{21}	10	900	1
	O_{22}	11	0	3
	O_{23}	12	0	1
	O_{24}	7,8,9	2400	529
	O_{25}	13	1500	207
	O_{26}	7,8,9	1200	106
	O_{27}	14,15	2400	414
	O_{28}	3,4,5	300	92
ДСЕ №3	O_{31}	3,4,5	300	69
	O_{32}	7,8,9	1500	212
	O_{33}	14,15	2400	551
	O_{34}	3,4,5	300	184

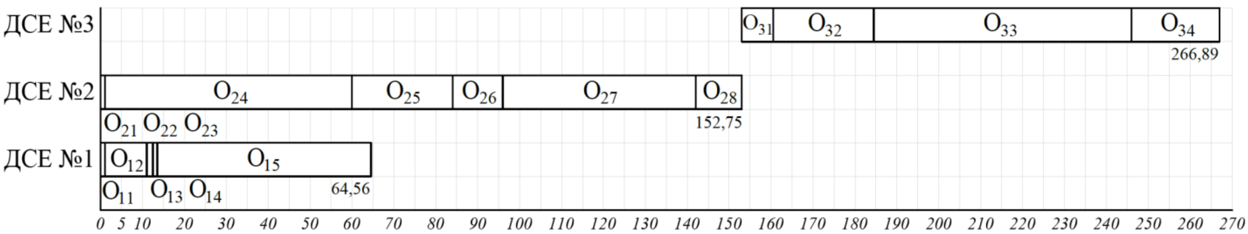


Рисунок 2.9.1. - Диаграмма Гантта выполнения производственной программы №1

Для оценки качества получаемых результатов было выбрано несколько изделий различной сложности изготовления и проведено сравнение с алгоритмом реализованным в текущей версии «1С: MES Оперативное управление производством», используемой на предприятии. Используемый алгоритм можно отнести к классу «жадных» алгоритмов так же, как и первый алгоритм, представленный в данной работе, но отличительной особенностью является уровень декомпозиции. На предприятии уровнем декомпозиции алгоритма является работа или отдельное ДСЕ. Расписание разрабатывается путем планирования изготовления ДСЕ по порядку приоритетов. Все операции ДСЕ планируются одновременно. Такой подход может привести к тому, что РЦ простаивает в ожидании высокоприоритетного задания, в то время как другие ДСЕ ожидают очереди, даже если могут быть обработаны за время меньшее, чем период ожидания.

Для сравнения результатов разработанных методов решения задачи оперативно-производственного планирования с используемым на предприятии были отобраны и созданы 3 производственные программы. Первая представлена ранее с исходными данными в таблице 2.9.1, ее размерность 3х15, то есть 3 типа ДСЕ, каждая со своим технологическим процессом, и 15 РЦ, для предприятия данная программа является небольшой по размеру. В качестве второй производственной программы выбрана квартальная программа одного из блоков основного изделия производства, размерность – 15х53. Третья производственная программа представляет собой набор ДСЕ, используемых в конечном изделии, также являющихся частью квартальной программы основного изделия, и проходящих через одни и те же РЦ, размерность задачи – 21х70. Так как в работе рассматривается статическая задача, построение расписаний производилось с условием, что все рабочие центры свободны на всем горизонте планирования и другие заказы не попадают в систему и соответственно не могут оказать влияние на сроки изготовления. Заказы планировались от одной даты, как разработанные, так и в MES для исключения возможности несоответствия сроков из-за разного количества выходных дней, сокращенных смен в предпраздничные дни. Производство работает в односменном режиме, результаты сравниваются в разрезе количества календарных дней и часов, необходимых на выполнение производственной программы. Результаты сравнения алгоритмов представлены в таблице 2.9.2.

Таблица 2.9.2

Результаты алгоритмов по разным задачам оперативно-производственного планирования

	Размерность задачи	1С: MES	«Жадный» алгоритм	Генетический алгоритм
Производственная программа №1	3x15	47 дней (267 ч.)	47 дней (267 ч.)	47 дней (267 ч.)
Производственная программа №2	15x53	67 дней (377 ч.)	67 дней (377 ч.)	67 дней (377 ч.)
Производственная программа №3	21x70	36 дней (201 ч.)	30 дней (161 ч.)	27 дней (152 ч.)

На основе полученных результатов можно сделать вывод, что разработанные алгоритмы работают правильно и могут запланировать выполнение производственной программы с той же точностью, как и текущий алгоритм, в случае если программа не очень сложная и очередей на РЦ практически не возникает. В производственной программе №3, в которой была задана более сложная с точки зрения взаимосвязей программа, разработанные алгоритмы показали результат лучше на 40 и 49 часов, что является практически 20-25 % сокращением общего времени изготовления.

3. Применение аппарата теории вероятностей при оптимизации процессов управления наукоемким производством

В аналогичных разделу 2.1. ситуациях можно использовать не только аппарат теории игр или приближенных вычислений, но и аппарат теории вероятностей.

3.1. Условная вероятность. Последовательные испытания.

Пусть ставятся два эксперимента. И пусть до события B произошло событие A. Изменит ли оценку шанса появления B информация о том, что A уже произошло? Рассмотрим пример такой ситуации.

Пример 3.1.1. Мы положили в ящик два шарика: черный и белый. Наугад вытаскивается один шар.

Событие A: «первый шар — белый».

Событие B: «второй шар — черный».

Если мы не знаем, какого цвета первый шар (например, шар вынут в абсолютной темноте), то естественно считать, что вероятность $P(B)$=0,5. Если же известно, что А произошло, то вероятность $P(B)$=1.

Для математического описания зависимостей между результатами последовательно проводимых экспериментов используется понятие **условная вероятность.** Условная вероятность появления события B, если событие A произошло, обозначается $P(B/A)$. Поскольку событие, противоположное A, мы обозначали $\overline{A}$, то условная вероятность события B, если событие A не произошло, будет обозначаться через $P(B/\overline{A})$.

Определение 3.1.1. Для произвольного события B **условной вероятностью** B при условии A называют вероятность события B, вычисленную в предположении, что A наступило. Обозначают $P(B/A)$ и вычисляют по формуле

$$P(B/A)=\frac{P(AB)}{P(A)}. \qquad (3.1.1)$$

Аналогично определяется, что $P(A/B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$ (3.1.2)

Пример 3.1.2. Из урны, в которой находятся 10 белых и 5 черных шаров, вынимаем один за другим два шара. Какова вероятность вытащить вторым белый шар? Рассмотрим события: *A* – «первый шар белый» и *B* – «второй шар белый». Понятно, что $P(A)=2/3$. Если событие *A* произошло, то среди оставшихся 14 шаров только 9 белых, поэтому вероятность события *B* будет равна 9/14. Если же событие *A* не произошло, т.е. первый шар оказался черным, то среди 14 оставшихся в урне шаров будет 10 белых, и вероятность *B* будет равна 10/14 или 5/7. Таким образом, вероятность появления события *B* зависит от того, произошло или нет событие *A*, т.е. вероятность *B* - условная, и $P(B/A)=9/14$, $P(B/\overline{A})=5/7$.

На основании формул (3.1.1) и (3.1.2) можно дать способ вычисления вероятности произведения двух событий:

$$P(AB)=P(B)\cdot P(A/B)=P(A)\cdot P(B/A). \qquad (3.1.3)$$

Сформулируем это правило в виде теоремы.

Теорема 3.1.1. Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие наступило.

Задача 3.1.1. Из колоды в 36 карт наугад вынимаем 2 карты. Вычислим вероятность того, что а) вынуты две дамы; б) вынуты дама и валет.

Решение. Обозначим события: *A* – «первая карта - дама», *B*– «вторая карта - дама», *C* – «вторая карта - валет». Мы хотим вычислить вероятности *P(AB)* и *P(AC)*. Поскольку в колоде 4 дамы, то $P(A)=4/36$. Если одна дама из колоды уже вынута, то вероятность того, что вторая карта – тоже дама, равна $P(B/A)=3/35$. Вероятность того, что вторая карта – валет, очевидно, равна $P(C/A)=4/35$. Согласно формуле (3.1.3.)

$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = (4/36) \cdot (3/35) = 1/105$, а

$P(AC) = P(A) \cdot P(C/A) = (4/36) \cdot (4/35) = 4/315$.

Ответ. а) 1/105; б) 4/315.

Задача 3.1.2. Студент на экзамене знает 20 вопросов из 25. Преподаватель задает два вопроса. Какова вероятность, что студент знает оба эти вопроса?

Решение. Пусть событие А - «студент ответит на первый вопрос». Событие В - «студент ответит на второй вопрос». Вероятность Р(А) = 20/25 = 0,8. Если событие А произошло, то остается 19 известных вопросов из 24, то есть Р(B/A) = 19/24. Получаем $P(AB)$ = 0,8 · 19/24 = 0,6333.

Ответ. 0,6333.

Задача 3.1.3. В коробке десять красных, пять синих и два желтых шара. Один за другим (без возвращения) вынимаются три шара. Какова вероятность, что: а) последовательно вынуты шары: желтый, синий, красный? б) последовательно вынуты три разноцветных шара?

Решение. Р(Ж-С-К)= (2/17)(5/16)(10/15)=5/204.

$$P(A) = \frac{2}{17}\frac{5}{16}\frac{10}{15} + \frac{2}{17}\frac{10}{16}\frac{5}{15} + \frac{10}{17}\frac{2}{16}\frac{5}{15} + \frac{10}{17}\frac{5}{16}\frac{2}{15} + \frac{5}{17}\frac{2}{16}\frac{10}{15} + \frac{5}{17}\frac{10}{16}\frac{2}{15} =$$

$$= 6 \cdot \frac{2 \cdot 5 \cdot 10}{17 \cdot 16 \cdot 15} \approx 0,441.$$

Ответ. а) 5/204; б) 0,441.

Задача 3.1.4. Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Определить вероятность того, что: а) студент знает все три предложенные ему вопроса; б) студент не знает лишь второй из трёх предложенных ему вопросов; в) студент не знает только один из трёх предложенных ему вопросов.

Решение. Введём обозначения: событие A – студент знает три вопроса; событие B – студент не знает второй вопрос; событие C – студент не знает один из трёх вопросов; событие D_i – студент знает i-й предложенный ему вопрос (i=1,2,3).

Тогда события A, B и C можно представить так:

$$A = D_1 D_2 D_3,\ B = D_1 \bar{D}_2 D_3,\ C = \bar{D}_1 D_2 D_3 + D_1 \bar{D}_2 D_3 + D_1 D_2 \bar{D}_3.$$

События D_1, D_2 и D_3 являются зависимыми, потому что вероятность знания или незнания каждого следующего вопроса изменяется в зависимости от осуществления или неосуществления предыдущего события.

Поэтому $P(A) = P(D_1) \cdot P\left(\frac{D_2}{D_1}\right) \cdot P\left(\frac{D_3}{D_1 D_2}\right) = \frac{20}{25} \cdot \frac{19}{24} \cdot \frac{18}{23} = \frac{57}{115}$,

$$P(B) = P\left(D_1 \bar{D}_2 D_3\right) = P(D_1) \cdot P\left(\frac{\bar{D}_2}{D_1}\right) \cdot P\left(\frac{D_3}{D_1 \bar{D}_2}\right) = \frac{20}{25} \cdot \frac{5}{24} \cdot \frac{19}{23} = \frac{14}{138}.$$

При нахождении вероятности события C учтём, что слагаемые - несовместные события.

$$P(C) = P\left(\bar{D}_1 D_2 D_3\right) + P\left(D_1 \bar{D}_2 D_3\right) + P\left(D_1 D_2 \bar{D}_3\right) =$$

$$= \frac{5}{25} \cdot \frac{20}{24} \cdot \frac{19}{23} + \frac{20}{25} \cdot \frac{5}{24} \cdot \frac{19}{23} + \frac{20}{25} \cdot \frac{19}{24} \cdot \frac{5}{23} = 3 \cdot \frac{19}{138} = \frac{57}{138}.$$

Ответ. а) 57/115; б) 14/138; в) 57/138.

Задача 3.1.5. В ящике находятся 6 катушек белых, 4 катушки чёрных и 2 катушки красных ниток. Катушки извлекаются по одной без возвращения. Определить вероятность того, что катушка с белыми нитками появится раньше, чем катушка с чёрными нитками.

Решение. По условию задачи после появления катушки с белыми нитками извлечения прекращаются, после появления катушки с красными нитками проводится следующее извлечение, катушка с чёрными нитками не должна появляться. Если A – случайное событие – катушка с белыми нитками появилась раньше, чем катушка с чёрными нитками, то $A = A_1 + C_1 A_2 + C_1 C_2 A_3$, где A_i – появление катушки с белыми нитками при i-ом извлечении (i = 1, 2, 3), C_i – появление катушки с красными нитками при i-ом извлечении (i = 1, 2). Здесь события-слагаемые – несовместные события, а события-сомножители – зависимые события, так как катушки извлекаются без возвращения и возможность извлечь катушку какого-то конкретного цвета зависит от результатов предыдущих извлечений. Поэтому $P(A)=P(A_1)+P(C_1)P\left(\frac{A_2}{C_1}\right)+P(C_1)P\left(\frac{C_2}{C_1}\right)P\left(\frac{A_3}{C_1C_2}\right)=\frac{6}{12}+\frac{2}{12}\cdot\frac{6}{11}+\frac{2}{12}\cdot\frac{1}{11}\cdot\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.

Ответ. 3/5.

Задача 3.1.6. Какова вероятность при бросании двух кубиков получить четную сумму при условии, что хотя бы на одном выпало 6 очков.

Решение. Обозначим события: A – «получить четную сумму», B – «хотя бы на одном кубике выпало 6 очков», тогда: $P(AB)=\frac{5}{36}$, $P(B)=\frac{11}{36}$, $P(A/B)=\frac{5}{11}$

.

Ответ. 5/11.

Задача 3.1.7. Буквы Т, Е, И, Я, Р, О написаны на отдельных карточках. Ребенок берет карточки в случайном порядке и прикладывает одну к другой: а) 3 карточки; б) все 6 карточек. Какова вероятность того, что получится слово: а) «ТОР»; б) «ТЕОРИЯ»?

Решение. а) Пусть событие А – получение слова «ТОР». $P(A)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{120}$.

б) Пусть событие В – получение слова «ТЕОРИЯ». $P(B)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{720}$.

Ответ. а) $\frac{1}{120}$; б) $\frac{1}{720}$.

Задача 3.1.8. Буквы А, А, А, Н, Н, С написаны на отдельных карточках. Ребенок берет карточки в случайном порядке и прикладывает одну к другой все 6 карточек. Какова вероятность того, что получится слово «АНАНАС»:

Решение. Пусть событие А – получение слова «АНАНАС». $P(A)=\frac{3\cdot2\cdot2\cdot1\cdot1\cdot1}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=\frac{1}{60}$.

Ответ. $\frac{1}{60}$.

Задача 3.1.9. Из 30 студентов 10 имеют спортивные разряды. Какова вероятность того, что выбранные наудачу 3 студента – разрядники?

Решение. Пусть событие A – 3 выбранных наудачу студента – разрядники.

$$P(A)=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{30\cdot 29\cdot 28}=\frac{6}{203}.$$

Ответ. $\frac{6}{203}$.

Задача 3.1.10. В урне 9 белых шаров и 1 черный шар. Вынули сразу три шара. Какова вероятность, что все шары белые?

Решение. $P(A)=\frac{9}{10}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{7}{8}=\frac{7}{10}$.

Ответ. 7/10.

Задача 3.1.11. Из колоды в 36 карт одну за другой вытаскивают три карты. Какова вероятность того, что первой картой будет туз, второй – король, третьей – дама?

Решение. $P(A)=\frac{4}{36}\cdot\frac{4}{35}\cdot\frac{4}{34}=\frac{8}{5355}$.

Ответ. 8/5355.

Задача 3.1.12. Буквы слова ПОКОЛЕНИЕ выписаны на карточках. Наудачу вынимают одну карточку за другой и укладывают по порядку. Найти вероятность того, что получится слово ПОЛЕ.

Решение. $P(A)=\frac{1}{9}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{2}{6}=\frac{1}{756}$.

Ответ. 1/756.

Задача 3.1.13. В урне два белых и три черных шара. Два игрока поочередно вынимают из урны по шару, не вкладывая их обратно. Выигрывает тот, кто раньше получит белый шар. Найти вероятность того, что выиграет первый игрок.

Решение. Пусть событие A – выиграет первый игрок. $P(A)=\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{3}{5}$.

Ответ. 3/5.

Задача 3.1.14. Из полной колоды карт (52 листа) вынимаются сразу четыре карты. Найти вероятность того, что все эти четыре карты будут разных мастей.

Решение. Первая карта может быть какой угодно масти; вторая должна быть не такой, как первая; третья – не такой, как первая и вторая; четвертая – не такой, как три первые. Искомая вероятность равна: $P(A)=1\cdot\frac{39}{51}\cdot\frac{26}{50}\cdot\frac{13}{49}\approx 0{,}106$.

Ответ. 0,106.

Задача 3.1.15. Из полной колоды карт (52 листа) вынимаются сразу четыре карты. Каждая карта после вынимания возвращается в колоду. Найти вероятность того, что все эти четыре карты будут разных мастей.

Решение. $P(A)=1\cdot\frac{39}{52}\cdot\frac{26}{52}\cdot\frac{13}{52}\approx 0{,}094$.

Ответ. 0,094.

Задача 3.1.16. Из полной колоды карт (52 листа) вынимают сразу две карты. Одну из них смотрят – она оказалась дамой; после этого две вынутые карты перемешивают и одну из них берут наугад. Найти вероятность того, что она окажется тузом.

Решение. Чтобы событие A – появление туза при втором вынимании – имело место, нужно, прежде всего, мы вынули не ту карту, которую вынули в первый раз (вероятность этого 1/2); затем, чтобы вторая карта была тузом. $P(A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{51}=\frac{2}{51}$.

Ответ. 2/51.

Задача 3.1.17. Условия опыта те же, что в предыдущей задаче, но первая (посмотренная) карта оказалась тузом; найти вероятность того, что при втором вынимании мы получим тоже туз.

Решение. Событие A – туз при втором вынимании – может произойти в двух вариантах: A_1 - второй раз появился тот же туз, что и первый раз; A_2 - второй раз появился не тот, а другой туз. $P(A)=P(A_1)+P(A_2)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{51}=\frac{27}{51}$.

Ответ. 27/51.

Задача 3.1.18. В барабане револьвера семь гнезд, из них в пяти заложены патроны, а два оставлены пустыми. Барабан приводится во вращение, в результате чего против ствола случайным образом оказывается одно из гнезд. После этого нажимается пусковой крючок; если ячейка была пустая, выстрела не происходит. Найти вероятность того, что, повторив такой опыт два раза подряд, мы оба раза не выстрелим.

Решение. Так как любое гнездо при первом выстреле может сочетаться с любым во втором, число случаев $n = 7 \cdot 7 = 49$.Число благоприятных случаев равно числу комбинаций пустых гнезд: $m = 2 \cdot 2 = 4$; $p = \frac{m}{n} = \frac{4}{49}$.

Ответ. $\frac{4}{49}$.

3.2. Независимые события

Введем теперь понятие независимого события.

Определение 3.2.1. Если $P(B/A) = P(B)$, т.е. условная вероятность события B равна его безусловной вероятности, то событие B называют **независимым** от события A.

В этом случае, из формулы (5.3) следует, что

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B), \tag{3.2.1}$$

и теорема о произведении двух событий принимает очень простой вид.

Теорема 3.2.1. (*о произведении двух независимых событий*). Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

Рассмотрим, как рассчитать вероятность совокупного результата двух или более экспериментов, которые проводятся в независимых друг от друга условиях.

Итак, вероятность события A остается постоянной как при условии, что B произошло, так и при условии, что В не произошло. Именно это мы принимаем за независимость в обыденной жизни.

На практике обычно для установления независимости событий не используют формальное определение и не анализируют формулы, а определяют независимость интуитивно. Например, нетрудно сообразить, что результаты нескольких подбрасываний монеты или кубика – независимые события.

Задача 3.2.1. Бросаем две игральные кости. Какова вероятность выпадения на первой кости пяти очков, а на второй – не менее трех очков?

Решение. Обозначим события: A – «выпадение пяти очков на первой кости», B – «выпадение не менее трех очков на второй кости».

$P(A)=1/6$, $P(B)=4/6=2/3$. Очевидно, что события A и B совместны и независимы, поэтому $P(AB)=P(A)\cdot P(B)=1/9$.

Ответ. 1/9.

Определение 3.2.2. События $A_1,A_2,\ldots, A_k$ из будем называть **независимыми в совокупности**, если вероятность совместного наступления любых n (n $\geq$2) из этих событий равна произведению их вероятностей.

Для событий, независимых в совокупности, верна следующая теорема.

Теорема 3.2.2. (*о произведении событий, независимых в совокупности*) Если события $A_1,A_2,\ldots, A_k$ независимы в совокупности, то

$$P(A_1,A_2,\ldots, A_k)=P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_k), \tag{3.2.2}$$

т.е. вероятность произведения событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий.

Заметим, что для независимости в совокупности нескольких событий недостаточно их попарной независимости. В этом можно убедиться на следующем примере, принадлежащем С.Н. Бернштейну.

Пример 3.2.1. Пусть грани тетраэдра (четырехгранной пирамиды) раскрашены следующим образом: первая грань - красного цвета, вторая – зеленого, третья – синего, а на четвертой грани есть все эти три цвета. Выбираем на тетраэдре одну грань случайным образом. Обозначим события следующим образом: A – «на выбранной грани есть красный цвет», B – «на выбранной грани есть зеленый цвет», C – «на этой грани есть синий цвет».

Всего тетраэдр имеет 4 грани, на двух из них есть красный цвет, поэтому $P(A) = 2/4 = 1/2$. Аналогично вычисляем $P(B) = P(C) = 1/2$.

Допустим, что произошло событие B, т.е. мы выбрали вторую или четвертую грань. Тогда событие A может наступить при условии, что B уже произошло, только в одном из двух случаев (только на четвертой грани есть красный цвет, а на второй грани его нет). Поэтому $P(A/B) = 1/2$. Аналогично $P(A/C) = P(B/C) = 1/2$.

Из равенства $P(A) = P(A/B)$ следует, что события A и B независимы. Из равенств $P(B) = P(B/C)$ и $P(A) = P(A/C)$ следует, что B и C, A и C тоже попарно независимы. Однако, если произошли события B и C одновременно (на грани есть и синий и зеленый цвета), то заведомо и событие A произошло (на этой грани есть и красный цвет тоже), т.е. $P(A/BC) = 1$.

Таким образом, $P(A) \neq P(A/BC)$, это означает, что события A, B и C не являются независимыми в совокупности, хотя они попарно независимы.

Вероятность события ABC (на грани есть все три цвета) очевидно, равна 1/4. Эта вероятность может быть вычислена с помощью формулы (3.1.3), но формула (3.2.2) здесь неприменима.

Задача 3.2.2. Пусть события A, B, C состоят в попадании точки в фигуры, указанные на рисунке, расположенные внутри общего правильного треугольника (проведены средние линии). Независимы ли события A, B, C в совокупности?

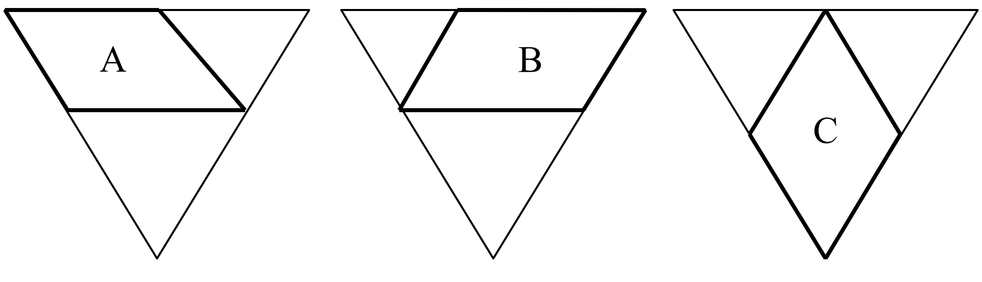


рис. 3.2.1

Решение. Здесь $P(A) = P(B) = P(C) = 0,5$; $P(AB) = P(BC) = P(AC) = 0,25$, следовательно, есть попарная независимость. Однако $P(ABC) = 0.25$, в то время как $P(A)\ P(B)\ P(C) = 1/8 = 0,125$.

