

Содержание

Введение.....	5
Раздел 1: Нелинейное программирование. Задачи оптимизации	
1.1. Постановка задачи оптимизации.....	10
1.2. Классификация критериев оптимальности.....	19
1.3. Классификация задач оптимизации.....	27
1.4. Одномерная задача оптимизации.....	31
1.5. Многомерная задача безусловной оптимизации.....	33
1.6. Задача выпуклого программирования.....	35
1.7. Задача нелинейного программирования с ограничениями типа равенств.....	39
1.8. Теорема Куна-Таккера для задачи нелинейного программирования с ограничениями типа неравенств.....	44
1.9. Теорема Куна-Таккера для общей задачи нелинейного программирования.....	49
1.10. Аналитическое решение многомерных задач нелинейного программирования.....	51
1.11. Классификация методов решения задач оптимизации.....	58
Раздел 2: Нелинейное программирование. Безусловная одномерная оптимизация	
2.1. Алгоритм равномерного поиска.....	62
2.2. Алгоритм деления пополам.....	65
2.3. Алгоритм Фибоначчи.....	67
2.4. Алгоритм золотого сечения.....	75
2.5. Метод хорд (метод секущих).....	79
2.6. Метод касательных (метод Ньютона).....	82
2.7. Метод перебора.....	84
2.8. Одномерный метод Монте-Карло.....	86
2.9. Метод выделения интервалов унимодальности.....	87
2.10. Метод аппроксимирующих моделей.....	91
Раздел 3: Нелинейное программирование. Безусловная многомерная оптимизация	

3.1. Метод Гаусса-Зейделя.....	95
3.2. Метод Хука-Дживса.....	101
3.3. Метод Розенброка.....	105
3.4. Метод сопряженных направлений	109
3.5. Симплекс-метод.....	114
3.6. Метод деформируемого многогранника (Нелдера-Мида).....	122
3.7. Метод наискорейшего спуска. Метод дробления шага.....	131
3.8. Метод оптимизации Ньютона.....	140
3.9. Метод с возвратом при неудачном шаге. Метод наилучшей пробы...	145
3.10. Метод комплексов.....	149
3.11. Метод повторяющегося случайного поиска.....	156
3.12. Метод случайного поиска с постоянным радиусом поиска и случайными направлениями.....	160

Раздел 4: Нелинейное программирование. Многомерная условная оптимизация

4.1. Методы последовательной безусловной оптимизации.....	164
4.2. Метод скользящего допуска.....	171
4.3. Модифицированный метод комплексов.....	179
4.4. Метод линейной аппроксимации.....	187
4.5. Метод проекции градиента.....	193
4.6. Метод сведения к совокупности вложенных задач глобальной одномерной минимизации.....	198
4.7. Метод сведения к задаче одномерной глобальной оптимизации с помощью развертки Пеано.....	203
4.8. Метод Монте-Карло.....	211
Список литературы.....	213

Введение

При решении конкретной задачи оптимизации при изучении дисциплины «Оптимизация процессов управления наукоемкими производствами» студент прежде всего должен выбрать математический метод, который приводил бы к конечным результатам с наименьшими затратами на вычисления или же давал возможность получить наибольший объем информации об искомом решении. Выбор того или иного метода в значительной степени определяется постановкой задачи, а также используемой математической моделью. Нельзя рекомендовать какой-либо один метод, который можно использовать для решения всех без исключения задач, возникающих на практике. Одни методы в этом отношении являются более, а другие - менее общими. Целую группу методов на определенных этапах решения задачи можно применять в сочетании с другими методами. Некоторые методы специально разработаны или наилучшим образом подходят для решения оптимальных задач с математическими моделями определенного вида.

Так, математический аппарат линейного программирования, специально создан для решения задач с линейными критериями оптимальности и линейными ограничениями на переменные и позволяет решать большинство задач, сформулированных в такой постановке.

Пожалуй, наилучшим путем при выборе способа решения, наиболее пригодного для соответствующей задачи, следует признать исследование возможностей и опыта применения различных методов оптимизации. Дадим краткую характеристику рассматриваемых в учебном пособии методов и областей их применения, что до некоторой степени может облегчить выбор того или иного метода для решения конкретной задачи.