Ответ. В совокупности события A, B и C зависимы.

Перейдем теперь к расчету вероятностей совокупных результатов последовательных или совместных испытаний, независимых с точки зрения «физики».

Задача 3.2.3. Мишень состоит из концентрических кругов. За попадание в определенную часть мишени начисляются очки, согласно схеме на рисунке ниже. Первый стрелок попадает в «десятку» мишени с вероятностью 0,2, в «девятку» - с вероятностью 0,3, в «восьмерку» - с вероятностью 0,4. В остальную часть мишени или мимо – с вероятностью 0,1. Вероятности поражения указанных в примере частей мишени вторым стрелком таковы: «в десятку» — 0.3, «в девятку» — 0.6, «в восьмерку»- 0,1. Эксперимент заключается в том, что два стрелка дают залп по мишени (делают по одному выстрелу одновременно). Будем считать, что результат выстрела второго стрелка не зависит от результата первого с точки зрения «физики» эксперимента, то есть мы имеем дело с совместными независимыми испытаниями. Каковы вероятности событий: 1) «у первого стрелка — 10 очков и у второго — 9», 2) «сумма очков за выстрел у команды из двух стрелков не менее 18»?

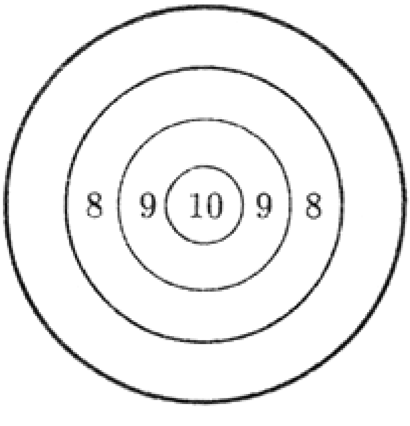


рис. 3.2.2

Решение. «Физическая» независимость явлений A и B, как уже обсуждалось, основана на том, что шанс появления A при условии B, что B произошло, равен шансу появления A при условии, что B не произошло. Пусть событие A — «у первого стрелка — 10 очков»; B — «у второго стрелка — 9 очков». Получаем, что P(AB) = P(A) P(B) = 0,2 · 0,6 = 0,12. Рассуждая аналогично, получаем: вероятность, что команда набрала не менее 18 очков, равна сумме вероятностей событий, описываемых ниже.

Событие	Число очков у первого	Число очков у второго
A_1	10	10
A_2	10	9
A_3	10	8
A_4	9	10
A_5	9	9
A_6	8	8

$P = P(A_1+A_2+A_3 +A_4 + A_5 + A_6) = 0{,}2 \cdot 0{,}3 + 0{,}2 \cdot 0{,}6 + 0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}3 \cdot 0{,}3 +$
$+0{,}3 \cdot 0{,}6 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}59.$

Ответ. 1) 0,12; 2) 0,59.

Выделим два очевидных следствия из теоремы сложения вероятностей, которые относятся к вычислению вероятности суммы независимых событий.

Теорема 3.2.3. Пусть события A и B независимы. Тогда

$$P(A + B)= 1-P(\overline{A})\cdot P(\overline{B}), \qquad (3.2.3)$$

$$P(A + B)= P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B). \qquad (3.2.4)$$

Задача 3.2.4. Два охотника одновременно выстрелили в зайца. Первый попадает в 70% случаев, а второй — в 20%. Какова вероятность, что заяц будет подстрелен?

Решение. Если А, В - события, состоящие в попадании соответственно, первого, второго охотников, то А + В - попадание хотя бы одного из них. Поэтому Р(А + В)= 0,7 + 0,2 – 0,7 · 0,2 = 1 – 0,3 · 0,8 = 0,76.

Ответ. 0,76.

Здесь считалось, что А и В — независимые события. Заметим, что одновременный залп повышает вероятность попадания и с точки зрения теории.

Обозначим: Для $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $P(A_i) = p_i$, а вероятность противоположного события $P(\bar{A}_i) = 1 - p_i = q_i$. В итоге получаем формулу для вычисления вероятности появления хотя бы одного события:

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 q_3 \ldots q_n \qquad (3.2.5)$$

Замечание. Если все события $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3, \ldots, \bar{A}_n$ имеют одну и ту же вероятность ***p***, то вероятность появления хотя бы одного из этих событий

$$P(A) = 1 - q^n \qquad (3.2.6)$$

Задача 3.2.5. Вероятность правильного ответа студента на первый вопрос билета – 0,6, на второй – 0,3, на третий – 0,8. Какова вероятность, что студент правильно ответит хотя бы на один вопрос билета?

Решение. Обозначим A_1 - событие «правильный ответ на первый вопрос», A_2 - событие «правильный ответ на второй вопрос», A_3 - событие «правильный ответ на третий вопрос». Событие А - «ответ на хотя бы один вопрос» означает ответ на один вопрос или на два вопроса или на все три вопроса. События А (ответ на хотя бы один вопрос) и $\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$ (студент не ответил ни на один вопрос) противоположны, следовательно сумма их вероятностей равна единице: $P(A) + P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3) = 1$. Тогда

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) = 1 – 0{,}4 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}2 = 0{,}944.$$

Ответ. 0,944.

Задача 3.2.5. Три стрелка делают по одному выстрелу. Вероятность того, что первый стрелок попадет в цель, равна 0,8; для второго и третьего стрелков эти вероятности равны соответственно 0,7 и 0,4. Вычислим вероятности следующих событий: 1) все три стрелка попадут в цель; 2) ровно один стрелок попадет в цель; 3) хотя бы один стрелок попадет в цель.

Решение. Пусть B – «все три стрелка попадут в цель», C – «ровно один стрелок попадет в цель» и D – «хотя бы один стрелок попадет в цель». Обозначим события: A_1 – «первый стрелок попал в цель»; A_2 – «второй стрелок попал в цель»; A_3 – «третий стрелок попал в цель». Тогда события B, C и D могут быть записаны в следующем виде: $B = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$, $C = A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3 + \overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A}_3 + \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3$, $D = A_1 + A_2 + A_3$.

По условию $P(A_1) = 0{,}8$; $P(A_2) = 0{,}7$; $P(A_3) = 0{,}4$; поэтому $P(\overline{A}_1) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$; $P(\overline{A}_2) = 0{,}3$; $P(\overline{A}_3) = 0{,}6$.

События A_1, A_2, A_3 – независимые (каждый стрелок попадает или нет независимо от другого), значит, согласно теореме 3.2.1,

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}4 = 0{,}224.$$

Событие C мы представили в виде суммы несовместных событий и получим:

$$P(C) = P(A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3) + P(\overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A}_3) + P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3) =$$

$$= 0{,}8 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}6 + 0{,}2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}6 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}252.$$

Чтобы найти $P(D)$, мы перейдем к противоположному событию $\overline{D}$, состоящему в том, что ни один стрелок не попал.

Тогда $P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 1 - P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3) = 1 - 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}964$.

Ответ. 1) 0,224; 2) 0,252; 3) 0,964.

Задача 3.2.6. Какова вероятность того, что наудачу взятое натуральное число не делится: *а*) ни на два, ни на три; *б*) на два или на три?

Решение. Пусть случайное событие A – наудачу взятое число не делится ни на два, ни на три; случайное событие B – наудачу взятое число не делится на два или на три. Введём ещё два события: C – наудачу взятое число не делится на два; D – наудачу взятое число не делится на три. Тогда, очевидно, $A = C \cdot D$, $B = C + D$. События C и D независимы, так как и среди всех натуральных чисел и среди нечётных натуральных чисел два числа из идущих подряд трёх не делятся на три, следовательно, $P(A)=P(C)\cdot P(D)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$.

Однако события C и D совместны, поэтому:

$$P(B)=P(C)+P(D)-P(CD)=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{5}{6}.$$

Ответ. а) 1/3; б) 5/6.

Задача 3.2.7. Из урны, содержащей 6 белых и 4 чёрных шара, наудачу последовательно извлекается по одному шару до первого появления чёрного шара. Найти вероятность того, что придётся производить четвёртое извлечение, если извлечения шаров производятся: *а*) с возвращением шаров в урну; *б*) без возвращения шаров в урну.

Решение. Случайное событие A – будет производиться четвёртое извлечение. Ясно, что четвёртое извлечение будет производиться в том случае, если при первых трёх извлечениях не появится чёрный шар. Обозначим через A_i случайное событие – при i-ом извлечении появился шар белого цвета (i=1,2,3). Тогда $A=A_1\cdot A_2\cdot A_3$, следовательно, $P(A)=P(A_1\cdot A_2\cdot A_3)$.

а) В этом случае шары извлекаются с возвращением, поэтому вероятность извлечения белого шара в очередной раз не зависит от результатов предыдущих извлечений, поэтому события A_i независимы и $P(A)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)=0,6^3=0,216$.

б) Если шары извлекаются без возвращения, то после каждого извлечения состав урны изменяется, следовательно, изменяются и вероятности извлечения шаров. События A_i в этом случае зависимы, поэтому

$$P(A)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1A_2)=\frac{6}{10}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8}\approx 0,167.$$

Ответ. а) 0,216; б) 0,167.

Задача 3.2.8. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле у каждого из двух стрелков равна 0,3. Стрелки стреляют по очереди, причём каждый может сделать по два выстрела. Попавший в мишень первым получает приз. Найти вероятности получения приза для каждого из стрелков и вероятность того, что приз будет вручён стрелкам. Какова вероятность того, что приз останется у организаторов соревнования?

Решение. Обозначим события, вероятности которых следует определить. A – приз будет вручён первому стрелку; B – приз будет вручён второму стрелку; C – приз будет вручён стрелкам; $\bar{C}$ – приз останется у организаторов соревнования.

Введём также события:

A_i – первый стрелок попал в мишень при i-ом выстреле;

B_i – второй стрелок попал в мишень при i-ом выстреле (i = 1, 2).

Тогда можно записать: $A = A_1 + \bar{A}_1\bar{B}_1A_2$, $B = \bar{A}_1B_1 + \bar{A}_1\bar{B}_1\bar{A}_2B_2$, $C = A + B$.

События-слагаемые во всех случаях – несовместные события, а события-сомножители – независимые события, так как вероятность попадания в мишень каждым из стрелков не зависит ни от номера выстрела, ни от результата предыдущего выстрела. Таким образом:

$$P(A) = P(A_1) + P(\bar{A}_1)P(\bar{B}_1)P(A_2) = 0,3 + 0,7\cdot 0,7\cdot 0,3 = 0,447;$$

$$P(B) = P(\bar{A}_1)P(B_1) + P(\bar{A}_1)P(\bar{B}_1)P(\bar{A}_2)P(B_2) =$$

$$= 0,7\cdot 0,3 + 0,7\cdot 0,7\cdot 0,7\cdot 0,7 = 0,7\cdot P(A) = 0,3129;$$

$$P(C) = P(A) + P(B);\ P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 0,2401.$$

Вероятность события $\bar{C}$ можно найти иначе:

$$P(\bar{C}) = P(\bar{A}_1)P(\bar{B}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{B}_2) = 0,7^4 = 0,2401.$$

Ответ. Вероятность получения приза для стрелка A равна 0,447; для игрока B – 0,3129; вероятность того, что приз будет вручён стрелкам -

0,7599; вероятность того, что приз останется у организаторов соревнования – 0,2401.

Задача 3.2.9. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и набирает её наудачу. Определить вероятность того, что он наберёт нужный номер не более чем за три попытки.

Решение. Случайное событие A – абонент дозвонился не более, чем за три попытки набора номера. Пусть случайное событие A_i – абонент дозвонился при *i*-ом наборе номера (*i* = 1, 2, 3). Так как каждый следующий набор номера производится только в том случае, если предыдущая попытка оказалась неудачной, то $A = A_1 + \bar{A}_1 A_2 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$. Здесь события-слагаемые несовместны, а события-сомножители зависимы, поскольку при каждом следующем наборе номера абонент учитывает результат предыдущих попыток. Значит,

$$P(A) = P(A_1) + P(\bar{A}_1)\cdot P\left(\frac{A_2}{\bar{A}_1}\right) + P(\bar{A}_1)\cdot P\left(\frac{\bar{A}_2}{\bar{A}_1}\right)\cdot P\left(\frac{A_3}{\bar{A}_1\cdot\bar{A}_2}\right) = \frac{1}{10} + \frac{9}{10}\cdot\frac{1}{9} + \frac{9}{10}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{8} = \frac{3}{10}.$$

Вероятность события A можно также найти, вычислив сначала вероятность противоположного события $\bar{A}$ и использовав формулу $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

Случайное событие $\bar{A}$ – абонент не дозвонился за три набора номера – есть произведение трёх событий: $\bar{A} = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3$, поэтому

$$P(\bar{A}) = P(\bar{A}_1)\cdot P\left(\frac{\bar{A}_2}{\bar{A}_1}\right)\cdot P\left(\frac{\bar{A}_3}{\bar{A}_1\cdot\bar{A}_2}\right) = \frac{9}{10}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{7}{8} = \frac{7}{10},\ \mathrm{P(A)} = 1 - 0{,}7 = 0{,}3.$$

Ответ. 0,3.

Задача 3.2.10. В первой урне находятся три белых, пять красных и семь синих шаров, во второй урне – два белых, четыре красных и девять синих шаров. Из каждой урны наудачу извлекают по одному шару. Найти вероятность того, что извлечённые шары будут одного цвета.

Решение. Случайное событие D – извлечённые шары одного цвета. Введём ещё шесть случайных событий:

A_i – из *i*-ой урны извлекли шар белого цвета;

B_i – из *i*-ой урны извлекли шар красного цвета;

C_i – из i-ой урны извлекли шар синего цвета; i = 1,2.

Вероятности этих событий легко вычисляются по классическому определению вероятности. Очевидно, что шары будут одного цвета, если они будут оба или белого, или красного, или синего цвета. Значит, $D = A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2$.

Ясно, что события-слагаемые несовместны, а события-сомножители независимы. Следовательно,

$$P(D) = P(A_1A_2) + P(B_1B_2) + P(C_1C_2) = P(A_1)P(A_1) + P(B_1)P(B_2) + P(C_1)P(C_2) =$$

$$= \frac{3}{15}\cdot\frac{2}{15} + \frac{5}{15}\cdot\frac{4}{15} + \frac{7}{15}\cdot\frac{9}{15} = \frac{89}{225}.$$

Ответ. 89/225.

Задача 3.2.11. Игрок A поочерёдно играет с игроками B и C, имея вероятность выигрыша в каждой партии 2/3, и прекращает игру после первого проигрыша или после двух сыгранных с каждым игроком партий. Определить вероятности выигрыша игры игроками A, B и C.

Решение. Обозначим через A, B и C события – выигрыш игры игроком A, B и C соответственно и через B_i, C_i события – выигрыш игроком B или C i-ой партии (i=1,2). Так как выигрыш партии каждым из игроков B или C означает проигрыш партии и, следовательно, остановку игры ведущим её игроком A, то случайные события A, B, C можно записать в виде:

$$A = \bar{B}_1\bar{C}_1\bar{B}_2\bar{C}_2;\ B = B_1 + \bar{B}_1\bar{C}_1B_2;\ C = \bar{B}_1C_1 + \bar{B}_1\bar{C}_1\bar{B}_2C_2.$$

Здесь события-слагаемые будут несовместными, а события-сомножители – независимыми событиями, поэтому

$$P(A) = P(\bar{B}_1)P(\bar{C}_1)P(\bar{B}_2)P(\bar{C}_2) = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{16}{81},$$

$$P(B) = P(B_1) + P(\bar{B}_1)\cdot P(\bar{C}_1)\cdot P(B_2) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{13}{27},$$

$$P(C) = P(\bar{B}_1)P(C_1) + P(\bar{B}_1)P(\bar{C}_1)P(\bar{B}_2)P(C_2) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{26}{81}.$$

Ответ. Вероятности выигрыша игры игроком А – 16/81, игроком В – 13/27 и игроком С – 26/81.

Замечание. Так как события A, B и C образуют полную группу ($A+B+C=U$) и попарно несовместны, то $P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)=1$, поэтому вероятность одного из событий, например C, можно было найти так: $P(C)=1-P(A)+P(B)=1-\frac{16}{81}-\frac{13}{27}=\frac{26}{81}$.

Задача 3.2.12. Брошены последовательно три монеты. Определить, зависимы или независимы события: А={выпадение «герба» на первой монете}; В={выпадение хотя бы одной решки}.

Решение. $P(A)=\frac{1}{2}$; $P(B)=1-\frac{1}{2^3}=\frac{7}{8}$; $P(AB)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^3}\right)=\frac{3}{8}$.

Ответ. События зависимы.

Задача 3.2.13. Для того чтобы сбить самолет, достаточно одного попадания. Было сделано три выстрела с вероятностями попадания 0,1; 0,2 и 0,4 соответственно. Какова вероятность, что самолет сбит?

Решение. Обозначим событие А – «самолет сбит». Чтобы найти $P(A)$, мы перейдем к противоположному событию $\bar{A}$, состоящему в том, что самолет не сбит.

Тогда $P(A)=1-P(\bar{A})=1-P(\bar{A}_1\cdot\bar{A}_2\cdot\bar{A}_3)$=1-0,9·0,8·0,7=0,568.

Ответ. 0,568.

Задача 3.2.14. Для того чтобы разрушить мост, нужно попадание не менее двух бомб. Независимо сбросили три бомбы с вероятностями попадания 0,1; 0,3 и 0,4. Какова вероятность, что мост разрушен?

Решение. $P(A)=0,9\cdot 0,3\cdot 0,4+0,1\cdot 0,3\cdot 0,6+0,1\cdot 0,3\cdot 0,4=0,166$.

Ответ. 0,166.

Задача 3.2.15. Какова вероятность того, что при многократном бросании игральной кости шестерка выпадет впервые на четвертом броске?

Решение. $P(A)=\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{125}{1296}$.

Ответ. 125/1296.

Задача 3.2.16. Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 4 очка в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 3 очка, в случае ничьей — 1 очко, если проигрывает — 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,4.

Решение. $0{,}4 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}32$

Ответ. 0,32.

Задача 3.2.17. Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,9, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из не пристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,2. На столе лежит 10 револьверов, из них только 4 пристрелянные. Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватает первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон промахнется.

Решение. Джон берет пристрелянный револьвер и промахивается или берет не пристрелянный револьвер и промахивается:$0{,}4 \cdot 0{,}1 + 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}52$.

Ответ. 0,52.

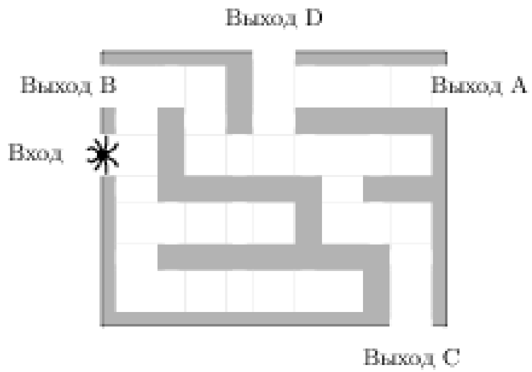
Задача 3.2.18. Если гроссмейстер А играет белыми, то он выигрывает у гроссмейстера Б с вероятностью 0,52. Если А играет черными, то А выигрывает у Б с вероятностью 0,3. Гроссмейстеры А и Б играют две партии, причем во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А выиграет оба раза.

Ответ. 0,156.

Задача 3.2.19. Биатлонист пять раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что биатлонист первые три раза попал в мишени, а последние два промахнулся. Результат округлите до сотых.

Ответ. 0,02.

Задача 3.2.20. На рисунке изображён лабиринт. Паук заползает в лабиринт в точке «Вход». Развернуться и ползти назад паук не может, поэтому на каждом разветвлении паук выбирает один из путей, по которому ещё не полз. Считая, что выбор дальнейшего пути чисто случайный, определите, с какой вероятностью паук придёт к выходу D.



Ответ. 1/16.

Задача 3.2.21. В Волшебной стране бывает два типа погоды: хорошая и отличная, причём погода, установившись утром, держится неизменной весь день. Известно, что с вероятностью 0,8 погода завтра будет такой же, как и сегодня. Сегодня 3 июля, погода в Волшебной стране хорошая. Найдите вероятность того, что 6 июля в Волшебной стране будет отличная погода.

Ответ. 0,392.

3.3. Полная вероятность. Формула Байеса

Выведем теперь еще две важные формулы – формулу полной вероятности и формулу Байеса.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть требуется найти вероятность события A, которое происходит обязательно вместе с одним из событий B_1, B_2, … B_n, образующих полную группу попарно несовместных событий. Тогда, если событие A наступило, то обязательно произошло одно из событий AB_1, AB_2, …, AB_n. Это означает, что $A = AB_1 + AB_2 + ... + AB_n$. Поскольку события B_1, B_2, …, B_n попарно несовместны, то и события AB_1, AB_2, …, AB_n обладают тем же свойством.

По теореме сложения вероятностей несовместных событий: $P(A) = P(AB_1) + P(AB_2) + ... + P(AB_n)$. Кроме того, по формуле (5.1) имеем: $P(AB_1) = P(A/B_1) \cdot P(B_1)$, $P(AB_2) = P(A/B_2) \cdot P(B_2)$, …, $P(AB_n) = P(A/B_n) \cdot P(B_n)$. Следовательно,

$$P(A) = P(A/B_1)P(B_1) + P(A/B_2)P(B_2) + ... + P(A/B_n)P(B_n). \qquad (3.3.1)$$

Равенство (3.3.1) носит название **формулы полной вероятности**. События B_1, $B_2, \ldots, B_n$ в этой формуле часто называют **гипотезами**. Это название оправдывается тем, что мы не знаем заранее, с каким из событий B_1, B_2, …, B_n вместе наступает событие *A*, и говорится, что *A* наступило в условиях той или иной гипотезы.

Задача 3.3.1. Город получает тетради от трех фабрик. Первая поставляет 30% общего числа тетрадей, вторая — 50%, третья — 20%. Среди тетрадей, сделанных на первой фабрике, — 60% имеют розовую обложку, на второй — 20%, на третьей — 80%. Какова вероятность, что купленная в этом городе наугад тетрадь будет в розовой обложке?

Решение. Здесь B_i (i = 1, 2, 3) — событие, соответствующее высказыванию «купить тетрадь *i*-й фабрики». А - «купить тетрадь в розовой обложке». По условию задачи: $P(B_1) = 0{,}3$, $P(B_2) = 0{,}5$, $P(B_3) = 0{,}2$, $P(A/B_1) = 0{,}6$, $P(A/B_2) = 0{,}2$, $P(A/B_3) = 0{,}8$. По формуле полной вероятности получаем, что $P(A) = 0{,}3 \cdot 0{,}6 + 0{,}5 \cdot 0{,}2 + 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}44$.

Ответ. 0,44.

Задача 3.3.2. Студент из *n* билетов знает ответы лишь на *m* билетов. Что вероятнее: сдать экзамен, взяв билет первым или взяв билет вторым?

Решение. Если студент берет билет первым, то вероятность равна m/n (классическая схема). Пусть он берет билет вторым, тогда введем две гипотезы: B_1 — первый отвечающий забрал «хороший билет», B_2 — первый отвечающий забрал «плохой билет». Очевидно, что $P(B_1)=m/n$, $P(B_2) = (n-m)/n$. По формуле (3.3.1) получаем:

$$P(A)=\frac{m}{n}\cdot\frac{m-1}{n-1}+\frac{n-m}{n}\cdot\frac{m}{n-1}=\frac{m}{n},$$

где $P(A)$ – вероятность сдать экзамен, идя вторым.

Ответ. Вероятность сдать экзамен, взяв билет первым или вторым одинаковая. Попробуйте доказать, что она не зависит, от того каким по счету идти на экзамен.

Применяя формулу (5.1) легко найти вероятность $P(B_i/A)$ для любого i от 1 до n. Действительно, $P(B_i/A)=\frac{P(AB_i)}{P(A)}$. Подставляя в эту формулу значение $P(A)$ из (7.1) и учитывая, что $P(AB_i)=P(A/B_i)P(B_i)$, получаем

$$P(B_i/A)=\frac{P(A/B_i)P(B_i)}{P(A/B_1)P(B_1)+P(A/B_2)P(B_2)+...+P(A/B_n)P(B_n)}. \qquad (3.3.2)$$

Формула (3.3.2) называется **формулой Байеса**. Она широко применяется при решении задач, связанных с вероятностной оценкой гипотез после проведения эксперимента, поскольку позволяет найти вероятность каждой гипотезы при условии, что событие A произошло.

Задача 3.3.3. В кузове грузовика 15 ящиков тушенки первого завода, 9 ящика второго и 6 ящика третьего завода. Вероятность производства брака на первом заводе - 0,03, на втором – 0,02, на третьем – 0,01. Взятая для контроля наудачу банка тушенки оказалась годной. На каком заводе вероятнее всего она была изготовлена?

Решение. Пусть событие А - «тушенка годная». Событие B_1- «тушенка сделана на 1 заводе», B_2 - «тушенка сделана на 2 заводе», B_3- «тушенка сделана на 3 заводе». Из условия задачи: $P(B_1) = 15/30 = 0{,}5$; $P(B_2) = 0{,}3$; $P(B_3) = 0{,}2$. Тогда условные вероятности выпуска годной тушенки для отдельных заводов: $P(A/B_1) = 0{,}97$; $P(A/B_2) = 0{,}98$; $P(A/B_3) = 0{,}99$. По формуле полной вероятности вероятность выбора годной банки:

$$P(A) = P(B_1)\cdot P(A/B_1) + P(B_2)\cdot P(A/B_2) + P(B_3)\cdot P(A/B_3) =$$
$$= 0{,}5\cdot 0{,}97 + 0{,}3\cdot 0{,}98 + 0{,}2\cdot 0{,}99 = 0{,}977.$$

Вероятность выпуска годной банки соответственно на заводах 1,2,3, округляя до тысячных, находим по формуле Байеса:

$P(B_1/A) = (P(B_1)\cdot P(A/B_1)$: $P(A) = (0,5\cdot 0,97) : 0,977 \approx 0,496$

$P(B_2/A) = (P(B_2)\cdot P(A/B_2)) : P(A) = (0,3\cdot 0,98) : 0,977 \approx 0,300$

$P(B_3/A) = (P(B_3)\cdot P(A/B_3)) : P(A) = (0,2\cdot 0,99) : 0,977 \approx 0,204$.

Ответ. Вероятнее всего банка была изготовлена на первом заводе.

Задача 3.3.4. Два станка производят детали, поступающие на общий конвейер. Вероятность получения стандартной детали на первом станке равна 0,9, на втором – 0,85. Производительность второго станка вдвое больше производительности первого. Вычислим вероятность того, что наудачу взятая с конвейера деталь стандартна.

Решение. Обозначим события: A - «наудачу взятая с конвейера деталь стандартна», B_1 - «взятая деталь изготовлена на первом станке», B_2 - «деталь изготовлена на втором станке». Очевидно, что $P(B_1)=1/3$, $P(B_2)=2/3$, $P(A/B_1)=0,9$, $P(A/B_2)=0,85$. Согласно формуле полной вероятности,

$P(A)=0,9\cdot 1/3+0,85\cdot 2/3\approx 0,8667$.

Ответ. 0,8667.

Задача 3.3.5. Предположим, что в первой из трех урн 6 белых и 4 черных шарика, во второй – 7 белых и 3 черных, в третьей – только 8 белых. Наугад выбираем одну из трех урн, из нее наугад вынимаем шарик. Какова вероятность того, что шар белый?

Решение. Обозначим события: A – «вынут белый шарик», B_1 – «наугад выбрана первая урна», B_2 – «наугад выбрана вторая урна», B_3 – «наугад выбрана третья урна». Ясно, что $P(B_1)=P(B_2)=P(B_3)=1/3$, $P(A/B_1)=6/10=3/5$, $P(A/B_2)=7/10$, $P(A/B_3)=1$. Согласно формуле полной вероятности

$$P(A)=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}+\frac{7}{10}\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}=\frac{23}{30}\approx 0,7667.$$

Ответ. 0,7667.

Задача 3.3.6. В первой из трех урн 6 белых и 4 черных шарика, во второй – 7 белых и 3 черных, в третьей – только 8 белых. Наугад выбираем одну из трех урн, из нее наугад вынимаем шарик. Он оказался белым. Какова вероятность того, что шар вынут из второй урны?

Решение. Обратите внимание на то, что формулировки задач 3.3.5 и 3.3.6 очень похожи. Они отличаются лишь поставленными вопросами. В первой из этих задач надо вычислить вероятность события A, которое происходит в условиях гипотез B_1, B_2 и B_3, и поэтому мы применяем формулу полной вероятности. Во второй задаче событие A уже произошло, требуется переоценить вероятность второй гипотезы, т.е. вычислить $P(B_2/A)$, значит, здесь нужно применить формулу Байеса.

События обозначаем так же, как и в задаче 7.5: A – «вынут белый шарик», B_1 – «наугад выбрана первая урна», B_2 – «наугад выбрана вторая урна», B_3 – «выбрана третья урна». Тогда $P(B_1)=P(B_2)=P(B_3)=1/3$, $P(A/B_1)=3/5$, $P(A/B_2)=7/10$, $P(A/B_3)=1$. Согласно формуле Байеса

$$P(B_2/A)=\frac{(7/10)\cdot(1/3)}{(3/5)\cdot(1/3)+(7/10)\cdot(1/3)+1/3}=\frac{7}{23}\approx 0{,}3043.$$

Ответ. 0,3043.

Задача 3.3.7. Из 10 студентов, которые пришли на экзамен по математике, трое подготовились отлично, четверо – хорошо, двое – удовлетворительно, а один совсем не подготовился – понадеялся на то, что все спишет. В билетах 20 вопросов. Отлично подготовившиеся студенты могут ответить на все 20 вопросов; те, кто подготовился хорошо, могут ответить на 16 вопросов; удовлетворительно – на 10; а тот, кто не подготовился, может ответить только на 5 вопросов. Каждый студент получает билет, в котором три вопроса. Приглашенный первым студент ответил на все вопросы своего билета. Какова вероятность того, что он отлично подготовился?

Решение. Обозначим события: A - «студент ответил на 3 вопроса», B_1 – «приглашен студент, подготовившийся отлично», B_2 – «приглашен студент, подготовившийся хорошо», B_3 – «приглашен студент, подготовившийся удовлетворительно», B_4 – «приглашен студент, который к экзамену не готов». Согласно условиям задачи, $P(B_1)=0{,}3$, $P(B_2)=0{,}4$, $P(B_3)=0{,}2$, $P(B_4)=0{,}1$. Кроме того, $P(A/B_1)=1$, $P(A/B_2)=(16/20)\cdot(15/19)\cdot(14/18)\approx 0{,}491$, $P(A/B_3)=(10/20)\cdot(9/19)\cdot(8/18)\approx 0{,}105$, $P(A/B_4)=(5/20)\cdot(4/19)\cdot(3/18)\approx 0{,}009$.

Следует найти $P(B_1/A)$. По формуле Байеса

$$P(B_1/A)=\frac{0{,}3\cdot 1}{0{,}3\cdot 1+0{,}4\cdot 0{,}491+0{,}2\cdot 0{,}105+0{,}1\cdot 0{,}009}\approx 0{,}579.$$

Ответ. 0,579.

Как видим, искомая вероятность сравнительно невелика, поэтому преподавателю придется предложить студенту еще несколько дополнительных вопросов.

Задача 3.3.8. Из урны, содержащей 3 белых и 2 чёрных шара, переложено 2 шара в урну, содержащую 4 белых и 2 чёрных шара. Найти вероятность вынуть после этого из второй урны белый шар.

Решение. Обозначим через A событие – из второй урны вынут белый шар. Можно выдвинуть три гипотезы: B_1 – из первой урны во вторую переложены два белых шара; B_2 – переложены один белый и один чёрный шары; B_3 – переложены два чёрных шара. Имеем: $P\left(B_1\right)=\dfrac{C_3^2}{C_5^2}=0{,}3$, $P\left(B_2\right)=\dfrac{C_3^1\cdot C_2^1}{C_5^2}=0{,}6$, $P\left(B_3\right)=\dfrac{C_2^2}{C_5^2}=0{,}1$.

Условные вероятности равны: $P\left(\dfrac{A}{B_1}\right)=\dfrac{6}{8}=\dfrac{3}{4}$, $P\left(\dfrac{A}{B_2}\right)=\dfrac{5}{8}$, $P\left(\dfrac{A}{B_3}\right)=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$.

По формуле полной вероятности получаем:

$$P(A)=P\left(B_1\right)P\left(\frac{A}{B_1}\right)+P\left(B_2\right)P\left(\frac{A}{B_2}\right)+P\left(B_3\right)P\left(\frac{A}{B_3}\right)=0{,}3\cdot\frac{3}{4}+0{,}6\cdot\frac{5}{8}+0{,}1\cdot\frac{1}{2}=0{,}65.$$

Ответ. 0,65.

3.4. Независимые испытания. Схема Бернулли

Определение 3.4.1. Испытаниями Бернулли называются независимые испытания с двумя исходами (традиционно их называют «успех» и «неудача»), вероятность которых не меняется от испытания к испытанию.

Проводятся ровно n одинаковых последовательных или совместных независимых испытаний, причем каждое испытание имеет ровно два элементарных исхода: А (успех) и Ā (неудача).

Обозначим вероятности: $P(A) = p$**,** $P(\bar{A}) = 1 - p = q$.

Будем говорить, что опыты (испытания) проводятся **по схеме Бернулли**, если выполнены следующие условия:

1. Число опытов известно. Оно равно натуральному числу n.
2. Опыты независимы.
3. В каждом опыте одно событие А может произойти с постоянной вероятностью p.

Вычислим вероятность того, что «в n испытаниях событие А произойдет ровно m раз и не произойдет $n - m$ раз». Обозначим это событие $P_n(m)$. Очевидно, что оно распадается на частные случаи, имеющие вид произведений m множителей А и $n - m$ множителей Ā.

Например, при $n = 3$**,** $m = 2$ это случаи: $AA\bar{A} + A\bar{A}A + \bar{A}AA$

Тогда вероятность $P_3(2) = ppq + pqp + qpp = C_3^2 p^2 q$.

В общем случае вероятность события $P_n(m)$ находится по формуле

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m} . \qquad (3.4.1)$$

Эта формула называется «биномиальным законом расчета вероятности», поскольку описывает слагаемые **бинома Ньютона**:

$$(p+q)^n = C_n^0 p^0 q^n + C_n^1 p^1 q^{n-1} + ... + C_n^n p^n q^0 .$$

Эта же формула в литературе называется **формулой Бернулли** по имени её создателя.

Задача 3.4.1. В контрольной работе пять задач. Вероятность не решить любую из них равна 0,2. Какова вероятность, что будет решено не менее трех задач?

Решение. Здесь q=0,2. Поэтому p=0,8. Нам необходимо найти вероятность суммы $P_5(3)+P_5(4)+P_5(5)$. По теореме сложения и формуле (3.4.1) получаем:

$P_5(m\geq 3)=P_5(3)+P_5(4)+P_5(5)=C_5^3p^3q^2+C_5^4p^4q+C_5^5p^5=10\cdot(0,8)^3\cdot(0,2)^2+$

$+5\cdot(0,8)^4\cdot 0,2+(0,8)^5\approx 0,942.$

Ответ. 0,942.

Задача 3.4.2. Вероятность попадания стрелка в цель при одном выстреле равна 0,8. Допустим, что он стреляет по цели 6 раз. Найдем вероятность того, что стрелок попал в цель не менее четырех раз.

Решение. По условию задачи $n=6$, $p=0{,}8$, $q=0{,}2$. Искомая вероятность равна $P_6(m\geq 4)=P_6(4)+P_6(5)+P_6(6)$. Применяя три раза формулу (8.1), находим $P_6(4)=C_6^4\cdot 0{,}8^4\cdot 0.2^2\approx 0{,}246$, $P_6(5)\approx 0{,}393$, $P_6(6)\approx 0{,}262$. Поэтому $P_6(m\geq 4)\approx 0{,}901$.

Ответ. 0,901.

Поскольку в n испытаниях событие A может произойти 0 раз или 1 раз или 2 раза … или n раз, причем перечисленные случаи включают в себя все возможности и несовместны между собой, то очевидно, что

$$P(0)+P(1)+...+P(n)=1.$$

При фиксированном значении n вероятность $P_n(m)$ с увеличением m сначала возрастает, затем достигает своего максимального значения и при дальнейшем росте m убывает.

Докажем это свойство.

Из формулы (3.4.1) легко получить соотношение: $\dfrac{P_n(m+1)}{P_n(m)}=\dfrac{n-m}{m+1}\cdot\dfrac{p}{q}$.

Тогда $P_n(m+1)>P_n(m)$, если $(n-m)p>(m+1)q$, т.е. $m<np-q$;

$P_n(m+1)=P_n(m)$, если $m=np-q$;

$P_n(m+1) < P_n(m)$, если $m > np - q$.

Значение m_0, при котором вероятность $P_n(m)$ принимает наибольшее значение, называется **вероятнейшим (или наиболее вероятным) значением**.

Как следует из предыдущих оценок, вероятнейшее значение удовлетворяет неравенству $$np - q \le m_0 \le np - q + 1.$$

Учитывая, что $q = 1 - p$, последнее неравенство можно переписать в виде

$$np + p - 1 \le m_0 \le np + p. \qquad (3.4.2)$$

Если $np + p$ является целым числом, то наиболее вероятных значений два: $np + p - 1$ и $np + p$.

Задача 3.4.3. В условиях задачи 8.2 найдем вероятнейшее значение числа попаданий стрелка.

Решение. В этом примере $n = 6$, $p = 0{,}8$, $q = 0{,}2$. Поэтому в силу неравенства (8.2), $4{,}6 \le m_0 \le 5{,}6$. Это означает, что при данных условиях наиболее вероятное число попаданий равно пяти.

Ответ. 5.

Задача 3.4.4. Пусть стрелок стреляет по цели 50 раз, а вероятность попадания стрелка в цель при одном выстреле равна 1/3. Вычислим наиболее вероятное число попаданий.

Решение. Применяя формулу (8.2), имеем $16 \le m_0 \le 17$. Значит, вероятнейших значений два. Вероятнее всего, что в данных условиях стрелок попадет в цель 16 или 17 раз.

Ответ. 16,17.

Задача 3.4.5. Каким должно быть число подбрасываний игральной кости, чтобы наивероятнейшее число выпадений грани с единицей оказалось равным 5?

Решение. Искомое число подбрасываний n должно быть таким, чтобы значение $m_o = 5$ принадлежало отрезку $[np - q,\ np + p]$. В рассматриваемом случае $p=\frac{1}{6}$, $q=\frac{5}{6}$, следовательно, n определяется из неравенств $\frac{1}{6}n-\frac{5}{6}\leq 5\leq \frac{1}{6}n+\frac{1}{6}$ откуда находим $29\leq n\leq 35$.

Отметим, что среди найденных значений n в пяти случаях (n = 30, 31, 32, 33, 34) значение $m_o=5$ является единственным наивероятнейшим числом выпадений грани с единицей (соответствующее $np-q$ – нецелое) и в двух случаях (n = 29, 35) наряду с $m_o=5$ существует другое наиболее вероятное число появлений единицы ($np-q$ – целое).

Ответ. $29\leq n\leq 35$

Задача 3.4.6. Вероятность выиграть по лотерейному билету равна 0,08. Каково наиболее вероятное число выигрышных билетов: а) из 90; б) из 99? Сколько билетов надо купить, чтобы наиболее вероятное число выигрышных было: в) равно единице?

Решение. При n=90, p=0,08, q=0,92 имеем $np–q$= 6,28, $np+p$=7,28; поэтому k_0 = 7.

При n=99, p=0,08, q=0,92 имеем $np-q$= 7 , $np+p$ = 8; следовательно, k_0 может принимать любое из двух значений: 7 или 8.

При k_0 = 1 имеем $0{,}08n-0{,}92\leq 1$, то есть $n\leq 24$, и $0{,}08\,n+0{,}08\geq 1$, то есть $n\geq 12$. Следовательно, купить нужно не менее 12 и не более 24 билетов.

Ответ. а) 7; б) 7,8; в) $12\leq n\leq 24$.

Задача 3.4.7. В урне 2 белых и 3 чёрных шара. Производится 10 извлечений шаров из урны по два шара каждый раз с последующим возвращением извлечённой пары шаров в урну. Найти вероятность того, что ровно при двух извлечениях будет вынута разноцветная пара шаров.

Решение. Здесь опыт заключается в извлечении пары шаров из урны. Число опытов n=10. Событие A – появление разноцветной пары шаров. Его вероятность $p=P(A)=\frac{2\cdot 3}{C_5^2}=\frac{3}{5}$ (всего исходов, т. е., пар шаров − C_5^2, из них благоприятствующих исходов, т. е., разноцветных пар шаров −

$C_2^1 \cdot C_3^1 = 2 \cdot 3 = 6$). Опыты независимы, так как извлечённая пара шаров перед очередным извлечением возвращается обратно в урну. Искомая вероятность $P_2(10)$ может быть найдена по формуле Бернулли: $P_2(10) = C_{10}^2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^8 \approx 0,01$.

Ответ. 0,01.

Задача 3.4.8. А) Каково наиболее вероятное число выпадений грани с одной точкой при 26 подбрасываниях игральной кости? Б) Чему равна соответствующая этому числу выпадений вероятность?

Решение. Здесь число n опытов (подбрасываний кости) равно 26, p – вероятность выпадения грани с одной точкой равна 1/6, q =1 – p =5/6. В рассматриваемом случае $np - q = \frac{26}{6} - \frac{5}{6} = \frac{21}{6} = 3,5$ – нецелое число, единственное искомое наивероятнейшее число m_o выпадений грани с одной точкой определяется из условий $np - q < m_O < np + p$, в нашем случае $3{,}5 < m_O < 4{,}5$, т. е., $m_O = 4$. (Отметим также, что при нецелом $np - q$ m_O всегда является ближайшей к числу $np - q$ целочисленной точкой справа). Вероятность $P_{26}(4)$ найдем по формуле Бернулли: $P_{26}(4) = C_{26}^4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{22}$.

Ответ. А) 4; Б) $P_{26}(4) = C_{26}^4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{22}$.

Как мы видим из решения последней задачи, в условиях схемы Бернулли вычисления вероятности по формуле (3.4.1) удобны только при достаточно маленьких значениях m и n.

При больших значениях m и n вычисление $P_n(m)$ представляет значительные трудности, главным образом, из-за сложности подсчета факториалов в формуле числа сочетаний. Поэтому возникает необходимость в приближенных формулах, позволяющих с достаточной степенью точности определять эти вероятности.

Впервые формула такого рода была найдена Муавром в 1730 году для частного случая схемы Бернулли при $p = q = 1/2$, а затем обобщена Лапласом на случай произвольного *p*, отличного от 0 и 1. Эта формула получила название локальной теоремы Муавра - Лапласа.

3.5. Локальная теорема Муавра - Лапласа. Интегральная теорема Муавра - Лапласа. Предельная теорема Пуассона

Локальная теорема Муавра-Лапласа. В условиях схемы Бернулли при достаточно большом количестве испытаний имеет место приближенное равенство

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \tag{3.5.1}$$

где $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$.

Для функции $\varphi(x)$ составлены таблицы, которые присутствуют во всех справочниках и пособиях по теории вероятностей. Они позволяют не вычислять значение $\varphi(x)$ в каждой конкретной задаче. При пользовании таблицами нужно учитывать, что функция $\varphi(x)$ четная, т.е. $\varphi(-x) = \varphi(x)$. Поэтому значения этой функции при отрицательных *x* в таблице не приводятся.

Формула (3.5.1) позволяет достаточно точно вычислить $P_n(m)$, когда n велико, а p не очень близко к 0 или к 1.

Этой формулой обычно пользуются, если $npq \geq 10$.

Задача 3.5.1. 95% всей продукции некоторой фабрики составляет продукция высшего сорта. Определим вероятность того, что из взятых на проверку 500 изделий 480 окажутся высшего сорта.

Решение. По условию задачи мы находимся в рамках схемы Бернулли, где $n = 500$, $m = 480$, $p = 0{,}95$, $q = 0{,}05$. Поскольку n достаточно велико, и

$npq = 500 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}05 = 23{,}75 \geq 10$, мы можем использовать формулу (9.1) для вычисления искомой вероятности. Тогда $\frac{1}{\sqrt{npq}} \approx 0{,}2052$, $x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \approx 1{,}026$. По таблице значений $\varphi(x)$ находим $\varphi(1{,}026) \approx 0{,}235$. Следовательно, $P_{500}(480) \approx 0{,}048$. Как мы видим, полученная вероятность достаточно мала.

Ответ. 0,048 ($\approx 5\%$)

Ценность для практики локальной теоремы Лапласа невысока. Гораздо более важным для практического использования является вопрос о вероятности того, что событие *A* наступит не менее k_1 и не более k_2 раз, т.е. вероятность $P_n(k_1 \leq m \leq k_2)$. В этом случае приближенную формулу дает интегральная теорема Муавра - Лапласа.

Интегральная теорема Муавра-Лапласа. В условиях схемы Бернулли имеет место приближенное равенство

$$P_n(k_1 \leq m \leq k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \tag{3.5.2}$$

где $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$, $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$.

Функция $\Phi(x)$ называется **функцией Лапласа**. Для нее также составлены таблицы (см. приложение 2), которые можно найти во всех справочниках и пособиях по теории вероятностей. При пользовании таблицами нужно учитывать, что функция $\Phi(x)$ нечетная, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Кроме того, обычно в таблицах указаны значения функции Лапласа для значений *x* от 0 до 5; при $x > 5$ полагают $\Phi(x)$ =0,5.

Задача 3.5.2. В условиях задачи 3.5.1. найдем вероятность того, что от 470 до 490 изделий окажутся высшего сорта.

Решение. По условию задачи $n = 500$, k_1=470, k_2=490, $p = 0{,}95$, $q = 0{,}05$. Поскольку *n* достаточно велико, и $npq = 500 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}05 = 23{,}75 \geq 10$, мы для вычисления искомой вероятности $P_n(k_1 \leq m \leq k_2)$ используем формулу (3.5.2). Проводя вычисления, получаем: $x_1 \approx -1{,}026$, $x_2 \approx 3{,}078$. По таблице значений функции Лапласа $\Phi(x)$ находим $\Phi(-1{,}026) = -\Phi(1{,}026) \approx -0{,}3475$, $\Phi(3{,}078) \approx 0{,}4990$.

Следовательно, $P_{500}(470 \le m \le 490) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) \approx\ 0{,}4990 + 0{,}3475 = 0{,}8465$.

Ответ. 0,8465 ($\approx$85%).

Следствием из интегральной теоремы Муавра-Лапласа является формула для вычисления вероятности осуществления неравенства

$$\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon,$$

то есть вероятности того, что отклонение относительной частоты $\frac{m}{n}$ наступления события А от его вероятности p не превышает по абсолютной величине некоторого заданного числа ε:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \qquad (3.5.3)$$

Равенство (3.5.3) легко выводится из (3.5.2) и носит название **формулы вероятности отклонения относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях.**

Задача 3.5.3. Вероятность появления события А в каждом из независимых испытаний равна 0,6. Найдем вероятность того, что относительная частота появления события А в 1000 испытаниях отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более, чем на 0,02.

Решение. Согласно условию задачи n=1000, p=0,6, q=1-p=0,4, ε=*0,02*. Значит, $\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} = 0{,}02 \cdot \sqrt{\frac{1000}{0{,}6 \cdot 0{,}4}} \approx 1{,}29$. По таблицам находим $\Phi(1{,}29) \approx 0{,}4015$, и согласно формуле (9.3), $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \approx 0{,}8030$.

Ответ. 0,803.