Нелинейное программирование применяют для решения оптимальных задач с нелинейными функциями цели. На независимые переменные могут быть наложены ограничения также в виде нелинейных

соотношений, имеющих вид равенств или неравенств. Общих способов решения задач нелинейного программирования не существует, способ решения выбирается в каждом конкретном случае в зависимости от вида целевой функции и накладываемых на элементы решения ограничений. В отличие от задач линейного программирования, методы решения которых хорошо отлажены, устоялись и не представляют существенных сложностей, задачи нелинейного программирования принадлежат к трудным вычислительным задачам. Названием **методы нелинейного программирования** объединяется большая группа численных методов, многие из которых приспособлены для решения оптимальных задач соответствующего класса. Выбор того или иного метода обусловлен сложностью вычисления критерия оптимальности и сложностью ограничивающих условий, необходимой точностью решения, мощностью имеющейся вычислительной машины и т.д.

Все известные численные методы отыскания экстремума нелинейных функций в зависимости от используемой информации для получения следующей точки можно разделить на три основные группы:

- прямые методы, использующие только текущие значения оптимизируемой функции;
- методы первого порядка, использующие дополнительно и значения первой производной функции;
- методы второго порядка, требующие знания и второй производной оптимизируемой функции.

Задачи нелинейного программирования можно разделить на две группы: задачи, в которых на независимые переменные накладываются некоторые ограничения, решаются с помощью методов **условной оптимизации**; задачи, в которых поиск максимума или минимума нелинейной целевой функции не содержит дополнительных ограничений, решаются с помощью методов **безусловной оптимизации**. В области нелинейного программирования с ограничениями (*условная оптимизация*) методы решения

задач менее разработаны по сравнению с областью нелинейного программирования без ограничений (**безусловная оптимизация**). Здесь встречаются большие трудности по той причине, что искомое решение должно подчиняться дополнительным требованиям, выраженных в виде ограничений. Многие алгоритмы решения задачи с ограничениями предполагают сведение ее к последовательности задач безусловной оптимизации. Другой класс методов основан на поиске подходящего направления и последующей минимизации вдоль этого направления. Обоснование методов безусловной оптимизации может быть естественным образом распространено на обоснование процедур решения задач с ограничениями.

В свою очередь методы безусловной оптимизации делятся на методы **одномерной** и **многомерной** оптимизации. Несмотря на то, что безусловная оптимизация функции одной переменной - наиболее простой тип задач, она занимает центральное место, как с теоретической, так и с практической точек зрения. Это связано с тем, что задачи однопараметрической оптимизации достаточно часто встречаются в инженерной практике и, кроме того, находят свое применение при реализации более сложных итеративных процедур многопараметрической оптимизации.

Теория игр - раздел математики для изучения конфликтных ситуаций. Это значит, что с помощью теории игр можно выработать оптимальные правила поведения каждой стороны, участвующей в решении конфликтной ситуации.

На практике часто появляется необходимость согласования действия фирм, объединении, министерств и других участников проектов в случаях, когда их интересы не совпадают. В таких ситуациях **теория игр** позволяет найти лучшее решение для поведения участников, обязанных согласовывать действия при столкновении интересов. Теория игр все шире проникает в практику экономических решений и исследований. Ее можно рассматривать как инструмент, помогающий повысить эффективность плановых и

управленческих решений. Это имеет большое значение при решении задач в промышленности, сельском хозяйстве, на транспорте, в торговле, особенно при заключении договоров с иностранными государствами на любых иерархических уровнях. Так, можно определить научно обоснованные уровни снижения розничных цен и оптимальный уровень товарных запасов, решать задачи экскурсионного обслуживания и выбора новых линий городского транспорта, задачу планирования порядка организации эксплуатации месторождений полезных ископаемых в стране и др.

В экономике, например, оказался недостаточным аппарат математического анализа, занимающийся определением экстремумов функций. Появилась необходимость изучения так называемых оптимальных минимаксных и максиминных решений. Следовательно, **теорию игр** можно рассматривать как новый раздел оптимизационного подхода, позволяющего решать новые задачи при принятии решений.

Любая сфера человеческой деятельности связана с принятием решений в условиях неполноты информации. Источники неопределенности могут быть самые разнообразные: нестабильность экономической и/или политической ситуации, неопределенность действий партнеров по бизнесу, случайные факторы, т.е. большое число обстоятельств, учесть которые не представляется возможным (например, погодные условия, неопределенность спроса на товары, неабсолютная надежность процессов производства, неточность информации и др.). Решения с учетом перечисленных и множества других неопределенных факторов возможно принимать в рамках так называемой **теории игр** - аналитического подхода к выбору наилучшего действия (альтернативы) или последовательности действий. В зависимости от степени определенности возможных исходов или последствий различных действий, с которыми сталкивается лицо, принимающее решение (ЛПР), в теории принятия решений рассматриваются три типа моделей:

- выбор решений в условиях определенности, если относительно каждого действия известно, что оно неизменно приводит к некоторому конкретному исходу;
- выбор решения при риске, если каждое действие приводит к одному из множества возможных частных исходов, причем каждый исход имеет вычисляемую или экспертно оцениваемую вероятность появления. Предполагается, что ЛПР эти вероятности известны или их можно определить путем экспертных оценок;
- выбор решений при неопределенности, когда то или иное действие или несколько действий имеют своим следствием множество частных исходов, но их вероятности совершенно не известны или не имеют смысла.