Заметим, что при достаточно большом числе испытаний n и фиксированном ε величина $\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$ тоже велика ($\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} \to +\infty$ при $n \to +\infty$), и $2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \approx 1$ (поскольку при $x > 5$ $\Phi(x) \approx 0{,}5$). Это означает, согласно (9.3), что

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)\to 1 \text{ при } n\to+\infty. \qquad (3.5.4)$$

Соотношение (3.5.4) носит название **теоремы Бернулли**. Оно показывает, что при достаточно большом числе испытаний *n* практически достоверным можно считать тот факт, что отклонение относительной частоты *m/n* (т.е. статистической вероятности) наступления события А от его вероятности *p* не превышает по абсолютной величине любого сколь угодно малого заданного числа ε.

Практически равенство (3.5.4) означает следующее: при большом числе испытаний *n* статистическая вероятность события *m/n* приближается к его классической вероятности *p*, т.е. $\mu(A)\approx P(A)$. Подбрасывая монету достаточно большое число раз, мы вправе ожидать, что герб будет выпадать примерно в половине случаев. Бросая кубик достаточно большое число раз, можно ожидать, что шестерка выпадет в 1/6 части опытов и т.д.

Если в условиях схемы Бернулли *n* достаточно велико, а $npq<10$, т.е. *p* близко к 0 или к 1, то теоремы Муавра – Лапласа уже не дают достаточной точности.

В случае, когда *n* велико, а *p* близко к 0 (т.е. событие А происходит редко), рекомендуется пользоваться приближенной формулой, полученной Пуассоном. Теорему Пуассона часто называют «формулой редких событий». Она дает хорошее приближение, если $np\le 10$.

Теорема Пуассона. В условиях схемы Бернулли, т.е. при проведении *n* независимых испытаний с двумя исходами, в каждом из которых вероятность появления события *A* постоянна и равна *p* (0< *p*<1), а вероятность появления противоположного события $\bar{A}$ равна *q*=1–*p*, для $P_n(m)$ (вероятности того, что в этих испытаниях событие *A* наступит ровно *m* раз) имеет место приближенное равенство

$$P_n(m)\approx\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}, \qquad (3.5.5)$$

где $\lambda = np$.

Задача 3.5.4. Известно, что в партии, состоящей из 5000 деталей, вероятность брака равна 0,0004. Вычислим вероятности следующих событий: а) в партии ровно 3 бракованных детали; б) бракованных деталей в партии не более трех; в) бракованных деталей больше трех.

Решение. а) Ясно, что мы находимся в условиях схемы Бернулли, причем $n = 5000$, $m = 2$, $p = 0{,}0004$. Поскольку n достаточно велико, а p близко к 0, $\lambda = np = 2 < 10$, то для вычисления искомой вероятности нужно воспользоваться формулой (9.5): $P_{5000}(3) \approx \frac{2^3}{3!} e^{-2} \approx 0{,}1804$.

б) Бракованных деталей в партии не более трех, если их 0 или 1 или 2 или 3, следовательно, $P_{5000}(m \le 3) = P_{5000}(0) + P_{5000}(1) + P_{5000}(2) + P_{5000}(3) \approx$

$\approx \left(\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} \right) e^{-2} \approx 0{,}8571$.

в) Заметим, что события б) и в) в данной задаче противоположны, поэтому $P_{5000}(m > 3) = 1 - P_{5000}(m \le 3) \approx 1 - 0{,}8571 = 0{,}1429$.

Ответ. а) 0,1804; б) 0,8571; в) 0,1429.

Замечание. Если в условиях схемы Бернулли n достаточно велико, а p близко к 1, то $q = 1 - p$ близко к 0, и теорему Пуассона можно применять к событию $\bar{A}$ (именно это событие будет происходить редко).

Задача 3.5.5. Вероятность рождения девочки 0,485. Какова вероятность, что среди 10 000 новорожденных будет 4950 девочек?

Решение. Здесь n=10 000, m =4950, p = 0,485, q = 0,515, $\sqrt{npq} \approx 49{,}98$, x=2,001, $\varphi(x) \approx 0{,}0539$ (по таблице приложения 1). Поэтому $P_{5000}(4950) \approx 0{,}0011$. Видно насколько мала вероятность, что количество новорожденных девочек равно **точно** 4 950.

Ответ. 0,0011.

Задача 3.5.6. Вероятность рождения мальчика 0,515. Какова вероятность, что среди 10 000 новорожденных число мальчиков отличается от числа девочек не более чем на 400?

Решение. По условию задачи n=10 000, p=0,515, q=0,485, $\sqrt{npq} \approx 49{,}98$, $\left|m-\left(10000-m\right)\right| \le 400$, то есть 4800≤$m$≤5200. Откуда x_1 = (4800 – 5150)/49,98≈-7 , x_2=(5200 – 5150)/49,98≈1. По таблице (приложение 2) *Ф(*-7*)*= - *Ф(*7*)*≈ -0,5; *Ф(*1*)*≈0,34, следовательно Р(4800 ≤ m ≤ 5200) = *Ф(*1*)* - *Ф(*-7*)* ≈ 0,84.

Ответ. 0,84.

Задача 3.5.7. Вероятность того, что картофелина поражена вредителем p=0,15. Найти вероятность того, что среди случайно отобранных 600 картофелин относительная частота появления пораженных картофелин отклонится от вероятности p=0,15 по абсолютной величине не более чем на 0,03.

Решение. По условию задачи n=600, p=0,15, q = 0,85, ε = 0,03. Подставляя данные в формулу (3.5.3) получаем:

$$P\left(\left|\frac{m}{600}-0{,}15\right|\le 0{,}03\right)\approx 2\Phi\left(0{,}03\cdot\sqrt{\frac{600}{0{,}15\cdot 0{,}85}}\right)=2\Phi(2{,}06)=2\cdot 0{,}4803=$$
$$=0{,}9606$$

Вероятность Ф(2,06) = 0,4803 находим по таблице приложения 2.

Ответ. 0,9606.

Задача 3.5.8. Завод отправил на базу 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,002. Найти вероятность того, что в пути будет повреждено изделий: а) ровно три; б) менее трех; в) более трех; г) хотя бы одно.

Решение. Число $n=500$ велико, вероятность $p=0{,}002$ мала и рассматриваемые события (поврежденные изделия) независимы, поэтому имеет место формула Пуассона, $\lambda = n\cdot p = 500\cdot 0{,}002 = 1$.

а) Найдем вероятность того, что будет повреждено ровно 3 изделия: $P_{500}(3) = e^{-1}/3! = 0,36788/6 = 0,0613$;

б) Найдем вероятность того, что будет повреждено менее 3 изделия: $P_{500}(0) + P_{500}(1) + P_{500}(2) = e^{-1} + e^{-1} + e^{-1}/2 = 5/2 \cdot 0,36788 = 0,9197$;

в) Найдем вероятность того, что будет повреждено более 3 изделий. События «повреждено более трех изделий» и «повреждено не более трех изделий» - противоположны, отсюда:

$P_{500}(>3) = 1 - \left(P_{500}(0) + P_{500}(1) + P_{500}(2) + P_{500}(3)\right) = 0,019$;

г) Найдем вероятность того, что будет повреждено хотя бы одно изделие. События «повреждено хотя бы одно изделие» и «ни одно изделие не повреждено» - противоположные, отсюда: $P = 1 - P_{500}(0) = 0,632$.

Ответ. а) 0,0613; б) 0,9197; в) 0,019; г) 0,632.

Задача 3.5.9. Посеяли 10000 семян. Вероятность для семени не прорасти 0,0003. Какова вероятность того, что все семена прорастут?

Решение. Поскольку вероятность не прорасти для семени обратно пропорциональна количеству посеянных семян, то применим формулу Пуассона с параметром $\lambda = 10000 \cdot 0,0003 = 3$. В результате получим $P_{10000}(0) \approx \frac{3^0}{0!} e^{-3} = e^{-3} \approx 0,05$.

Ответ. 0,05.

Задача 3.5.10. В партии из 768 арбузов каждый арбуз оказывается неспелым с вероятностью 1/4. Найти вероятность того, что количество спелых арбузов будет в пределах от 564 до 600.

Решение. По условию задачи $n = 768$, k_1=564, k_2=600, $p = \frac{3}{4}$, $q = \frac{1}{4}$.

Поскольку n достаточно велико, и $npq = 768 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = 144 \geq 10$, мы для вычисления искомой вероятности $P_n(k_1 \leq m \leq k_2)$ используем формулу (3.5.2).

Проводя вычисления, получаем: $x_1 = \dfrac{564 - 768 \cdot \frac{3}{4}}{\sqrt{768 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}}} = \dfrac{564 - 576}{12} = -1$,

$x_2 = \dfrac{600 - 768 \cdot \frac{3}{4}}{\sqrt{768 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}}} = \dfrac{600 - 576}{12} = 2$. По таблице значений функции Лапласа $\Phi(x)$

находим $\Phi(-1) = -\Phi(1) \approx -0,3413$, $\Phi(2) \approx 0,4772$.

Следовательно, $P_{768}(564 \le m \le 600) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) \approx 0,49772 + 0,3413 = 0,8185$.

Ответ. 0,8185.

Задача 3.5.11. Вероятность найти белый гриб среди прочих равна 1/4. Какова вероятность того, что среди 300 грибов будет 75 белых?

Решение. По условию задачи мы находимся в рамках схемы Бернулли, где

$n = 300$, $m = 75$, $p = \dfrac{1}{4}$, $q = \dfrac{3}{4}$. Поскольку n достаточно велико, и

$npq = 300 \cdot \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{3}{4} = 56,25 \ge 10$, мы можем использовать формулу (9.1) для

вычисления искомой вероятности. Тогда $\dfrac{1}{\sqrt{npq}} \approx 0,1333$, $x = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}} = 0$. По

таблице значений $\varphi(x)$ находим $\phi(0) \approx 0,3989$. Следовательно, $P_{500}(480) \approx 0,053$.

Ответ. 0,053.

Задача 3.5.12. Вероятность прерывания телефонного соединения равна 0,03. Какова вероятность того, что среди 200 соединений будет не более двух прерываний?

Ответ. $25 \cdot e^{-6}$.

Задача 3.5.13. При социологических опросах граждан каждый человек независимо от других может дать неискренний ответ с вероятностью 0,2. Найдите вероятность того, что из 22500 опросов число неискренних ответов будет не более 4620.

Ответ. 0,9773.

Задача 3.5.14. Найти вероятность того, что при 150 выстрелах мишень будет поражена ровно70 раз, если вероятность попадания при одном выстреле равна 0,4.

Ответ. 0,0165.

Задача 3.5.15. Игральную кость бросают 80 раз. Найти приближенно границы, в которых число выпадений шестерки будет заключено с вероятностью 0,9973.

Ответ. От 4 до 23 раз.

3.6. Случайные величины

Определение 3.6.1. Будем называть **случайной** величину, которая в результате эксперимента принимает одно возможное значение, неизвестное заранее.

Примеры случайных величин.

1. Число гербов, выпавшее при 10 бросаниях монеты.

2. Количество попаданий при 10 выстрелах.

3. Число произведенных выстрелов при стрельбе до первого попадания.

4. Длина листа, сорванного с конкретного дерева.

5. Время ожидания автобуса на остановке.

Очевидно, что для задания случайной величины просто перечислить все её значения мало, а порой и невозможно. Более того, случайные величины в примере 1 и 2 принимают одинаковые перечни возможных значений, однако вероятности у них различные.

Разнообразие случайных величин весьма велико. Число принимаемых значений может быть конечным или бесконечным, значения могут быть расположены на числовой оси дискретно или заполнять некоторые интервалы целиком. В зависимости от этого свойства случайные величины принято разделять на **дискретные** и **непрерывные**.

Интуитивно ясно, что возможные значения дискретной случайной величины есть отдельные изолированные числа, которые эта величина принимает с определенными вероятностями, а значения непрерывной случайной величины заполняют целиком некоторые интервалы.

3.7. Дискретные случайные величины

Дискретной называется случайная величина, которая может принимать конечное или счетное множество различных значений (**счетным** называется множество, все элементы которого можно поставить во взаимнооднозначное соответствие с числами натурального ряда, т.е. перенумеровать.). В примерах 1-3 параграфа 10 рассмотрены дискретные случайные величины.

Рассмотрим сначала случайные величины, которые могут принимать лишь конечное число различных значений.

Пусть возможными исходами некоторого эксперимента являются события A_1, A_2, … A_n, которые образуют полную группу попарно несовместных событий. Пусть $P(A_i) = p_i$ (т.е. вероятность появления события A_i в результате эксперимента равна p_i). Заметим, что $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$.

Введем некоторую числовую функцию ξ, которая ставит в соответствие событиям числа: $\xi(A_1) = x_1$, $\xi(A_2) = x_2$, …, $\xi(A_n) = x_n$. Таким образом, мы определили значения, которые может принимать случайная величина ξ: если наступило событие A_i, то случайная величина принимает значение x_i $(i = 1,2,...,n)$.

Этот факт может быть записан следующим образом: $P(\xi = x_i) = p_i$ (вероятность того, что случайная величина принимает значение x_i, равна p_i).

Теперь вместо того, чтобы говорить «события A_1, A_2, … A_n образуют полную группу попарно несовместных событий и происходят в результате эксперимента с вероятностями $P(A_1), P(A_2), ..., P(A_n)$», можем сказать «**задана случайная величина ξ, которая принимает значения x_1, x_2, … x_n с вероятностями** p_1, p_2, … p_n».

Набор p_1, p_2, … p_n называется **распределением вероятностей случайной величины** ξ.

Случайную величину ξ удобно задавать в виде таблицы:

ξ	x_1	x_2	…	x_n
p	p_1	p_2	…	p_n

Эта таблица называется ***законом распределения величины ξ***.

3.8. Законы распределения дискретных случайных величин

Равномерное распределение.

В общем случае, если ряд распределения случайной величины имеет вид:

ξ	x_1	…	x_m	…	x_n
p	$\frac{1}{n}$	…	$\frac{1}{n}$	…	$\frac{1}{n}$

то соответствующее ему распределение называется **равномерным дискретным**. В верхней строке стоит число очков, которое может выпасть, в нижней строке – вероятность, с которой это число очков может появиться. В данном случае все p_i равны. Такое распределение вероятностей называется **равномерным**.

Задача 3.8.1. Бросается игральная кость. Составить закон распределения случайного числа очков, выпавших при одном бросании игральной кости.

Решение. При бросании игральной кости случайная величина будет задана следующим образом:

ξ	1	2	3	4	5	6
p	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Это равномерное распределение.

Геометрическое распределение.

Пусть p и q - неотрицательные числа, и q =1- p. Распределение дискретной случайной величины называется геометрическим, если ее ряд распределения имеет вид:

ξ	1	2	…	m	…	n
p	p	qp	…	$q^{m-1}p$	…	q^{n-1}

Геометрическим называют закон распределения дискретной случайной величины, описывающей число независимых испытаний, которые проводятся до первого появления некоторого события A. Опыты прекращаются как только событие A наступило; максимальное число опытов, которое можно провести, равно n. Если событие A в каждом из испытаний наступает с вероятностью p (и не наступает с вероятностью $q=1-p$), то вероятность того, что проведено ровно m опытов, вычисляется по формуле $P(\xi=m)=p\cdot q^{m-1}$ при $m<n$, и $P(\xi=m)=q^{m-1}$ при $m=n$.

Задача 3.8.2. На экзамене преподаватель задает студенту не более пяти вопросов. Экзаменатор прекращает задавать вопросы, как только студент обнаруживает незнание заданного вопроса. Вероятность того, что студент ответит на любой из вопросов, равна 0,8. Составить закон распределения случайной величины ξ - числа вопросов, которые задаст преподаватель студенту.

Решение. Величина ξ принимает возможные значения 1, 2, 3, 4, 5. Ясно, что ξ=1, если студент не ответил на первый вопрос. Значит, $P(\xi=1)=1-0{,}8=0{,}2$. ξ

принимает значение 2, если студент ответил на первый вопрос и не ответил на второй, поэтому $P(\xi=2)=0{,}8\cdot 0{,}2=0{,}16$. Далее находим $P(\xi=3)=(0{,}8)^2\cdot 0{,}2=0{,}128$, $P(\xi=4)=(0{,}8)^3\cdot 0{,}2=0{,}1024$. Преподаватель задает пятый вопрос, если студент ответил на четыре предыдущих, следовательно, $P(\xi=5)=(0{,}8)^4=0{,}4096$. Легко проверить, что сумма всех вероятностей равна единице. Запишем результат в таблицу.

ξ	1	2	3	4	5
p	0,2	0,16	0,128	0,1024	0,4096

Этот пример знакомит нас с геометрическим распределением вероятностей.

Биномиальное распределение.

Биномиальным называют закон распределения дискретной случайной величины, описывающей число появления некоторого события *A* в n независимых испытаниях с двумя исходами. Если событие *A* в каждом из испытаний наступает с вероятностью *p*, то вероятность того, что *A* в *n* испытаниях произойдет ровно *m* раз, вычисляется по формуле $P_n(\xi=m)=C_n^m$ $p^m q^{n-m}$, где $q=1-p$.

ξ	0	1	…	m	…	n
p	q^n	$C_n^1\cdot p\cdot q^{n-1}$	…	$C_n^m p^m q^{n-m}$	…	p^n

Соответствующее такому ряду распределение дискретной случайной величины называется **биномиальным.**

Биномиальное распределение имеют, например, такие случайные величины: число гербов, выпадающее при ***n*** бросаниях монеты; число попаданий в цель при ***n*** выстрелах (если вероятность попадания при одном выстреле не меняется).

Задача 3.8.3. Пусть монета бросается 4 раза, а случайная величина ξ - это число выпавших гербов. Составить закон распределения случайной величины.

Решение. Для ξ возможными значениями являются числа 0, 1, 2, 3, 4. Вероятности, с которыми принимаются эти значения, вычисляются по формуле (6.1) главы 2: $P_n(m) = C_n^m \, p^m q^{n-m}$, где p=q=1/2, поскольку мы находимся в условиях схемы Бернулли.

Находим эти вероятности: $P_n(0) = C_4^0 (1/2)^4 = 1/16$, $P_n(1) = C_4^1 (1/2)^4 = 1/4$, $P_n(2) = 3/8$, $P_n(3) = 1/4$, $P_n(4) = 1/16$, и записываем случайную величину в виде таблицы.

ξ	0	1	2	3	4
p	1/16	1/4	3/8	1/4	1/16

Такое распределение вероятностей является биномиальным.

Распределение Пуассона.

Если число испытаний велико, а вероятность p появления события в каждом испытании очень мала, то для вычисления вероятностей в этом случае используют приближенную формулу

$$P_n(\xi = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda},$$

где $\lambda = np$ (среднее число появления события), и говорят, что случайная величина распределена ***по закону Пуассона***. (Последняя формула уже встречалась нам в теореме Пуассона.)

Ряд распределения Пуассона (синоним — ***закон Пуассона***) имеет вид:

ξ	0	1	2	…	m	…
p	$e^{-\lambda}$	$\lambda \cdot e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda}$	…	$\frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$	…

Легко убедиться, что сумма вероятностей во второй строке таблицы равна единице. Это следует из того, что сумма ряда $\sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m / m!$ равна e^{λ}.

Поскольку вероятность «успеха» в одном испытании очень мала, закон Пуассона называют также **законом редких явлений**.

Методами математической статистики установлено, что распределение Пуассона имеют такие случайные величины, как число опечаток на странице машинописного текста, поступление вызовов на АТС в единицу времени, число покупателей в магазине в определенный час и тому подобные.

Задача 3.8.4. Машинистка делает в среднем две опечатки на трех страницах текста. Случайная величина ξ - число опечаток на одной странице. Выдвинуть гипотезу о законе распределения ξ и вычислить вероятность того, что на странице не будет ни одной опечатки.

Решение. Представим себе работу машинистки над страницей как повторные независимые испытания, проводимые по схеме Бернулли: каждый печатный знак (из ***n*** штук на странице) может быть напечатан верно или нет. Предположим, что вероятность опечатки в одном знаке постоянна и равна ***p***. Она настолько мала, что произведение $\lambda = np =$ 2/3. Исходя из таких допущений, предполагаем, что случайная величина ξ имеет распределение Пуассона

ξ	0	1	2	…	m	…
p	$e^{-\frac{2}{3}}$	$-\frac{2}{3} \cdot e^{-\frac{2}{3}}$	$\dfrac{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 e^{-\frac{2}{3}}}{2!}$	…	$\dfrac{\left(-\frac{2}{3}\right)^m e^{-\frac{2}{3}}}{m!}$	…

Следовательно, искомая вероятность равна $P(0)=e^{-2/3} \approx 0{,}5145$. Таким образом, с вероятностью 0,5145 ($\approx$ 52%) на странице не будет ни одной опечатки.

Гипергеометрическое распределение.

Рассмотрим задачу о выборке данного состава. Пусть даны n предметов, из которых ровно m отмечены. Все n предметов тщательно перемешаны. Наугад без возвращения выбираются l предметов из n. Рассмотрим случай, когда $l \le m$ и $l \le n - m$. Обозначим через X число отмеченных предметов среди l выбранных. Очевидно, что X – это дискретная случайная величина, имеющая множество значений $\{0,1,...,l\}$. Ряд распределения для X имеет вид

ξ	0	…	k	…	l
p	$\dfrac{C_{n-m}^{l}}{C_n^l}$	…	$\dfrac{C_m^k C_{n-m}^{l-k}}{C_n^l}$	…	$\dfrac{C_m^l}{C_n^l}$

Распределение дискретной случайной величины, соответствующее такому ряду, называется **гипергеометрическим.** Аналогичные формулы могут быть записаны для выборок, где содержатся элементы трех и более сортов, а также для случая, когда $l > m$ или $l > n - m$. Важно, что мы «следим» только за одним из сортов.

Задача 3.8.5. В пакете перемешаны семена декоративных тыкв разных сортов: двенадцать семян грушевидной, десять семян пупырчатой и пять семян круглой. Выбираем случайным образом три семечка из этого пакета. Случайная величина ξ - число семечек пупырчатой тыквы среди выбранных. Выдвинуть гипотезу о законе распределения ξ и найти вероятность того, что выбрано ровно одно семя пупырчатой тыквы.

Решение. Если предположить, что все сочетания из 27 по 3 равновозможны, то получим гипергеометрический закон распределения.

ξ	0	1	2	3
p	$\frac{C_{10}^{0} \cdot C_{17}^{3}}{C_{27}^{3}}$	$\frac{C_{10}^{1} \cdot C_{17}^{2}}{C_{27}^{3}}$	$\frac{C_{10}^{2} \cdot C_{17}^{1}}{C_{27}^{3}}$	$\frac{C_{10}^{3} \cdot C_{17}^{0}}{C_{27}^{3}}$

Искомая вероятность равна $P_3(1) = \frac{C_{10}^{1} \cdot C_{17}^{2}}{C_{27}^{3}}$.

Задача 3.8.6 Изыскатель бурит скважины в садоводстве «Ладога» до первого обнаружения чистой питьевой воды. Вероятность получить воду при каждом бурении постоянна и равна 0.1. Случайная величина ξ - число сделанных скважин. Найти закон распределения ξ и вероятность того, что будет сделано менее 40 попыток.

Решение. Если предположить, что попытки делаются независимо друг от друга, то получаем стандартное геометрическое распределение с параметром p = 0,1.

ξ	1	2	….	39
p	0,1	0,9·0,1	….	$(0{,}9)^{\mathbf{38}} \cdot 0{,}1$

Искомая вероятность равна P({1,.. .,39}) = 0,1+ 0.9·0.1 +… $+(0{,}9)^{\mathbf{38}} \cdot 0.1$. Используя формулу суммы для геометрической прогрессии, получим, что эта вероятность равна $1 - (0.9)^{\mathbf{39}}$, что, примерно, равно 0,984.

Задача 3.8.7. Для группы, в которой 3 отличника, 12 студентов имеют хорошие и отличные оценки, а 15 студентов имеют удовлетворительные оценки написать закон распределения случайной величины ξ.

Решение. Случайная величина ξ может принимать следующие значения: 2, 3, 4, 5. Запишем закон распределения случайной величины ξ в виде таблицы:

ξ	2	3	4	5
p	0	0,5	0,4	0,1

Задача 3.8.8. В партии 10% нестандартных деталей. Наугад отобраны 4 детали. Написать закон распределения дискретной случайной величины ξ – числа нестандартных деталей среди четырех отобранных.

Решение. Вероятность появления нестандартной детали в каждом случае равна 0,1. Найдем вероятности того, что среди отобранных деталей:

1) Вообще нет нестандартных $P_4(0)=\dfrac{4!}{0!\cdot 4!}0{,}1^0\cdot 0{,}9^4=0{,}6561$;

2) Одна нестандартная $P_4(1)=\dfrac{4!}{1!\cdot 3!}0{,}1^1\cdot 0{,}9^3=0{,}2916$;

3) Две нестандартные детали $P_4(2)=\dfrac{4!}{2!\cdot 2!}0{,}1^2\cdot 0{,}9^2=0{,}0486$;

4) Три нестандартные детали $P_4(3)=\dfrac{4!}{3!\cdot 1!}0{,}1^3\cdot 0{,}9^1=0{,}0036$;

5) Четыре нестандартных детали $P_4(4)=\dfrac{4!}{4!\cdot 0!}0{,}1^4\cdot 0{,}9^0=0{,}0001$.

Запишем результаты в виде таблицы (биномиальное распределение):

ξ	0	1	2	3	4
p	0,6561	0,2916	0,0486	0,0036	0,0001

Задача 3.8.9. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Наудачу отобраны две детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных.

Решение. Запишем закон распределения случайной величины ξ в виде таблицы (гипергеометрическое распределение):

ξ	0	1	2
p	$\dfrac{C_8^0\cdot C_2^2}{C_{10}^2}=\dfrac{1}{45}$	$\dfrac{C_8^1\cdot C_2^1}{C_{10}^2}=\dfrac{16}{45}$	$\dfrac{C_8^2\cdot C_2^0}{C_{10}^2}=\dfrac{28}{45}$

Задача 3.8.10. Игральная кость брошена 3 раза. Написать закон распределения случайной величины ξ - числа появлений шестерки.

Решение: Запишем закон распределения случайной величины ξ в виде таблицы (биномиальное распределение):

ξ	0	1	2	3
p	$\frac{125}{216}$	$\frac{25}{72}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

Задача 3.8.11. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. Составить закон распределения числа отказавших элементов в одном опыте.

Решение. Запишем закон распределения случайной величины ξ в виде таблицы (биномиальное распределение):

ξ	0	1	2	3
p	$0,9^3 = 0,729$	$C_3^1 pq^2 = 3 \cdot 0,1 \cdot 0,9^2 = 0,243$	$0,027$	$0,001$

Задача 3.8.12. По цели производится 5 выстрелов. Вероятность попадания для каждого выстрела равна 0,4. Составить закон распределения числа попаданий.

Решение. По формуле Бернулли: $P_{5,5} = 0{,}01024$, $P_{4,5} = 0{,}0768$, $P_{3,5} = 0{,}2304$,

$P_{2,5} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^3 = 0{,}3456$, $P_{1,5} = \frac{5!}{1! \cdot 4!} 0{,}4^1 \cdot 0{,}6^4 = 0{,}2592$, $P_{0,5} = \frac{5!}{0! \cdot 5!} 0{,}4^0 \cdot 0{,}6^5 = 0{,}0778$.

Запишем результаты в виде таблицы (биномиальное распределение):

ξ	0	1	2	3	4	5
p	0,0778	0,2592	0,3456	0,2304	0,0768	0,01024

3.9. Числовые характеристики дискретных случайных величин

При изучении одномерной случайной величины возникает проблема предсказания среднего значения M, которое она может принимать при n

измерениях. Кроме того, для случайных величин, имеющих большое количество возможных значений, актуальна проблема выделения «наиболее вероятной» части из всего множества значений. Последняя проблема может быть более четко сформулирована следующим образом: определить окрестность *M*, в которую значения случайной величины попадут с определенной вероятностью (например, 0,99). Для ответа на поставленные вопросы используются так называемые числовые характеристики случайных величин: математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение. Здесь мы рассмотрим их определения для случайных величин дискретного типа.

Математического ожидание.

Пусть дискретная случайная величина ξ имеет известный закон распределения:

ξ	x_1	x_2	$\dots$	x_n
p	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Определение 3.9.1. Математическое ожидание случайной величины ξ обозначается $M(\xi)$. Оно характеризует среднее значение этой величины (ожидаемое значение). Если ξ принимает конечное число значений, то $M(\xi)$ вычисляется по формуле

$$M(\xi) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + ... + x_n \cdot p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \,. \qquad (3.9.1)$$

Если множество значений ξ конечно, то математическое ожидание $M(\xi)$ представляет собой сумму нескольких чисел, следовательно, всегда существует. Если же множество значений ξ счетно, то $M(\xi)$ представляет собой сумму числового ряда (бесконечно много слагаемых). Такая сумма может быть не определена (ряд расходится). В таком случае говорят, что математическое ожидание не существует.

Свойства математического ожидания.

1. *Математическое ожидание постоянной величины равно этой величине.*

Если случайная величина ξ может принимать только одно значение a с вероятностью 1, то $M(\xi)=a\cdot 1=a$.

2. *Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий этих величин.*

Пусть $\xi=x+y$. Тогда $M(\xi)=M\left(x+y\right)=M(x)+M(y)$.

3. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий этих величин.

Случайные величины x и y принято называть *независимыми*, если они являются численными характеристиками независимых случайных событий. Если величины x и y независимы, то в обозначениях, введенных выше, случайная величина $\xi=x\cdot y$.

$M(\xi)=M\left(x\cdot y\right)=M(x)\cdot M(y)$.

4. Постоянный множитель случайной величины можно вынести за знак математического ожидания.

Заметим, что это свойство является прямым следствием свойств 1 и 3, т.к. $M(ax)=M(a)\cdot M(x)=aM(x)$.

Приведем далее без доказательства **формулы для вычисления математического ожидания случайных величин**, имеющих стандартные дискретные распределения:

1. Геометрический закон: $M(\xi)=\dfrac{1}{p}$,
2. Биномиальный закон: $M(\xi)=n\cdot p$,
3. Закон Пуассона: $M(\xi)=\lambda$,
4. Гипергеометрический закон: $M(\xi)=\dfrac{l\cdot m}{n}$.

В случае, когда закон распределения не является стандартным, можно найти математическое ожидание по определению.

Дисперсия дискретной случайной величины.

Пусть дискретная случайная величина ξ имеет известный закон распределения:

ξ	x_1	x_2	$\dots$	x_n
p	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Пусть существует математическое ожидание $M(\xi)$. Дисперсия $D(\xi)$ случайной величины ξ характеризует отклонение случайной величины ξ от математического ожидания, т.е. характеризует разброс случайной величины относительно ее среднего значения. Дисперсию можно было бы измерить с помощью суммы величин $\left(x_i - M(\xi)\right)\cdot p_i$, но такая мера неудобна, поскольку отклонения могут принимать как положительные, так и отрицательные значения, которые при суммировании сокращаются.

Определение 3.9.2. Дисперсия – математическое ожидание случайной величины $\left(\xi - M\left(\xi\right)\right)^2$.

$$D(\xi) = (x_1 - M(\xi))^2\cdot p_1 + (x_2 - M(\xi))^2\cdot p_2 + \dots + (x_n - M(\xi))^2\cdot p_n,$$

$$D(\xi) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - M(\xi))^2 p_i = M(\left(\xi - M\left(\xi\right)\right)^2). \qquad (3.9.2)$$

Пользуясь свойствами математического ожидания, преобразуем формулу для вычисления дисперсии:

$$D(\xi) = M(\left(\xi - M\left(\xi\right)\right)^2) = M(\xi^2 - 2\xi M(\xi) + M^2(\xi)) =$$

$$= M(\xi^2) - 2M(\xi)M(\xi) + M^2(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi).$$

Следовательно, дисперсия может быть найдена так же по формуле:

$$D(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i p_i\right)^2. \qquad (3.9.3)$$

Формулой (3.9.3) удобно пользоваться при вычислении дисперсии на практике. Из этой формулы и свойств математического ожидания вытекают следующие свойства дисперсии.

Свойства дисперсии.

1. Дисперсия постоянной величины равна нулю.

Действительно, $D(a) = M(a^2) - M^2(a) = a^2 - a^2 = 0$.

2. Постоянный множитель случайной величины выносится за знак дисперсии с квадратом.

$D(ax) = M(a^2x^2) - M^2(ax) = a^2(M(x^2) - M^2(x)) = a^2D(x)$.

3. *Дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме их дисперсий.*

Если величины x и y независимы, то $M(xy) = M(x) \cdot M(y)$, следовательно,

$$D(x+y) = M((x+y)^2) - M^2(x+y) = M\left(x^2 + 2xy + y^2\right) - (M(x) + M(y))^2 =$$

$$M(x^2) + 2M(xy) + M(y^2) - (M^2(x) + 2M(x)M(y) + M^2(y)) =$$

$$= M(x^2) - M^2(x) + M(y^2) - M^2(y) = D(x) + D(y).$$

Приведем без доказательства **формулы для вычисления дисперсии случайных величин**, имеющих стандартные дискретные распределения:

1. Геометрический закон: $D(\xi) = \dfrac{1-p}{p^2}$,
2. Биномиальный закон: $D(\xi) = n \cdot p \cdot (1-p)$,
3. Закон Пуассона: $D(\xi) = \lambda$
4. Гипергеометрическии закон: $D(\xi) = l \cdot (n-l) \cdot \dfrac{m \cdot (n-m)}{n^2 \cdot (n-1)}$.

Как нетрудно заметить, дисперсия измеряется не в таких единицах, как математическое ожидание: единицы измерения возводятся в квадрат. Это не всегда удобно. Для единообразия единиц измерения из дисперсии извлекают квадратный корень.

Среднее квадратическое отклонение.

Определение 3.9.3. Квадратный корень из дисперсии, то есть величина

$$\sigma = \sqrt{D(\xi)} \tag{3.9.4}$$

называется **средним квадратическим отклонением** случайной величины ξ.

Рассмотрим теперь проблему определения минимального интервала вида ($M(\xi)$— r, $M(\xi)$+ r), в который значения ξ попадают с заданной вероятностью ***p.*** Если закон распределения дискретной случайной величины известен, то такой интервал можно определить, добавляя одно за другим значения ξ слева и справа от $M(\xi)$ в множество $\{M(\xi)\}$. При этом вероятности добавленных значений надо складывать, пока не получим число ***p*** или число больше него. Для большинства случайных величин решение такой задачи требует больших вычислений. Существует простой, но приближенный метод получения интервала вида ($M(\xi)-r$, $M(\xi)+r$), в который значения ξ попадают с вероятностью заведомо большей, чем ***p*** . Этот метод не требует знания закона распределения, а только знание $M(\xi)$, $D(\xi)$ и ***p.***

Теорема 3.9.1 (неравенство Чебышева). Пусть случайная величина ξ имеет математическое ожидание $M(\xi)$ и дисперсию $D(\xi)$. Тогда для любого положительного числа r имеет место неравенство:

$$P_\xi((M(\xi)-r, M(\xi)+r)) \geq 1-\frac{D(\xi)}{r^2}$$

Это неравенство означает, что значения случайной величины ξ попадают в интервал с центром в точке $M(\xi)$ и любым заданным радиусом r с вероятностью, которая больше или равна $1-\frac{D(\xi)}{r^2}$.

Доказательство теоремы опускаем. Заметим, что она верна не только для дискретных, но и для абсолютно непрерывных случайных величин.

Для приближенного определения радиуса окрестности математического ожидания, в которую значения случайной величины попадают с вероятностью больше, чем ***p***, надо правую часть неравенства Чебышева приравнять числу ***p***.

Следствие 3.9.1. Если в неравенстве Чебышева вместо r подставить $3\sigma_x$, то соответствующая вероятность будет не меньше, чем 8/9. Этот факт называют **«правилом трех сигм»**.

Задача 3.9.1. Допустим, нам необходимо позвонить в некоторое учреждение. Мы будем набирать номер раз за разом, пока не дозвонимся. Вероятность того, что мы дозвонимся в каждом определенном случае, равна 1/3. Составим закон распределения дискретной случайной величины, описывающей число наших звонков, вычислим математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Решение. Пусть событие A_1 состоит в том, что мы дозвонились с первого раза, событие A_2 - в том, что мы дозвонились со второго раза, и так далее. Очевидно, $P(A_1)=1/3$, $P(A_2)=P(\overline{A_1}\cdot A_2)=(1-1/3)\cdot 1/3=(2/3)\cdot(1/3)$,

$P(A_3)=P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot A_3)=(1-1/3)^2\cdot 1/3=(2/3)^2\cdot(1/3)$, и т.д.

$P(A_n)=P(\overline{A_1}\cdot\ldots\cdot\overline{A_{n-1}}\cdot A_n)=(1-1/3)^{n-1}\cdot 1/3=(2/3)^{n-1}\cdot(1/3)$.

Таблица, описывающая данную случайную величину, будет бесконечной.

ξ	1	2	3	4	…
p	1/3	2/3·1/3	$(2/3)^2\cdot 1/3$	$(2/3)^3\cdot 1/3$	...

Используя формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии $a\sum_{i=1}^{\infty}q^i=\frac{a}{1-q}$, проверим, что и в этом примере сумма вероятностей равна единице. В нашем примере $a=1/3$, $q=2/3$, следовательно,

$$p_1+p_2+p_3+\ldots=1/3\cdot(1+2/3+(2/3)^2+(2/3)^3+\ldots)=\frac{1/3}{1-2/3}=1.$$

Математическое ожидание $M(\xi)=3$. Результат довольно предсказуемый – вероятность того, что мы дозвонимся в каждом определенном случае, равна 1/3, следовательно, вероятнее всего, нам придется сделать 3 попытки. Найдем дисперсию и среднее квадратическое отклонение: $D(\xi)=6$. Среднее квадратическое отклонение $\sigma=\sqrt{D(\xi)}=\sqrt{6}\approx 2{,}4495$, т.е. при проведении конкретных испытаний число звонков в среднем будет отклоняться от ожидаемого примерно на 2,45, т.е. вероятнее всего, прежде чем дозвонимся, мы сделаем от 1 до 6 попыток.

Задача 3.9.2. Две игральные кости одновременно бросают 2 раза. Написать закон распределения дискретной случайной величины ξ – числа выпадений четного числа очков на двух игральных костях. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины.

Решение. Каждая игральная кость имеет три варианта четных очков – 2, 4 и 6 из шести возможных, таким образом, вероятность выпадения четного числа очков на одной кости равна 0,5. Вероятность одновременного выпадения четных очков на двух костях равна 0,25.

Вероятность того, что при двух испытаниях оба раза выпали четные очки на обеих костях, равна: $P_2(2)=\dfrac{2!}{0!\cdot 2!}0{,}25^2\cdot 0{,}75^0=0{,}0625$.

Вероятность того, что при двух испытаниях один раз выпали четные очки на обеих костях: $P_2(1)=\dfrac{2!}{1!\cdot 1!}0{,}25^1\cdot 0{,}75^1=0{,}375$.

Вероятность того, что при двух испытаниях ни одного раза не выпадет четного числа очков на обеих костях: $P_2(0)=\dfrac{2!}{0!\cdot 2!}0{,}25^0\cdot 0{,}75^2=0{,}5625$.

Закон распределения случайной величины имеет вид:

ξ	0	1	2
p	0,5625	0,375	0,0625

Математическое ожидание случайной величины равно: $M(\xi)=0\cdot 0,5625+1\cdot 0,375+2\cdot 0,0625=0,5$.

Дисперсия равна: $D(\xi)=0,25\cdot 0,5625+0,25\cdot 0,375+2,25\cdot 0,0625=0,375$.

Однако, на практике подобный способ вычисления дисперсии неудобен, т.к. приводит при большом количестве значений случайной величины к громоздким вычислениям. Поэтому применяется другой способ.

ξ^2	0	1	4
ξ	0	1	2
p	0,5625	0,375	0,0625

Добавим в таблицу строчку с ξ^2. Вычислим математическое ожидание от ξ^2: $M(\xi^2)=0\cdot 0,5625+1\cdot 0,375+4\cdot 0,0625=0,625$, теперь воспользуемся формулами 3.9.3, 3.9.4 и вычислим дисперсию и среднее квадратическое отклонение: $D(\xi)=0,625-\left[0,5\right]^2=0,375$, $\sigma(\xi)=\sqrt{0,375}\approx 0,6$. Следовательно, мы можем ожидать, что число выпадений четного числа очков на двух игральных костях при двух бросках равно 1,5. При подбрасывании число выпадений четного числа очков на двух игральных костях в среднем будет отклоняться от ожидаемого на 0,6, т.е. вероятнее всего увидеть четное число очков на двух игральных костях при двух бросках 1 или 2 раза.

Задача 3.9.3. Охотник дважды стреляет по цели. Вероятность попадания стрелка при одном выстреле равна 0,8. Составить таблицу распределения числа попаданий, вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Решение. Дважды выстрелив по цели, охотник может попасть 0 или 1 или 2 раза. Обозначим события: А – «охотник попал при первом выстреле», В – «охотник попал при втором выстреле». Очевидно, что события *A* и *B* совместны и независимы, поэтому $P(AB)=P(A)\cdot P(B)=0,8\cdot 0,8=0,64$, т.е. два раза охотник попадет с вероятностью 0,64. Аналогично, охотник не попадет ни разу с вероятностью $P(\overline{A}\cdot\overline{B})=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})=0{,}2\cdot 0{,}2=0{,}04$. Отсюда следует, что один раз он попадет с вероятностью 1 – 0,64 – 0,04 = 0,32. Запишем результаты в виде таблицы:

ξ^2	0	1	4
ξ	0	1	2
p	0,04	0,32	0,64

Вычислим математическое ожидание случайной величины: $M(\xi)$ $=x_1\cdot p_1+x_2\cdot p_2+x_3\cdot p_3=0\cdot 0{,}04+1\cdot 0{,}32+2\cdot 0{,}64=1{,}6$. Следовательно, в среднем охотник, делая два выстрела, попадает 1,6 раза (или из 20 выстрелов в среднем попадает 16). Найдем дисперсию и среднее квадратическое отклонение: $D(\xi)=M(\xi^2)-(M(\xi))^2=0^2\cdot 0{,}04+1^2\cdot 0{,}32+2^2\cdot 0{,}64-(1{,}6)^2=0{,}32$;

$\sigma=\sqrt{D(\xi)}\approx 0{,}5657$. Последний результат может быть интерпретирован следующим образом: при проведении конкретных испытаний число попаданий в среднем будет отклоняться от ожидаемого на 0,56, т.е. охотник, делая два выстрела, попадает вероятнее всего 1 или 2 раза.

Мы могли ранее заметить, что имеем дело с биномиальным законом распределения случайной величины. Тогда проще было воспользоваться имеющимися формулами для вычисления математического ожидания и дисперсии: $M(\xi)=n\cdot p=2\cdot 0{,}8=1{,}6$; $D(\xi)=n\cdot p\cdot\left(1-p\right)=2\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2=0{,}32$.

Задача 3.9.4. Испытывается устройство, состоящее из четырех независимо работающих приборов. Вероятности отказа каждого из приборов равны соответственно $p_1=0{,}3$; $p_2=0{,}4$; $p_3=0{,}5$; $p_4=0{,}6$. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение числа отказавших приборов.

Решение. Принимая за случайную величину число отказавших приборов, видим, что эта случайная величина может принимать значения 0, 1, 2, 3 или

4. Для составления закона распределения этой случайной величины необходимо определить соответствующие вероятности. Примем $q_i = 1 - p_i$.

Не отказал ни один прибор: $P(0) = q_1q_2q_3q_4 = 0,7 \cdot 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,4 = 0,084.$

Отказал один из приборов:

$P(1) = p_1q_2q_3q_4 + q_1p_2q_3q_4 + q_1q_2p_3q_4 + q_1q_2q_3p_4 = 0,302.$

Отказали два прибора:

$P(2) = p_1p_2q_3q_4 + p_1q_2p_3q_4 + p_1q_2q_3p_4 + q_1p_2p_3q_4 + q_1p_2q_3p_4 + q_1q_2p_3p_4 = 0,38.$

Отказали три прибора: $P(3) = p_1p_2p_3q_4 + p_1p_2q_3p_4 + p_1q_2p_3p_4 + q_1p_2p_3p_4 = 0,198.$

Отказали все приборы: $P(4) = p_1p_2p_3p_4 = 0,036.$

Получаем закон распределения:

ξ^2	0	1	4	9	16
ξ	0	1	2	3	4
p	0,084	0,302	0,38	0,198	0,036

Математическое ожидание:

$$M(X) = 0,302 + 2 \cdot 0,38 + 3 \cdot 0,198 + 4 \cdot 0,036 = 1,8.$$

$$M(X^2) = 0,302 + 4 \cdot 0,38 + 9 \cdot 0,198 + 16 \cdot 0,036 = 4,18.$$

Дисперсия: $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 4,18 - 3,24 = 0,94.$

Среднее квадратическое отклонение: $\sigma = \sqrt{D(\xi)} \approx 0,97$.

Задача 3.9.5. Дискретная случайная величина ξ может принимать только два значения x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Математическое ожидание $M(\xi)$=3,7 и дисперсия $D(\xi)$=0,21, p_1=0,3. Найти закон распределения случайной величины.

Решение. Т.к. по условию случайная величина может принимать только два значения, то $p_2 = 1 - p_1 = 0,7$.

Представим закон распределения в виде таблицы:

ξ	x_1	x_2
p	0,3	0,7

Так как математическое ожидание: $M(\xi)=x_1\cdot p_1+x_2\cdot p_2$, а дисперсия $D(\xi)=M(\xi^2)-\left[M(\xi)\right]^2=x_1^2p_1+x_2^2p_2-\left[M(\xi)\right]^2$, то получаем систему:

$$\begin{cases}0,3\cdot x_1+0,7\cdot x_2=3,7\\ 0,3\cdot x_1^2+0,7\cdot x_2^2=13,9.\end{cases}$$

Из первого уравнения выразим x_1 и подставим во второе уравнение, получим: $0,3\cdot\dfrac{\left(3,7-0,7x_2\right)^2}{0,3^2}+0,7\cdot x_2^2=13,9$. Преобразуем полученное выражение: $13,69-5,18x_2+0,49\cdot x_2^2+0,21\cdot x_2^2=4,17$.

Решим квадратный трехчлен: $0,7\cdot x_2^2-5,18x_2+9,52=0$,

$$D=26,8324-26,656=0,1764=0,42^2$$

1. $x_2=\dfrac{5,18+0,42}{1,4}=4$;

2. $x_2=\dfrac{5,18-0,42}{1,4}=3,4$.

Подставим $x_2=4$ в первое уравнение системы и найдем $x_1=3$.

Подставим $x_2=3,4$ в первое уравнение системы и найдем $x_1=4,4$. Нам это решение не подходит, не выполняется условие $x_1<x_2$.

Т.к. по условию $x_1<x_2$, получаем закон распределения дискретной случайной величины:

ξ	3	4
p	0,3	0,7

Задача 3.9.6. Завод выпускает 96% изделий первого сорта и 4% изделий второго сорта. Наугад выбирают 1000 изделий. Пусть ξ – число изделий первого сорта в данной выборке. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ.

Решение. Выбор каждого из 1000 изделий можно считать независимым испытанием, в котором вероятность появления изделия первого сорта одинакова и равна p=0,96. Таким образом, закон распределения может считаться биномиальным и математическое ожидание и дисперсию можно вычислить по формулам:

$M(\xi) = p \cdot n = 1000 \cdot 0{,}96 = 960;$ $D(\xi) = n \cdot p \cdot q = 1000 \cdot 0{,}96 \cdot 0{,}04 = 38{,}4$.

Задача 3.9.7. Найти дисперсию дискретной случайной величины ξ – числа появлений события А в двух независимых испытаниях, если вероятности появления этого события в каждом испытании равны и известно, что $M(\xi)$ = 0,9.

Решение. Т.к. случайная величина ξ распределена по биномиальному закону, то $M(\xi) = n \cdot p = 2p = 0{,}9; \quad \Rightarrow \quad p = 0{,}45;$

$D(\xi) = n \cdot p \cdot q = 2p(1-p) = 2 \cdot 0{,}45 \cdot 0{,}55 = 0{,}495.$

Задача 3.9.8. Производятся независимые испытания с одинаковой вероятностью появления события А в каждом испытании. Найти вероятность появления события А, если дисперсия числа появлений события в трех независимых испытаниях равна 0,63.

Решение. По формуле дисперсии биноминального закона получаем: $D(\xi) = n \cdot p \cdot q = 3p(1-p) = 0{,}63$. Преобразуем выражение:

$$3p^2 - 3p + 0{,}63 = 0$$

$$p^2 - p + 0{,}21 = 0;$$

$$p_1 = 0{,}7; \quad p_2 = 0{,}3.$$

3.10. Применение теории вероятностей при выборе поставщика при техническом перевооружении предприятия

Четвертая промышленная революция Индустрии 4.0 подводит сегодня промышленность к реформированию устоявшихся технологических и производственных цепочек: производство ждет создания абсолютно нового типа производства, которое будет основываться на использовании цифровых технологий в проектировании, «больших данных», аддитивных технологиях, полной автоматизации производственного процесса, технологиях дополненной реальности, промышленном интернете вещей и пр. Согласно Стратегии научно-технологического развития Российской Федерации, утверждённой в декабре 2016 г. за N 642, приоритетами научно-технологического развития Российской Федерации следует считать те направления, которые позволят получить научные и научно-технические результаты и создать технологии, являющиеся основой инновационного развития внутреннего рынка продуктов и услуг, устойчивого положения России на внешнем рынке.

Производителям, в целях импортозамещения, повышения конкурентоспособности, необходимо производить качественную продукцию по конкурентным ценам. Однако, в результате низкой инвестиционной активности предпринимательских структур в стране продолжительное время недофинансировались процессы воспроизводства и обновления основных фондов во многих отраслях и секторах экономики, что обусловило их резкое старение. Так, основные фонды промышленности имеют уровень износа более 50 %, а износ производственного аппарата предприятий в некоторых отраслях достигает 90 %, темп выбытия варьируется в пределах 2-3%, темпы обновления не превышают 1%. Только 10 – 15 % основных фондов в промышленности соответствуют мировому уровню [2,3].

Учитывая уровень износа и устаревания основных производственных фондов, предприятиям требуется проводить техническое перевооружение. Однако, процесс технического перевооружения достаточно проблематичен, ввиду нехватки свободных средств или доступных площадей, невозможности остановить производство на время проведения данных работ, отсутствия подготовленных кадров, способных адекватно оценить и выбрать поставщиков оборудования, отсутствие компетентных кадров, для освоения новых техник и технологий [4] и пр.

Одной из основных проблем при проведении технического перевооружения является выбор поставщика оборудования на основе определенных критериев. В ходе такого выбора, как правило, предприятия сталкиваются с внутренними расхождениями мнений основных руководителей, относительно целесообразности выбора того или иного поставщика.

Решением данной проблемы может стать создание полноценной математической модели выбора поставщика оборудования, позволяющей использовать при экспертной оценке поставщиков различные критерии, учитывать их важность, и в результате выдавать полноценную и всеобъемлющую оценку поставщика, учитывая все мнения руководства предприятия. Основываясь на этом, в данной работе представлена экономико-математическая модель, использование которой позволит максимально упростить выбор поставщика оборудования, и сократит время на принятие решения о закупке.

Техническое перевооружение промышленных предприятий (ТППП) – комплекс мероприятий, направленных на повышение технико-экономического уровня деятельности предприятий, отдельных производств, цехов и участков за счет внедрения современной техники и прогрессивной технологии, механизации и автоматизации производственных процессов, модернизации и замены морально устаревшего и физически изношенного оборудования, улучшения организации и структуры производства, а также других организационных мероприятий без расширения производственных площадей и увеличения количества рабочих мест [5,6,7].

Одной из важных частей технического перевооружения является именно выбор поставщиков оборудования. В литературе, как правило, проблема выбора поставщика, как сырья, так и оборудования, описывается с помощью экономико-математических моделей и различных методов выбора поставщика, на основе определенных факторов и оценок. Краткий обзор моделей и методов приведен в таблице 3.10.1.

Таблица 3.10.1

Обзор литературных источников.

Автор [Источник]	Основная характеристика модели.
Беркович М.И., Пуцилло А.Д.[8]	Факторная модель обоснования выбора поставщика при формировании логистики поставок сырья, с использованием экспертного метода (балльная оценка) и расчетов финансовых параметров поставщиков.
Будяков А.Н., Гетманов К.Г., Матвеев М.Г.[9]	Математическая модель выбора ресурсов и поставщиков, обеспечивающая одновременное удовлетворение техническим и коммерческим требованиям. Устанавливает рациональное соответствие между ресурсами, поставщиками и заказчиками.
Иванова М.И. [10]	Факторная модель обоснования выбора поставщика при формировании логистики поставок сырья, с использованием экспертного метода (балльная оценка) и расчетов финансовых параметров поставщиков.
Куимова Е.И., Логанина В.И., Учаева Т.В. [11]	Метод выбора поставщика сырья, основанный на применении теории нечетких множеств, с использованием определенных критериев и метода экспертной оценки поставщиков по каждому критерию, с учетом весов критериев.
Лещинский Б.С., Конкина Ю.А. [12]	Метод выбора поставщика, основанный на применении теории нечетких множеств, с использованием критериев оценки и метода экспертной оценки, с учетом важности критериев.
Козин М.Н. [13]	Рассматриваются эффективные методы выбора альтернативного поставщика в условиях риска: «вероятностная мера Байеса-Лапласа», «принцип максимума энтропии функции полезности», «принципа минимума дисперсии функции полезности», «модальный принцип».

На основании таблицы 3.10.1 можно сделать вывод, что на текущий момент, существует множество различных моделей выбора поставщиков, основанных на различных математических методах выбора и обоснования. Однако, часть моделей (работы авторов Беркович М.И., Будяков А.Н., Иванова М.И.) не берут во внимание различия в уровне важности критериев оценки поставщиков, остальные модели имеют достаточно сложный математический аппарат, который может не быть понятен рядовому пользователю на интуитивном уровне, чем осложнит гибкость и применяемость модели. Отдельно стоит отметить работу автора Козин М.Н. – в ней на основе достаточно сложного математического аппарата рассматривается выбор поставщиков относительно факторов риска, а не на основе определенных групп критериев. Основываясь на проведенном анализе, в данной работе будет представлена модель выбора поставщика, которая, основываясь математическом аппарате, будет интуитивно понятна и легко применима при проведении технологического перевооружения предприятия. Как известно, выбор поставщиков осуществляется на основе определенных критериев [14,15,16,17]:

- финансовая устойчивость поставщика;
- порядок оплаты предоставляемых услуг;
- ценовые предложения и наличие скидок;
- наличие в регионе сервисных центров;
- предоставляемые инжиниринговые услуги;
- послегарантийное обслуживание;
- возможность обучения операторов для работы на поставляемом оборудовании;
- сроки поставки и монтажа оборудования;
- квалификация представителей поставщика;
- лидерство поставщика в области технологий;
- возможности предоставления лизинговых услуг и др.

В зависимости от условий выбора поставщиков предприятием, количество и состав критериев может меняться. Далее, как правило, происходит анализ рассматриваемых поставщиков и их оценка на основе выбранных критериев с помощью различных методов оценки. Одним из таких методов может являться метод экспертной оценки [18,19,20], при котором в качестве экспертов могут выступать ключевые работники управленческого звена предприятия – главный инженер, начальник производства и проч. Предлагаемая модель основывается именно на методе экспертных оценок, с определенными дополнениями. В общем виде экономико-математическая модель выглядит следующим образом:

$$
\begin{cases}
f(x) = \dfrac{\sum_{m=1}^{e}\sum_{i=1}^{n}\alpha_{im} * x_{mti}}{e} \to \max \\
x_{mti} \le b \\
\sum_{i=1}^{n}\alpha_{im} * x_{mti} \le b \\
x_{mti} \ge c \\
\sum_{i=1}^{n}\alpha_{im} * x_{mti} \ge c \\
\sum_{i=1}^{n}\alpha_{im} = 1 \\
\alpha_{im} > 0; x_{mti} > 0; e \in N; n \in N; p \in N; b > c; b > 0; c > 0; \\
m = 1...e; i = 1...n; t = 1...p
\end{cases}
\qquad (3.10.1)
$$

где: e - количество экспертов, участвующих в оценке, ед.; n - количество необходимых для оценки поставщика критериев, шт.; p – количество оцениваемых поставщиков, шт.; α_{im} – вес i-го критерия, по мнению m-го эксперта, ед.; x_{mti} – оценка m-м экспертом t-го поставщика по i-му критерию, баллов; b – максимально возможная оценка поставщика экспертом, баллов; c – минимально возможная оценка поставщика экспертом, баллов.

Целевая функция *f(x)* показывает множество среднеарифметических оценок поставщиков всеми экспертами с учетом весов критериев для каждого эксперта. При поиске максимума функции *f(x)*, находится наибольшая средняя арифметическая оценка определенного поставщика t всеми экспертами. Данная оценка определяет, какой именно поставщик получил наибольшую оценку. Оценка и определение наиболее подходящего поставщика проходит в несколько этапов. Основные этапы представлены на рисунке 3.10.1.

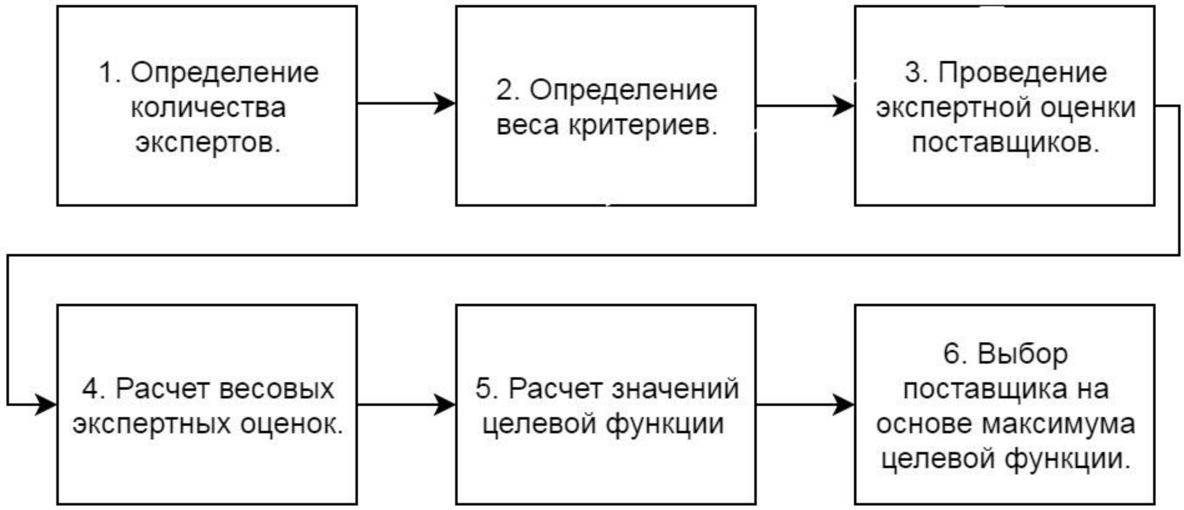


Рисунок 3.10.1 – этапы выбора поставщика.

Первоначально определяется количество экспертов – e, и количество необходимых для оценки поставщика критериев – n. Далее необходимо определить вес каждого критерия для каждого поставщика с помощью метода парного сравнения критериев на основе фиксированного предпочтения [21]. Данный метод достаточно прост в использовании и понятен для пользователя любого уровня. Это позволит каждому эксперту самостоятельно определить, какие критерии, по мнению эксперта, более важные, а какие – менее важные. В соответствие с методом, строится матрица оценки веса критериев, представленная в таблице 3.10.2.

Таблица 3.10.2

Матрица определения веса критериев

		Критерий j		Суммарный уровень важности критерия k_i	Вес критерия (α_i)
…	1	k_{ji}	…	…	…
Критерий i	k_{ij}	1	…	k_i	α_i
…	…	…	1	…	…
				k_c	1

Где k_{ij} - коэффициент, показывающий предпочтение критерия i по отношению к критерию j, i= 1…n, j = 1 … n, n – число критериев. При применении метода парного сравнения критериев все диагональные элементы матрицы (см. таблицу 3.13.2) парного сравнения критериев должны быть равны единице, а остальным элементам присваиваются значения k_{ij} следующим образом [21]:

$$k_{ij}=\begin{cases}1{,}5\ \textit{если критерий } i \textit{ более важен чем критерий } j\\ 0{,}5\ \textit{если критерий } i \textit{ менее важен чем критерий } j\\ 1\ \textit{если критерий } i \textit{ и } j \textit{ имеют одинаковую важность}\end{cases}$$

При этом обязательно должно выполняться условие $k_{ij}+k_{ji}=2$, при $i \neq j$. Далее рассчитывается группа показателей:

$$k_i=\sum_{j=1}^{n}k_{ij} \qquad (3.10.2)$$

где k_i - суммарный уровень важности каждого критерия, i= 1…n, j = 1 … n.

$$k_c=\sum_{i=1}^{n}k_i \qquad (3.10.3)$$

где k_c - суммарный уровень важности всех критериев, i= 1…n.

$$\alpha_i=\frac{k_i}{k_c} \qquad (3.10.4)$$

где α_i - вес критерия i, i= 1…n, $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$

Данная матрица строится для каждого эксперта m, с целью определить важности критериев выбора поставщика для каждого отдельного эксперта, m=1..e, где e – количество экспертов. Второй этап - экспертная оценка поставщиков. Для оценки строится матрица экспертной оценки поставщиков.

Таблица 3.10.3

Матрица экспертной оценки поставщиков

	Поставщик t
…	…
Критерий i	x_{mti}
…	…

Соответственно, x_{mti} – оценка m-м экспертом t-го поставщика по i-му критерию, i= 1…n, t = 1… p, m=1…e. В качестве оценок эксперта по каждому критерию можно использовать различные балльные оценки, по различной шкале, от 1 до 3, от 1 до 5 и далее. В качестве примера, рассмотрим простую пятибалльную шкалу оценки:

- Поставщик полностью удовлетворяет требованиям компании по данному критерию – 5 баллов;
- Поставщик по большей части (не менее 75%) удовлетворяет требованиям компании по данному критерию – 4 балла;
- Поставщик частично (не менее 50%) удовлетворяет требованиям компании по данному критерию – 3 балла;
- Поставщик крайне мало (менее 50%) удовлетворяет требованиям компании по данному критерию – 2 балла;
- Поставщик не удовлетворяет требованиям компании по данному критерию – 1 балл.

Как видно из примера выше, пятибалльная шкала позволяет достаточно четко и подробно оценить поставщика, при этом формат оценивания по такой шкале будет интуитивно понятен любому возможному пользователю данной модели. Однако, модель можно легко перестроить для использования иных балльных шкал для экспертной оценки, если в этом есть определенная необходимость. На третьем этапе, на основании матрицы экспертной оценки и матрицы определения весов критериев, составляется матрица весовых оценок рассматриваемых поставщиков по рассматриваемым критериям. Такая матрица строится для каждого эксперта m отдельно.

Таблица 3.10.4

Матрица весовых оценок

	Поставщик *t*
…	
Критерий *i*	$\alpha_{i*} x_{mti}$
…	
Суммарная оценка	$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{im} * x_{mti}$

Как видно из матрицы, полученные веса критериев перемножаются с оценками эксперта m по данному критерию *i* по поставщику *t*, *i*= 1…*n*. *t* = 1…*p*, *m*=1...*e*. Итогом расчетов становится суммарная оценка каждого поставщика каждым экспертом:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{im} * x_{mti} \tag{3.10.5}$$

где α_{im} - вес критерия *i* по мнению эксперта m, x_{mti} - оценка эксперта m по критерию *i* по поставщику *t*.

На четвертом этапе, рассчитываются значения функции на основе полученных экспертных оценок, и сводятся в единую матрицу среднеарифметических экспертных оценок поставщиков *t*.

Таблица 3.10.5

Итоговая матрица оценок

	Оценка
…	…
Поставщик *t*	$f(x_{mti})$
…	…

На конечном этапе, определяется максимум функции, аналитическим или графическим методом. Таким образом, экономико-математическая модель определяет наибольшее среднее значение оценки из всех имеющихся средних арифметических оценок поставщиков, от всех экспертов, с учетом веса каждого критерия. Такая экономико-математическая модель позволяет, не привлекая внешние ресурсы, учесть мнения экспертов – руководящих работников собственного предприятия, и получить ответ на вопрос – кто из рассматриваемых поставщиков оборудования в данном случае наиболее подходит данному предприятию.

Далее будет представлен пример работы математической модели на примере организации ОАО «ЛЕНПОЛИГРАФМАШ». В качестве основных экспертов при выборе оборудования выступают:

- главный инженер ОАО «ЛЕНПОЛИГРАФМАШ», кандидат экономических наук – эксперт №1;
- заместитель генерального директора по экономике и финансам ОАО «ЛЕНПОЛИГРАФМАШ», кандидат экономических наук – эксперт №2;
- генеральный директор ОАО «ЛЕНПОЛИГРАФМАШ», кандидат технических наук – эксперт №3

Таким образом, количество экспертов *e* = 3. В соответствие с разработанной методикой, следующим этапом выбираются критерии, на основании которых будет производиться отбор поставщика оборудования. В соответствие с имеющимся на предприятии опытом отбора поставщиков, были выбраны следующие восемь (*n*=8) критериев:

- финансовая устойчивость поставщика;
- ценовые предложения и наличие скидок;
- порядок оплаты предоставляемых услуг;
- наличие сервиса в регионе;
- возможность обучения операторов для работы на поставляемом оборудовании;
- сроки поставки и монтажа оборудования;
- наличие послегарантийного обслуживания;
- техническое лидерство поставщика.

В соответствие с математической моделью, далее составляются матрицы определения веса критериев, для каждого эксперта – своя матрица. В соответствие с математической моделью, в матрице по методу парного сравнения критериев на основе фиксированного предпочтения определяется вес каждого критерия. В таблице 3.10.6 приведена матрица определения весов критериев для эксперта №1, в таблице 3.10.7 – для эксперта №2, в таблице 3.10.8 – для эксперта №3. Заполнение матриц проходит в соответствие с ранее описанной процедурой. Наименования критериев и их нумерация в первом столбце соответствует такой же нумерации и наименованиям в первой строке матрицы.

Таблица 3.10.6

Матрица определения важности критериев для эксперта №1

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	k_i	α_i
1.Фин. устойчивость	1	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	4,5	0,070
2.Цены, скидки	1,5	1	1,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	6,5	0,102
3.Порядок оплаты	1,5	0,5	1	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	5,5	0,086
4.Наличие сервиса в регионе	1,5	1,5	1,5	1	0,5	1	0,5	0,5	8	0,125
5.Обучение операторов	1,5	1,5	1,5	1,5	1	1,5	1	1	10,5	0,164
6. Сроки поставки	1,5	1,5	1,5	1	0,5	1	0,5	0,5	8	0,125
7.Послегарантийное обслуживание	1,5	1,5	1,5	1,5	1	1,5	1	0,5	10	0,156
8.Техническое лидерство	1,5	1,5	1,5	1,5	1	1,5	1,5	1	11	0,172
	Суммарный уровень важности (k_c)								64	1

Таблица 3.10.7

Матрица определения важности критериев для эксперта №2

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	k_i	α_i
1.Фин. устойчивость	1	0,5	0,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	9,5	0,148
2.Цены, скидки	1,5	1	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	11,5	0,180
3.Порядок оплаты	1,5	0,5	1	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	10,5	0,164
4.Наличие сервиса в регионе	0,5	0,5	0,5	1	1	1	1	1	6,5	0,102
5.Обучение операторов	0,5	0,5	0,5	1	1	1	1	1	6,5	0,102
6. Сроки поставки	0,5	0,5	0,5	1	1	1	1	1	6,5	0,102
7.Послегарантийное обслуживание	0,5	0,5	0,5	1	1	1	1	1	6,5	0,102
8.Техническое лидерство	0,5	0,5	0,5	1	1	1	1	1	6,5	0,102
	Суммарный уровень важности (k_c)								64	1

Таблица 3.10.8

Матрица определения важности критериев для эксперта №3

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	k_i	α_i
1.Фин. устойчивость	1	1	1	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	5,5	0,086
2.Цены, скидки	1	1	1,5	0,5	0,5	0,5	0,5	1	6,5	0,102
3.Порядок оплаты	1	0,5	1	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	5	0,078
4.Наличие сервиса в регионе	1,5	1,5	1,5	1	1	1	1,5	1,5	10,5	0,164
5.Обучение операторов	1,5	1,5	1,5	1	1	1	1,5	1,5	10,5	0,164
6. Сроки поставки	1,5	1,5	1,5	1	1	1	1,5	1	10	0,156
7.Послегарантийное обслуживание	1,5	1,5	1,5	0,5	0,5	0,5	1	1	8	0,125
8.Техническое лидерство	1,5	1	1,5	0,5	0,5	1	1	1	8	0,125
	Суммарный уровень важности (k_c)								64	1

Как видно из таблиц, в зависимости от эксперта, критерии получили различную важность, ввиду различных занимаемых в организации управленческих должностей и субъективного мнения. Следующий этап - выставление экспертных оценок x_{mti} в матрицы экспертных оценок поставщиков. В оценке участвуют четыре поставщика(t=4) – поставщик 1, поставщик 2, поставщик 3, поставщик 4. Матрицы экспертных оценок поставщиков представлены в таблицах 3.10.9, 3.10.10, 3.10.11. В матрицах используются сокращения, поставщик 1 – П1, поставщик 2 – П2, поставщик 3 – П3.

Таблица 3.10.9

Матрица экспертной оценки поставщиков экспертом №1

	П1	П2	П3	П4
1. Фин. устойчивость	3	4	4	3
2. Цены, скидки	5	4	4	4
3. Порядок оплаты	4	4	5	3
4. Наличие сервиса в регионе	4	3	5	2
5. Обучение операторов	5	4	3	3
6. Сроки поставки	4	4	3	5
7. Послегарантийное обслуживание	2	3	2	4
8. Техническое лидерство	5	5	4	3

Таблица 3.10.10

Матрица экспертной оценки поставщиков экспертом №2

	П1	П2	П3	П4
1. Фин. устойчивость	4	5	4	3
2. Цены, скидки	5	3	4	5
3. Порядок оплаты	3	4	5	3
4. Наличие сервиса в регионе	3	4	5	2
5. Обучение операторов	4	5	3	3
6. Сроки поставки	5	4	3	5
7. Послегарантийное обслуживание	3	4	2	4
8. Техническое лидерство	4	4	3	3

Таблица 3.10.11

Матрица экспертной оценки поставщиков экспертом №3

	П1	П2	П3	П4
1. Фин. устойчивость	4	4	5	3
2. Цены, скидки	4	2	5	5
3. Порядок оплаты	3	4	3	4
4. Наличие сервиса в регионе	3	4	4	3
5. Обучение операторов	3	5	5	4
6. Сроки поставки	4	5	3	4
7. Послегарантийное обслуживание	2	3	1	5
8. Техническое лидерство	4	5	4	4

На следующем этапе составляется матрица весовых экспертных оценок поставщиков, для каждого эксперта по всем поставщикам. Матрицы представлены в таблицах 3.10.12, 3.10.13, 3.10.14.

Таблица 3.10.12

Матрица весовой экспертной оценки поставщиков экспертом №1.

	П1	П2	П3	П4
1. Фин. устойчивость	0,211	0,281	0,281	0,211
2. Цены, скидки	0,508	0,406	0,406	0,406
3. Порядок оплаты	0,344	0,344	0,430	0,258
4. Наличие сервиса в регионе	0,500	0,375	0,625	0,250
5. Обучение операторов	0,820	0656	0,492	0,492
6. Сроки поставки	0,500	0,500	0,375	0,625
7. Послегарантийное обслуживание	0,313	0,469	0,313	0,625
8. Техническое лидерство	0,859	0,859	0,688	0,516
Суммарная оценка, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{im} * x_{mti}$	**4,055**	**3,891**	**3,609**	**3,383**

Таблица 3.10.13

Матрица весовой экспертной оценки поставщиков экспертом №2

	П1	П2	П3	П4
1. Фин. устойчивость	0,594	0,742	0,594	0,445
2. Цены, скидки	0,898	0,539	0,719	0,898
3. Порядок оплаты	0,492	0,656	0,820	0,492
4. Наличие сервиса в регионе	0,305	0,406	0,508	0,203
5. Обучение операторов	0,406	0,508	0,305	0,305
6. Сроки поставки	0,508	0,406	0,305	0,508
7. Послегарантийное обслуживание	0,305	0,406	0,203	0,406
8. Техническое лидерство	0,406	0,406	0,305	0,305
Суммарная оценка, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{im} * x_{mti}$	**3,914**	**4,070**	**3,758**	**3,563**

Таблица 3.10.14

Матрица весовой экспертной оценки поставщиков экспертом №3.

	П1	П2	П3	П4
1. Фин. устойчивость	0,344	0,344	0,430	0,258
2. Цены, скидки	0,406	0,203	0,508	0,508
3. Порядок оплаты	0,234	0,313	0,234	0,313
4. Наличие сервиса в регионе	0,492	0,656	0,656	0,492
5. Обучение операторов	0,492	0,820	0,820	0,656
6. Сроки поставки	0,625	0,781	0,469	0,625
7. Послегарантийное обслуживание	0,250	0,375	0,125	0,625
8. Техническое лидерство	0,500	0,625	0,500	0,500
Суммарная оценка, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{im} * x_{mti}$	**3,344**	**4,117**	**3,742**	**3,977**

На четвертом этапе, в соответствие с экономико-математической моделью, на основе полученных ранее оценок поставщиков от всех экспертов, рассчитываются значения целевой функции. Результаты расчета представлены в таблице 3.10.15.

Таблица 3.10.15

Итоговая матрица оценок поставщиков.

	Среднее арифметическое оценки
Поставщик 1	3,771
Поставщик 2	**4,026**
Поставщик 3	3,703
Поставщик 4	3,641

В соответствие с экономико-математической моделью, на основе таблицы 3.10.15, аналитическим методом можно сделать вывод, что поставщик 2 – наиболее подходящий из всех поставщиков, исходя из текущих критериев оценки, так как $max(f(x_{mti}))$ = 4,026 – максимальное значение среди всех среднеарифметических оценок поставщиков. На рисунке 3.10.2 представлен точечный график целевой функции, для большей наглядности.

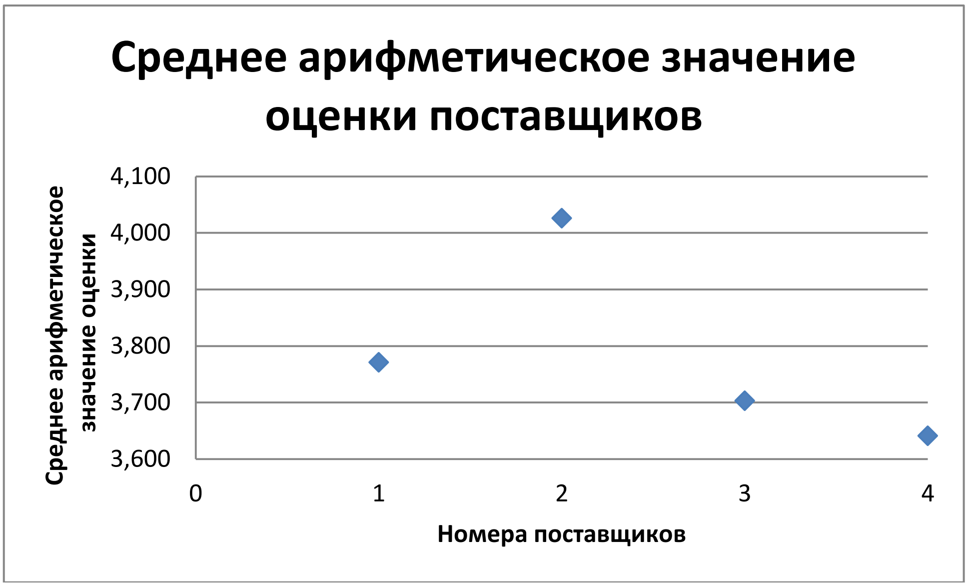


Рисунок 3.10.2 – Точечный график целевой функции.

Как видно из рисунка 3.10.2, наибольшую оценку получил поставщик под номером 2. При этом оценка удовлетворяет условиям экономико-математической модели, следовательно, для закупки и поставки оборудования необходимо выбрать именно поставщика 2.

Основным результатом, можно считать получение экономико-математической модели, с высокой степенью применяемости на практике, особенно в случаях проведения массового перевооружения предприятия, при которых технологическое задание оставляет достаточно широкое право выбора для предприятия, относительно возможных поставщиков. Полученная модель, при правильном ее использовании, поможет предприятию, основываясь на знаниях и мнениях своих сотрудников (экспертов), проводить анализ и выбор поставщиков технологического оборудования и проч. Отдельно стоит отметить, что возможность быстрого определения мнений экспертов позволяет минимизировать время на принятие решения по выбору поставщика. В дальнейшем, данная модель может быть внедрена в информационную инфраструктуру предприятия.

Несмотря на свою специализацию, математическая модель может стать достаточно разносторонним инструментом выбора на основе экспертного мнения, так как допускает учет различных критериев, а использование весовых оценок позволяет получать более осознанный и точный результат.

Список рекомендуемых математических методов для самостоятельного изучения

1. Транспортная задача: закрытая и открытая модели, определение опорного плана транспортной задачи, метод северо-западного угла**,** метод минимальной стоимости, метод аппроксимации Фогеля, метод двойного предпочтения, теорема о существовании оптимального решения, транспортные задачи с ограничениями.

2. Задачи дробно-линейного программирования: графический метод решения задач дробно-линейного программирования, сведение задачи дробно-линейного программирования к задаче линейного программирования.

3. Динамическое программирование: функции Беллмана, уравнения Беллмана, условно-оптимальные управления, принцип Беллмана для оптимальных путей, оптимальное распределение инвестиций как задача динамического программирования.

4. Марковские модели принятия решений.

5. Производственные функции: определение и свойства, виды, эластичность, неоклассическая производственная, автономный и овеществленный способы учета научно-технического прогресса на макроуровне в производственных функциях, изокванты, предельная производительность и предельная норма замещения ресурсов.

6. Нелинейное программирование: задачи оптимизации, теорема Куна-Таккера для задачи нелинейного программирования с ограничениями типа неравенств, теорема Куна-Таккера для общей задачи нелинейного программирования, аналитическое решение многомерных задач нелинейного программирования; методы решения задач безусловной одномерной оптимизации, безусловной многомерной оптимизации, условной многомерной оптимизации.

Рекомендуемая литература

Рекомендуемая литература к введению

1. *Васильев Ю.А.* Знакомьтесь, Промышленная политика / Ю.А. Васильев // Промышленность: бухгалтерский учет и налогообложение. – 2015. - N 2. - С. 5 - 12.
2. *Еременко В.И.* Российское законодательство о промышленной политике / В.И. Еременко // Законодательство и экономика. – 2015. - N 3.
3. Конституция Российской Федерации: принята всенародным голосованием 12.12.1993. (с учетом поправок, внесенных Законами РФ о поправках к Конституции РФ от 30.12.2008 N 6-ФКЗ, от 30.12.2008 N 7-ФКЗ, от 05.02.2014 N 2-ФКЗ, от 21.07.2014 N 11-ФКЗ): офиц. текст по состоянию на 22.07.2014. / Собрании законодательства РФ. - 04.08.2014. - N 31, ст. 4398.
4. О закупках товаров, работ, услуг отдельными видами юридических лиц: федеральный закон от 18 июля 2011 года N 223-ФЗ: офиц. текст по состоянию на 01.01.2015. / Собрание законодательства РФ. - 25.07.2011. - N 30 (ч. 1), ст. 4571.
5. О контрактной системе в сфере закупок товаров, работ, услуг для обеспечения государственных и муниципальных нужд: федеральный закон от 05.04.2013 N 44-ФЗ: офиц. текст по состоянию на 30.06.2015. / Собрание законодательства РФ. - 08.04.2013. - N 14, ст. 1652.
6. О Концепции долгосрочного социально-экономического развития Российской Федерации на период до 2020 года: Распоряжение Правительства РФ от 17.11.2008 N 1662-р: офиц. текст по состоянию на 08.08.2009. / Собрание законодательства РФ. - 24.11.2008. - N 47, ст. 5489.
7. О принятии и введении в действие Общероссийского

классификатора видов экономической деятельности (ОКВЭД2) ОК 029-2014 (КДЕС Ред. 2) и Общероссийского классификатора продукции по видам экономической деятельности (ОКПД2) ОК 034-2014 (КПЕС 2008): Приказ Росстандарта от 31.01.2014 N 14-ст: офиц. текст по состоянию на 30.09.2014. / Экономика и жизнь (Бухгалтерское приложение). - N 21. - 30.05.2014.

8. О промышленной политике в Российской Федерации: федеральный закон от 31.12.2014 N 488-ФЗ: офиц. текст по состоянию на 30.06.2015. / Собрание законодательства РФ. - 05.01.2015. - N 1 (часть I), ст. 41.
9. О техническом регулировании: Федеральный закон от 27.12.2002 N 184-ФЗ: офиц. текст по состоянию на 22.12.2014. / Собрание законодательства РФ. - 30.12.2002. - N 52 (ч. 1), ст. 5140.
10. О торгово-промышленных палатах в Российской Федерации: Закон РФ от 07.07.1993 N 5340-1: офиц. текст по состоянию на 01.01.2015. / Российская газета. - N 154. - 12.08.1993.
11. Об утверждении Единого плана счетов бухгалтерского учета для органов государственной власти (государственных органов), органов местного самоуправления, органов управления государственными внебюджетными фондами, государственных академий наук, государственных (муниципальных) учреждений и Инструкции по его применению: Приказ Минфина России от 01.12.2010 N 157н: офиц. текст по состоянию на 16.11.2014. / Российская газета. - N 8. - 19.01.2011.
12. Об утверждении Инструкции по планированию, учету и калькулированию себестоимости продукции на нефтеперерабатывающих и нефтехимических предприятиях: Приказ Минтопэнерго РФ от 17.11.1998 N 371: офиц. текст по состоянию на 12.10.1999. / Документ опубликован не был. http://base.consultant.ru/cons/cgi/online.cgi?req=doc;base=LAW;n=2435;

dst=0;ts=CB2DDD8916CC9EB2EBD1F330B4E60F5B;rnd=0.5109976888933304 . Дата обращения 30.01.2019.

13. Об утверждении Методических указаний по бухгалтерскому учету материально-производственных запасов: Приказ Минфина РФ от 28.12.2001 N 119н: офиц. текст по состоянию на 01.01.2011. / Российская газета. - N 36. - 27.02.2002,
14. Об утверждении "Правил безопасности при производстве свинца и цинка: Постановление Госгортехнадзора РФ от 24.04.2003 N 27: документ утратил силу 22.03.2015. / Российская газета (специальный выпуск). - N 120/1. - 21.06.2003.
15. Об утверждении разъяснения "О порядке применения утвержденных Постановлением Совета Министров СССР от 22 августа 1956 г. N 1173 Списков производств, цехов, профессий и должностей, работа в которых дает право на государственную пенсию на льготных условиях и в льготных размерах, к профессиям рабочих, наименования которых изменены в Едином тарифно-квалификационном справочнике работ и профессий рабочих (выпуски ЕТКС N 1 - 72 утверждены Постановлениями Госкомтруда СССР и Секретариата ВЦСПС в 1983 - 1986 гг.): Постановление Госкомтруда СССР, Секретариата ВЦСПС от 29.10.1987 N 653/29-118 / Документ опубликован не был. http://base.consultant.ru/cons/cgi/online.cgi?req=doc;base=LAW;n=122819;dst=0;ts=CB2DDD8916CC9EB2EBD1F330B4E60F5B;rnd=0.5246627202945444 . Дата обращения 30.01.2019.
16. Об утверждении списков производств, цехов, профессий и должностей, работа в которых дает право на государственную пенсию на льготных условиях и в льготных размерах: Постановление Совмина СССР от 22.08.1956 N 1173: офиц. текст по состоянию на 27.09.1990. / Документ опубликован не был. http://base.consultant.ru/cons/cgi/online.cgi?req=doc;base=LAW;n=1029

51;dst=0;ts=CB2DDD8916CC9EB2EBD1F330B4E60F5B;rnd=0.8878874283695134 . Дата обращения 30.01.2019.

17. Об утверждении Стратегии инновационного развития Российской Федерации на период до 2020 год: Распоряжение Правительства РФ от 08.12.2011 N 2227-р: офиц. текст по состоянию на 08.12.2011. / Собрание законодательства РФ. - 02.01.2012. - N 1, ст. 216.
18. ОК 004-93. Общероссийский классификатор видов экономической деятельности, продукции и услуг (Часть III раздел D (коды 2430000 - 3440000)): Постановлением Госстандарта России от 06.08.1993 N 17: офиц. текст по состоянию на 12.12.2012. - М.: ИПК Издательства стандартов, 1996.
19. *Цыганков Э.* Острова экономического процветания / Э. Цыганков // ЭЖ-Юрист. – 2015. - N 5. - С. 3.
20. *Аркин П.А.* Исследование операций: учебное пособие / П.А. Аркин, К.А. Соловейчик, К.Г. Аркина. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2016. – 232 с.
21. *Аркин П.А.* Методические вопросы оптимизации производства в пищевой промышленности (на примере изготовления сушеных рыбных субпродуктов) / П.А. Аркин, М.Б. Иванов, К.Г. Аркина // Известия Санкт-Петербургского государственного экономического университета. - №2 (110). - 2018. - с.69-78
22. *Аркин П.А.* Методология оптимизационных подходов к процессам управления производством в машиностроении / П.А. Аркин, К.А. Соловейчик, К.Г. Аркина // Известия Санкт-Петербургского государственного экономического университета. - №1 (103), ч. 2. – 2017. – с. 69-77.
23. *Аркин П.А.* Реализация методологии оптимизационных подходов при разработке алгоритма модуля планирования производства на машиностроительном предприятии / П.А. Аркин, К.А. Соловейчик, К.Г. Аркина // Известия Санкт-Петербургского государственного

экономического университета. - № 3 (105). – 2017. – с. 63-71.

24. *Аркин П.А.* Реализация методологии оптимизационных подходов при разработке системы бизнес анализа и прогнозирования для машиностроительного предприятия / П.А. Аркин, К.А. Соловейчик, К.Г. Аркина // Известия Санкт-Петербургского государственного экономического университета. - №6 (108). – 2017. – с. 57-67.
25. *Аркин П.А. Р*ешение задачи оперативно-производственного планирования машиностроительного предприятия с помощью «жадного» и генетического алгоритмов / П.А. Аркин, Н.В. Муханова, Б.А. Овчар // Организатор производства. – 2018. – Т 26. - №2. – с. 17-29.
26. *Аркин П.А.* Организационно-экономическое моделирование: учебное пособие / П.А. Аркин, К.А. Соловейчик, К.Г. Аркина. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2016. – 262 с.
27. *Аркин П.А.* Оптимизация процессов управления наукоемкими производствами: нелинейное программирование: учебное пособие / П.А. Аркин, К.А. Соловейчик, К.Г. Аркина. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2016. – 213 с.
28. *Соловейчик К.А.* Модель выбора поставщика при техническом перевооружении предприятия / К.А. Соловейчик, В.А. Левенцов, Э.М. Фарбер // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Экономические науки. – 2018. – Т 11. - №1. – с. 199-210.
29. *Соловейчик К.А.* Процессы управления наукоемкими производствами в машиностроении: монография / К.А. Соловейчик, С.В. Салкуцан, П.А. Аркин. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2018. – 435 с.
30. *Соловейчик К.А.* Экономика фирмы: теория вероятностей: учебное пособие / К.А. Соловейчик, П.А. Аркин, С.В. Салкуцан, В.В. Щеголев, А.С. Лавров, К.Г. Аркина. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2019. – 124 с.

Рекомендуемая литература к разделам 1.1. и 2.1.

1. *Аркин П.А.* Исследование операций: учебное пособие / П.А. Аркин, К.А. Соловейчик, К.Г. Аркина. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2016.
2. *Аркин П.А.* Реализация методологии оптимизационных подходов при разработке алгоритма модуля диспетчирования производства на машиностроительном предприятии / П.А. Аркин, К.А. Соловейчик, К.Г. Аркина // Известия Санкт-Петербургского государственного экономического университета. - №2 (104). – 2017. – с. 94-100.
3. *Голдратт Э.М.* Критическая цепь / Э.М. Голдратт; Пер. с англ. – Москва : ТОС Центр, 2006.
4. *Канторович Л.В.* Математические методы организации и планирования производства / Л.В. Канторович. - Л.: Издание Ленинградского государственного университета, 1939.
5. *Козловский В.А.* Производственный менеджмент: Учебник / под ред. В.А. Козловского. – М.: ИНФРА-М, 2003. – 574 с.
6. *Ловыгин А.* Foreman MDC – система нового поколения для мониторинга станков с ЧПУ [Текст] / А. Ловыгин // CAD/CAM/CAE Observer. – 2007, № 6. – С. 71-73.
7. *Марков А.А.* Избранные труды. Теория чисел. Теория вероятностей / А.А. Марков. - М.: Издательство Академии наук СССР, 1951.
8. *Мауэргауз, Ю.Е.* "Продвинутое" планирование и расписания (AP&S) в производстве и цепочках поставок [Текст] / Ю.Е. Мауэргауз. – М.: Экономика, 2012. – 574 с.
9. Организация конвертации данных и обмена данными с помощью конфигурации "Конвертация данных 2.0" [Электронный ресурс] / Информационно-технологическое сопровождение пользователей 1С:Предприятия. – Режим доступа: http://its.1c.ru/db/metod8dev/content/2943/hdoc. Дата обращения 30.01.2019.
10. *Первозванский А.А.* Математические модели в управлении

производством / А.А. Первозванский. – М.: Наука (Главная редакция физико-математической литературы), 1975.

11. Планирование и управление производством с помощью системы Галактика ERP [Электронный ресурс]: конкурентоспособность и эффективность вашего бизнеса. – Режим доступа: ftp://ftp.bit-vector.ru/ERP_Upravlenie_proizvodstvom.pdf. Дата обращения 30.01.2019.
12. *Португал В. М.* Модели планирования на предприятии. / В.М. Португал, А.М. Семенов. – М.: Наука, 1978.
13. *Прилуцкий, М.Х.* Многостадийные задачи теории расписаний с альтернативными вариантами выполнения работ [Текст] / М.Х. Прилуцкий, С.Е. Власов // Системы управления и информационные технологии. - №2 (19). – 2005. – с. 44-47.
14. *Пщелинский, А.С.* Оптимизация межфирменных взаимодействий и внутрифирменных управленческих решений: диссертация на соискание ученой степени доктора экономических наук: 08.00.13. - Москва, 2002. - 314 с.
15. *Соловейчик К.А.* Методические вопросы стимулирования роста глубины передела промышленной продукции субъектами Российской Федерации / К.А. Соловейчик, П.А. Аркин // Известия Санкт-Петербургского государственного экономического университета. - №4 (94). – 2015. – с. 25-30.
16. *Трусова Л.И.* Экономика машиностроительного производства. Задачи и ситуации: Учебное пособие / Л.И. Трусова. – Ульяновск: УлГТУ, 2005. – 70 с.
17. *Фатхудинов* Р.А. Производственный менеджмент: Учебник для вузов. 4-е изд. / Р.А. Фатхутдинов. – СПб: Питер, 2003. – 491 с: ил.
18. ФОБОС v.03.2015. Руководство пользователя [Текст]. – М.: Московский государственный технологический университет «СТАНКИН», 2015.

19. *Christou I.T*. Quantitative methods in supply chain management. Models and algorithms / Ioannis T. Christou. – London: Springer London Ltd, 2012. – 398 с.
20. Erenguc S., Tirupati D., Woodruff D. (1997). Introduction to special issue on capacity constrained planning and scheduling. Production and Operations Management, 6 (1), 1-2.
21. Herroelen W., Leus R. (2001). On the merits and pitfalls of critical chain scheduling. Journal of perations Management, 19 , 559-577.
22. Herroelen W., Leus R., Demeulemeester E. (2002). Critical chain project scheduling: Do not oversimplify. Project Management, 33 (4), 48-60.
23. INFOR ERP SYTELINE [Электронный ресурс]: Functional Overview. – Режим доступа: http://www.godlan.com/documents/ERP_Manufacturing_Software_Infor_ERP_SyteLine_v8_System_Functionality.pdf. Дата обращения 30.01.2019.
24. Kestner W. Innovative Logistics Management [Текст] / W. Kestner, T. Blecker, C. Hersatt. – Schmidt Erich Verlag, 2008.
25. *Kumar S.A.* Productions and operations management. Second Edition / S.A. Kumar, N. Suresh. – New Delhi: New age international, 2008. – 271 с.
26. McKay K.N., Morton T.E. (1998). Critical chain. IIE Transactions, 30 (8), 759-62.
27. MDC-Max Configuration Manual [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.cimco.com/products/manuals/CIMCO_MDC-Max_Manual(EN).pdf. Дата обращения 30.01.2019.
28. Monk Ellen F. Concepts in enterprise resource planning [Текст] / Monk Ellen F., Wagner Brej J. – Boston: Thomson Course Technology, 2013.
29. Morton T.E., Pentico D.W. (1993). Heuristic scheduling systems with applications to production systems and project management. New York: Wiley.

30. Nahmias S. (1989). Operations analysis . Boston: Irwin.
31. Raz T., Barnes R., Dvir D. (2003). A critical look at critical chain project management. Project Management Journal, 34 (4), 24-32.
32. Raz T., Marshall R. (1996). Effect of resource constraints on float calculations in project networks. International Journal of Project Management, 14 (4), 241-248.
33. SAP Manufacturing Execution (SAP ME) [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://help.sap.com/saphelp_me52/helpdata/ru/04/510820335f4e129df327de58689a22/frameset.htm. Дата обращения 30.01.2019.
34. Stadtler H. Supply Chain Management and Advanced Planning [Текст]. Concepts, Models, Software and Case Studies / Stadtler Hartmut, Kilger Christoph. – Berlin: Springer, 2008.
35. Trietsch D. Why a critical path by any other name would smell less sweet? Towards a holistic approach to PERT/CPM. Project Management Journal, March 2005, 27-36.
36. Wiest J.D. (1964). Some properties of schedules for large projects with limited resources. Operations Research, 12 , 395-418.

Рекомендуемая литература к разделам 1.2. - 1.15.

1. *Абрамов Л.М.* Математическое программирование / Л.М. Абрамов, В.Ф. Капустин. - Л., Изд-Ленингр. ун-та, 1976.
2. *Акулич И.Л.* Математическое программирование в примерах и задачах / И.Л. Акулич. - М.: Высшая школа, 1993.
3. *Афанасьев М.Ю.* Исследование операций в экономике: модели, задачи, решения: Учебное пособие / М.Ю. Афанасьев, Б.П. Суворов. - М.: ИНФРА-М, 2003.
4. *Ашманов С.А.* Линейное программирование / С.А. Ашманов. - М.: Наука, 1981.

5. Баканов М.И. Теория экономического анализа: Учебник. -4-е изд., доп. и перераб / М.И. Баканов, А.Д. Шеремет. - М.: Финансы и статистика, 2000.
6. Баканов М.И. Экономический анализ: ситуации, тесты, примеры, задачи, выбор оптимальных решений, финансовое прогнозирование: Учеб. Пособие / М.И. Баканов, А.Д. Шеремет. - М.: Финансы и статистика, 1999.
7. *Банди Б.* Основы линейного программирования: Пер. с англ. / Б. Банди. - М.: Радио и связь, 1989.
8. *Беллман Р.* Прикладные задачи динамического программирования / Р. Беллман, С. Дрейфус; перевод с англ. Н. М. Митрофановой. — М.: Наука, 1965.
9. *Вентцель Е.С.* Элементы динамического программирования / Е.С. Вентцель.- М.: Наука,1964.
10. *Гасс С.* Линейное программирование / С. Гасс. - М.: Физматгиз, 1961.
11. *Габасов Р.* Методы линейного программирования. Ч.1. Общие задачи / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова. – Минск: Изд-во БГУ им. В.И. Ленина, 1977.
12. Габасов Р. Методы линейного программирования. Ч.2. Транспортные задачи / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова. – Минск: Изд-во БГУ им. В.И. Ленина, 1977.
13. *Глухов В.В.* Математические методы и модели для менеджмента / В.В. Глухов, М.Д. Медников, С.Б. Коробко - СПб.: Издательство “Лань”, 2000.
14. *Гольштейн Е.Г.* Линейное программирование, теория, методы и приложения / Е.Г. Гольштейн, Д.Б. Юдин. - М.: Наука, 1969.
15. *Грешилов А.А.* Прикладные задачи математического программирования: Учеб. Пособие/ А.А. Грешилов. – 2-е изд. – М.: Логос, 2006.

16. *Грин, Д.* Математические методы анализа алгоритмов / Д. Грин. - Д.~Кнут. — М.:Мир, 1987.
17. *Дудорин В.И.* Моделирование в задачах управления производством/ В.И. Дудорин.-М.:Статистика, 1980.
18. Исследования операций в экономике: учебное пособие для ВУЗов / под ред. Кремера Н.Ш. –М.: Банки и Биржи , ЮНИТИ, 1997.
19. Жолобов Д. А. Введение в математическое программирование: Учебное пособие/ Д. А. Жолобов. – М.: МИФИ, 2008.
20. *Карасев А.И.* Математические методы и модели в планировании / А.И. Карасев, Н.Ш. Кремер, Т.И. Савельева.-М.: Экономика, 1987.
21. *Карманов В.Г.* Математическое программирование/ В.Г. Карманов. – М.: Наука, 1986.
22. *Ковалев М.М.* Дискретная оптимизация. Целочисленное программирование/ М.М. Ковалев. – М.:"Едиториал УРСС", 2003.
23. *Колемаев В.А.* Математическая экономика/ В.А. Колемаев. - М.: Юнити,1998.
24. *Красс М.С.* Математические методы и модели для магистрантов экономики: Учебное пособие / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – СПБ.: Питер, 2006.
25. *Кузнецов А.В.* Высшая математика. Математическое программирование / А.В. Кузнецов, В.А. Сакович, Н.И. Холод. - М.: Выш. шк., 1994. – 286 с.: ил.
26. *Кузнецов Ю.Н.* Математическое программирование: Учеб. Пособие / Ю.Н. Кузнецов, В.И. Кузубов, А.Б. Волощенко / 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. школа, 1980.
27. *Лотов А.В.* Введение в экономико-математическое моделирование/ А.В. Лотов.-М.: Наука, 1984.

28. *Ляшенко И.Н.* Линейное и нелинейное программирование / И.Н, Ляшенко, Е.А, Карагодова, Н.В. Черникова, Н.З. Шор. – Киев.: Издательское объединение “Вища школа”, 1975.
29. *Морозов В.В.* Исследование операций в задачах и упражнениях / В.В. Морозов, А.Г. Сухарев, В.В. Федоров. - М.,1986.
30. *Пантелеев А.В.* Методы оптимизации в примерах и задачах: Учебное пособие / А.В. Пантелеев, Т.А. Летова. - М.: Высшая Школа, 2005.
31. *Пападимитриу Х.* Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. / Х. Пападимитриу, К. Стайглиц. — М.: Мир, 1985.
32. *Ромакин М.И.* Оптимизация планирования производства: экономико-математические модели и методы/ М.И. Ромакин.-М.: Финансы и статистика, 1981.
33. *Солодовников А.С.* Введение в линейную алгебру и линейное программирование/ А.С. Солодовников. - М.: Изд. “Просвещение”, 1966.
34. *Схрейвер А.* Теория линейного и целочисленного программирования: В 2-х т. Т.1: Пер с англ. / А. Схрейвер. - М.: Мир, 1991.
35. *Таха Х.А.* Введение в исследование операций. Кн.1 и 2/ Х.А. Таха. - М.:Мир, 1985.
36. Терехов Л.Л. Экономико-математические методы.- М.: Статистика, 1972.
37. *Тынкевич М.А.* Экономико-математические методы (исследование операций). Изд. 2, испр. и доп. / М.А. Тынкевич. - Кемерово, 2000.
38. *Хедли Дж.* Нелинейное и динамическое программирование/ Дж. Хедли. - М.: Мир, 1967.
39. *Черноруцкий И.Г.* Методы оптимизации в теории управления: Учеб. Пособие / И.Г. Черноруцкий. – СПб.: Питер, 2004.
40. Y(x).ru Сервис онлайн построения графиков. Предназначен для онлайн построения графиков функций (обычных и параметрических)

и графиков по точкам (графиков по значениям). Режим доступа: http://www.yotx.ru Дата обращения 12.08.2016. Дата обращения 30.01.2019.

41. Математическое бюро МатБюро[Электронный ресурс]/ Полезные материалы: учебники, программы, сайты, формулы – Режим доступа: http://www.matburo.ru/useful.php. Дата обращения 12.08.2016. Дата обращения 30.01.2019.

42. Экономико-математические методы. Электронный учебник. Режим доступа: http://www.math.mrsu.ru/text/method/index.htm. Дата обращения 30.01.2019.

Рекомендуемая литература к разделу 1.16.

1. Аркин П.А., Крылов А.Н., Смирнов С.А. Адекватность информационных систем стадиям функционирования бизнес-процесса // Известия Санкт-Петербургского государственного технологического института (технического университета). - №5 (31). -2009. - с. 102-104.
2. Аркин П.А., Соловейчик К.А., Аркина К.Г. Исследование операций: учебное пособие. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2016. – 232 с.
3. Аркин П.А., Соловейчик К.А., Аркина К.Г. Методология оптимизационных подходов к процессам управления производством в машиностроении // Известия Санкт-Петербургского государственного экономического университета. - №1 (103), ч. 2. – 2017. – с. 69-77.
4. ГОСТ 32004-2012. Межгосударственный стандарт. Рыба мелкая охлажденная. Технические условия (введен в действие Приказом Росстандарта от 25.09.2013 N 1094-ст). - М.: Стандартинформ, 2013.
5. ГОСТ 32366-2013. Межгосударственный стандарт. Рыба мороженая.

Технические условия: (введен в действие Приказом Росстандарта от 08.11.2013 N 1526-ст). - М.: Стандартинформ, 2014.

6. ГОСТ 32744-2014 Рыба мелкая мороженая. Технические условия (введен в действие Приказом Федерального агентства по техническому регулированию и метрологии от 03.07.2014. N 689-ст). - М.: Стандартинформ, 2015.
7. ГОСТ 814-96. Межгосударственный стандарт. Рыба охлажденная. Технические условия (введен в действие Постановлением Госстандарта России от 30.07.1996 N 497). - М., ИПК Издательство стандартов, 1996.
8. ГОСТ Р 51232-98 Вода питьевая. Общие требования к организации и методам контроля качества (утв. Постановлением Госстандарта РФ от 17.12.1998 N 449). - М., ИПК Издательство стандартов, 2003.
9. ГОСТ Р 51574-2000. Государственный стандарт Российской Федерации. Соль поваренная пищевая. Технические условия (принят и введен в действие Постановлением Госстандарта России от 23.03.2000 N 61-ст). - М.: ИПК Издательство стандартов, 2000.
10. О введении в действие Санитарных правил: Постановление Главного государственного санитарного врача РФ от 26.09.2001 N 24 (ред. от 28.06.2010) (вместе с "СанПиН 2.1.4.1074-01. 2.1.4. Питьевая вода и водоснабжение населенных мест. Питьевая вода. Гигиенические требования к качеству воды централизованных систем питьевого водоснабжения. Контроль качества. Гигиенические требования к обеспечению безопасности систем горячего водоснабжения. Санитарно-эпидемиологические правила и нормативы") (Зарегистрировано в Минюсте России 31.10.2001 N 3011). - Российская газета. - N 223. - 14.11.2001.
11. О принятии технического регламента Таможенного союза "Пищевая продукция в части ее маркировки": Решение Комиссии Таможенного союза от 09.12.2011 N 881 (вместе с "ТР ТС 022/2011. Технический

регламент Таможенного союза. Пищевая продукция в части ее маркировки") / Официальный сайт Комиссии Таможенного союза http://www.tsouz.ru/, 15.12.2011.

12. О принятии технического регламента Таможенного союза "О безопасности пищевой продукции": Решение Комиссии Таможенного союза от 09.12.2011 N 880 (ред. от 10.06.2014) (вместе с "ТР ТС 021/2011. Технический регламент Таможенного союза. О безопасности пищевой продукции") / Официальный сайт Комиссии Таможенного союза http://www.tsouz.ru/, 15.12.2011., 19.07.2014.
13. О техническом регламенте Евразийского экономического союза "О безопасности рыбы и рыбной продукции": Решение Совета Евразийской экономической комиссии от 18.10.2016 N 162 (вместе с "ТР ЕАЭС 040/2016. Технический регламент Евразийского экономического союза. О безопасности рыбы и рыбной продукции") / Официальный сайт Евразийского экономического союза http://www.eaeunion.org/, 20.03.2017.
14. О принятии технического регламента Таможенного союза "О безопасности упаковки": Решение Комиссии Таможенного союза от 16.08.2011 N 769 (ред. от 15.11.2016) (вместе с "ТР ТС 005/2011. Технический регламент Таможенного союза. О безопасности упаковки") (с изм. и доп., вступ. в силу с 21.05.2017) / Официальный сайт Комиссии Таможенного союза http://www.tsouz.ru/, 02.09.2011., 21.05.2017.
15. Соколов А.А., Аркин П.А. Планирование проекта разработки и внедрения автоматизированной программы организации производства машиностроительного предприятия / XX Международная конференция по мягким вычислениям и измерениям (SCM-2017) // Сборник докладов в 3-х томах. Санкт-Петербург. 24–26 мая 2016 г.– Т 2. – 2017. – с. 506 – 509.
16. Соловейчик К.А. Разработка системы интеграции подсистемы

диспетчирования с основной учетной системой машиностроительного предприятия // Известия Санкт-Петербургского государственного экономического университета. - №4 (106). – 2017. – с. 36-45.
17. Танасюк Ю.В., Кириченко А.В., Аркин П.А. Организационно-правовое обеспечение коммерческой деятельности на примере транспорта. - СПб.: СПбГТИ(ТУ), 1997. – 143 с.

Рекомендуемая литература к разделам 2.2. – 2.8.

1. *Акулич И.Л.* Математическое моделирование в примерах и задачах / И.Л. Акулич. - М.: Высшая школа, 1986.
2. *Аллен Р.* Математическая экономика/ Р. Аллен. – М.: Ил, 1963.
3. *Ашманов С.А.* Введение в математическую экономику / С.А. Ашманов. – М.: Наука, 1984.
4. *Бигель Дж.* Управление производством / Дж. Бигель. – М.: Мир, 1973.
5. *Вагнер Г.* Основы исследования операций. Тома I-III / Г. Вагнер. – М.: Мир, 1972-1973 гг.
6. Высшая математика для экономистов / под ред. Н.Ш. Кремера. - М.: ЮНИТИ, 1997.
7. *Гейл Д.* Теория линейных экономических моделей / Д. Гейл. – М.: Ил, 1963.
8. *Гермейер Ю.Б.* Игры с непротивоположными интересами / Ю.Б. Гермейер. - М.: Наука, 1976.
9. *Данилов Н.Н.* Исследование операций и математическое программирование / Н.Н. Данилов. - Кемерово: КемГУ, 1995.
10. *Данилов Н.Н.* Курс математической экономики / Н.Н. Данилов. - М.: Высшая школа, 2006.
11. *Дюбин Г.Н.* Введение в прикладную теорию игр / Г.Н. Дюбин, В.Г.

Суздаль. - М.: Наука, 1981.

12. *Замков О.О.* Математические методы в экономике / О.О. Замков, А.В. Толстопятенко, Ю.Н. Черемных. – М.: ДИС, 1997.
13. *Иванилов Ю. П.* Математические модели в экономике / Ю. П. Иванилов, А. В. Лотов. – М.: Наука, 1979.
14. *Интриллигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория / М. Интриллигатор. – М.: Прогресс, 1975.
15. Исследование операций. Том I, том II. / под. ред. Дж.Моудера, С. Элмаграби. – М.: Мир, 1981.
16. Исследование операций в экономике / под ред. Н.Ш. Кремера.- М.: ЮНИТИ, 1997.
17. *Карасев А.И.* Математические методы и модели в планировании / А.И. Карасев, Н.Ш. Кремер, Т.И. Савельева. – М.: Экономика, 1987.
18. *Крушевский А.В.* Теория игр / А.В. Крушевский. - Киев: Вища школа, 1977.
19. *Кузнецов Ю.Н.* Математическое программирование / Ю.Н. Кузнецов и др.. - М.: Высшая школа, 1986.
20. *Ланкастер К.* Математическая экономика / К. Ланкастер. – М.: Советское радио, 1972.
21. *Левин М.И.* Математические модели экономического взаимодействия / М.И. Левин, В.Л. Макаров, А.М. Рубинов. – М.: Наука, 1993.
22. *Льюс Р.Д.* Игры и решения / Р.Д. Льюс, Х. Райфа - . М.: Изд-во иностранной литературы, 1961.
23. *Мак-Кинси Дж.* Введение в теорию игр / Дж. Мак-Кинси. - М.: Физматгиз, 1960.
24. *Маленво Э.* Лекции по микроэкономическому анализу / Э. Маленво. – М.: Наука, 1985.
25. Математический аппарат экономического моделирования / Под. ред. Гольштейна Е. Г. – М.: Наука, 1983.
26. *Мулен Э.* Теория игр / Э. Мулен. - М.,1985.

27. *Никайдо Х.* Выпуклые структуры и математическая экономика / Х. Никайдо. – М.: Мир, 1972.
28. *Оуэн Г.* Теория игр / Г. Оуэн. - М.: Мир,1971.
29. *Садовин Н.С.* Основы теории игр / Н.С. Садовин, Т.Н. Садовина. – Йошкар-Ола: ГОУВПО «Марийский государственный университет», 2011.
30. *Столерю А.* Равновесие и экономический рост / А. Столерю. – М.: Статистика, 1974.
31. *Экланд И.* Элементы математической экономики / И. Экланд. – М.: Мир, 1983.

Рекомендуемая литература к разделу 2.9.

1. Куприяновский В.П., Добрынин А.П., Синягов С.А., Намиот Д.Е., Уткин Н.А. Трансформация промышленности в цифровой экономике – экосистема и жизненный цикл // International Journal of Open Information Technologies. 2017. Т. 5, № 1. С. 34-49.
2. Ингеманссон А.Р. Актуальность внедрения концепции «индустрия 4.0» в современное машиностроительное производство // Наукоёмкие технологии в машиностроении. 2016. Т. 1, №. 7. С. 45-48.
3. Боровков А.И., Клявин О.И., Марусева В.М. и др. Цифровая фабрика (Digital Factory) Института передовых производственных технологий СПбПУ // Трамплин к успеху [корпоративный журнал дивизиона «Двигатели для гражданской авиации» АО «ОДК»]. 2016. № 7. С. 11—13.
4. Wang S., Wan J., Li D., Zhang C. Implementing smart factory of Industrie 4.0: An outlook // International Journal of Distributed Sensor Networks, 2016. vol. 12. no. 1. pp 1-10.
5. Шнитин Ю.В., Левенцов В.А. Имитационное моделирование календарных графиков производства // Экономика и промышленная

политика России. Труды III международной научно-практической конференции. 2004. С. 261-267.

6. Pinedo M.L. Scheduling. Theory, Algorithms and Systems. – Springer International Publishing. 5th edition. 2016. – 670 pg.
7. Левенцов В.А. Модели и инструментальные средства составления календарных расписаний работы механообрабатывающих цехов: диссертация на соискание ученой степени кандидата экономических наук / Санкт-Петербургский политехнический университет. Санкт-Петербург, 2007.
8. Wojakowski P., Warzolek D. Research Study of State-of-the-Art Algorithms for Flexible Job-Shop Scheduling Problem // Technical Transactions, Mechanics, 2013.Vol. 1-M. 381-388. URL: http://www.ejournals.eu/pliki/art/2338 . Дата обращения 30.01.2019.
9. Lal V., Deva Durai C. A. A Survey on Various Optimization Techniques with Respect to Flexible Job Shop Scheduling // International Journal of Scientific and Research Publications. 2014. vol. 4. issue 2. pp. 359-365. URL: http://www.ijsrp.org/research-paper-0214/ijsrp-p2659.pdf . Дата обращения 30.01.2019.
10. Chaudhry I.A., Khan A.A. A research survey: review of flexible job shop scheduling techniques // International Transactions In Operational Research. 2015. vol. 23. issue 3. pp. 551-591.
11. Arroyo J.E.C., Leung J.Y., An effective iterated greedy algorithm for scheduling unrelated parallel batch machines with non-identical capacities and unequal ready times. // Computers and Industrial Engineering. 2017. vol. 105. pp. 84-100.
12. Che A., Zeng Y., Lyu K. An efficient greedy insertion heuristic for energy conscious single machine scheduling problem under time-of-use electricity tariffs // Journal of Cleaner Production. 2016. vol. 129. pp. 565-577.

13. Belaid R., T'kindt V., Esswein C. Scheduling batches in flowshop with limited buffers in the shampoo industry. // European Journal of Operational Research. 2012. vol. 223. pp. 560-572.
14. Davis L. Job shop scheduling with genetic algorithms. // Proceedings of the 1st International Conference on Genetic Algorithms. 1985. pp. 136-140.
15. Falkenauer E., Bouffouixm S. A genetic algorithm for job shop. // In IEEE international conference on robotics and automation. 1991. pp. 824–829.
16. Vollmann T.E., Berry W.L., Whybark D.C., Manufacturing Planning and Control Systems. – Irwin/McGraw-Hill. 4th edition. 1997. – 836 pg.
17. Левенцов В.А., Шнитин Ю.В. Имитационная модель составления календарных расписаний //Научно-технические ведомости СПбПУ. Естественные и инженерные науки. 2006. №4(46). С. 325-331.
18. Goldberg D.E. Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning. – Addison-Wesley. 1989. – 432 pg.
19. Ahmad R., Bath P. A. The Use of Cox Regression and Genetic Algorithm (CoRGA) for Identifying Risk Factors for Mortality in Older People. // Health Informatics Journal. 2004. vol. 10. pp. 221-236.

Рекомендуемая литература к разделам 3.1. – 3.9.

1. *Аркин П.А.* Исследование операций: учебное пособие / П.А. Аркин, К.А. Соловейчик, К.Г. Аркина. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2016.

2. *Бородин А.Н.* Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики / А.Н. Бородин. – СПб: Издательство «Лань», 2011.

3. *Виленкин Н.Я.* Комбинаторика / Н.Я. Виленкин, А.Н. Виленкин, П.А. Виленкин. - М: ФИМА, МЦНМО, 2006.

4. *Венцель Е.С.* Теория вероятностей / Е.С. Венцель – М: ФМЛ, 1962.

5. *Гмурман В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман. – М: Высшая Школа, 2002.

6. *Гмурман В.Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В.Е. Гмурман. – М: Высшая Школа, 2002.

7. *Звягинцева Т.Е.* Введение в теорию вероятностей: Учебное пособие / Т.Е. Звягинцева. – СПб: Изд-во Высшей Административной школы, 2003.

8. *Чурилова М.Ю.* Математика. Часть 3: Теория вероятностей: Учебное пособие / под редакцией Г.Г. Хамова / М.Ю.Чурилова, Т.А.Семенова, Е.Г. Копосова, Г.А. Атоян, Г.Г. Хамов. – СПб: Изд-во РГПУ им. А.И.Герцена, 2011.

Рекомендуемая литература к разделу 3.10.

1. Бирюков В.В. Организационно – экономические изменения и технологическое перевооружение российской промышленности // Вестник СибАДИ. 2014. №5(39). С. 97-105.
2. Бражников М.А., Сафронов Е.Г., Бабкин А.В. О стратегии технического перевооружения машиностроительного комплекса в условиях импортозамещения // Экономическое возрождение России. 2017. №2(52). С.114-120.
3. Старцев Ю.Н. Результативность производства и компетенции персонала при технико-технологическом перевооружении предприятия // Вестник Челябинского государственного университета. 2015. №18(373). С.176-181.
4. Беляков Г.П., Еремеев Д.В. Исследование содержания понятий: техническое перевооружение, техническое переоснащение, модернизация // Вестник СибГУ им. М. Ф. Решетнева. 2011. № 3(49). С. 177-182.

5. Слуцкий В.А., Тетерин Д.Е. Техническое перевооружение – назревшая проблема российской промышленности. Часть 1 // Вестник химической промышленности. 2014. №6(81). С.41-45.
6. Пестов С.Б. Аспекты финансирования государственных капитальных вложений // Финансы: теория и практика. 2015. №5(89). С.80-86.
7. Беркович М.И., Пуцилло А.Д. Обоснование выбора поставщика полиграфического предприятия // Научный альманах. 2016. № 3. С. 53-57.
8. Будяков А.Н., Гетманов К.Г., Матвеев М.Г. Решение задачи выбора ресурсов и их поставщиков в условиях противоречивости технических и коммерческих требований. // Вестник ВГУ, серия: системный анализ и информационные технологии. 2017. №2. С.66-71.
9. Иванова М.И. Факторная модель обоснования выбора поставщика при формировании логистики поставок. // Вектор науки ТГУ. 2013. №4. С.100-104.
10. Куимова Е.И., Логанина В.И., Учаева Т.В. Применение теории нечетких множеств для выбора поставщика. // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. 2013. №4/4(64). С.68-70.
11. Лещинский Б.С., Конкина Ю.А. Выбор поставщика в условиях разнотипности данных с использованием методов теории нечетких множеств. // Вестник ТГУ. 2008. №2(3). С.44-51.
12. Козин М.Н. Интегральная модель выбора поставщика государственного оборонного заказа с учетом фактора риска. // Финансы и кредит. 2006. №29(233). С.75-81.
13. Юдилевич П.А. Вопрос выбора поставщика как ключевая проблема закупочной логистики // Современная экономика: проблемы и решения. 2011. № 12. С. 111-118.
14. Митрофанов А.Д. Методические подходы к выбору поставщиков в

процессе реализации инвестиционного проекта // Казанский экономический вестник. 2014. №5(13). С.125-130.

15. Никоненко А.Н. Методы и критерии выбора поставщиков // WORLD SCIENCE:PROBLEMS AND INNOVATIONS. Сборник статей победителей VI международной научно-практической конференции: в 2 частях. Часть 2. Пенза, «Наука и Просвещение». 2016. С. 60-62.
16. Остапенко С.Н., Федосеева Н.Ю. Модернизация и техническое перевооружение предприятий. М.: Инфра – М, 2010. 80 с.
17. Примакин А.И., Большакова Л.В. Метод экспертных оценок в решении задач обеспечения экономической безопасности хозяйствующего субъекта // Вестник Санкт-Петербургского университета МВД России. 2012. №1(53). С.191-200.
18. Овчинникова Т.И., Погонина Е.М. Метод экспертных оценок при подготовке предприятия к инновационной деятельности с учетом финансовой устойчивости // Энергия XXI век. 2015. №2(90). С. 127-138.
19. Курзаева Л.В., Овчинникова И.Г., Чичиланова С.А. К вопросу о совершенствовании методики оценки эффективности решения задач управления качеством образования на основе экспертной информации // Фундаментальные исследования. 2015. №6. С.473-478.
20. Постников В.М., Спиридонов С.Б. Методы выбора весовых коэффициентов локальных критериев // Наука и Образование МГТУ им. Н.Э Баумана. 2015. №. 6. С. 267-287.