Разделы 1-4 данного пособия посвящены нелинейному программированию. В разделах 2 и 3 рассмотрены методы безусловной оптимизации нелинейного программирования. В разделе 2 приведены поисковые методы одномерной оптимизации без ограничений. Рассмотренные в параграфах 2.7-2.10 методы относятся к поиску глобального минимума одномерных многоэкстремальных функций. В разделе 3 изложены методы многомерной безусловной оптимизации: в параграфах 3.1-3.6 – прямые методы; 3.7-3.8 – методы первого и второго порядка; и, наконец, в параграфах 3.9-3.12 – методы случайного поиска. Далее, в разделе 4: параграфы 4.1-4.5 посвящены методам локальной, а 4.6-4.8 – глобальной многомерной условной оптимизации.

Пятый раздел данного пособия отведен под **теорию игр**. Представлены следующие классы теоретико-игровых моделей: антагонистические игры, биматричные игры, игры с природой.

Раздел 1. Нелинейное программирование. Задачи оптимизации

1.1. Математическая формулировка задачи оптимизации

Проектирование технических объектов всегда включает в себя элементы оптимизации – стремление получить наилучший вариант среди возможных вариантов. Это стремление реализуется перебором вариантов структуры объекта (структурный синтез) и варьированием значений параметров объекта при заданной структуре (параметрическая оптимизация или просто оптимизация).

Внутренние параметры объекта проектирования обозначим n -мерным вектором $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, выходные параметры – m -мерным вектором $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$, а внешние параметры (параметры окружающей среды) – l -мерным вектором $Q = (q_1, q_2, \dots, q_l)$.

Таким образом, в самом общем виде **модель объекта проектирования** можно задать в следующем виде:

$$Y = F(X, Q),$$

где F – некоторая вектор-функция, которая может задаваться различными способами: с помощью формул, графиков, таблиц, алгоритмов вычисления и т.д.

Если внешние параметры Q известны и фиксированы, то $Y = F(X)$.

Такая модель называется **детерминированной моделью объекта проектирования** (в том смысле, что значения Y однозначно определяются значениями X).

Модель, в которой внешние параметры Q являются случайными величинами, называется **стохастической моделью объекта проектирования** или вероятностной моделью объекта проектирования. Варьируемые при оптимизации параметры называются **управляемыми параметрами** (варьируемыми параметрами) или переменными.

Будем их также обозначать вектором X и называть **вектором управляемых параметров** (вектором варьируемых параметров) или переменных. Важно понимать, что в этот вектор не обязательно включаются все внутренние параметры объекта проектирования.

Требования к проектируемому объекту обычно можно сформулировать в виде системы неравенств:

$$x_i^- \leq x_i \leq x_i^+, \quad i \in [1, \dots, n] \quad (1.1.1)$$

$$y_j^- \leq y_j \leq y_j^+, \quad j \in [1, \dots, m] \quad (1.1.2)$$

Здесь x_i^- , x_i^+ - значения i -й управляемой переменной, определяющие область ее возможных значений, y_j^- , y_j^+ - предельные допустимые значения выходного параметра Y_j .

Поскольку существует функциональная связь, ограничения (1.1.2) эквивалентны системе

$$\{g_j(X), j \in [1, \dots, m]\} = g(X) \geq 0, \quad (1.1.3)$$

где $g(X)$ - m -мерная вектор-функция. Заметим, что в виде (1.1.3) можно записать и ограничения типа равенств $g(X) = 0$ путем замены их парой

неравенств:
$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ -g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Одной из особенностей задач проектирования является то, что в систему ограничений (1.1.3) могут входить функции, зависящие от одной из компонент вектора Q - некоторого параметра q , заданного на интервале $[q_{\min}, q_{\max}]$. Таким параметром может быть время, частота, температура и т.п. В этом случае

$$g(X, q) \geq 0, \quad [q_{\min}, q_{\max}] \quad (1.1.4)$$

Для перехода от (1.1.4) к (1.1.3) можно использовать: 1) сеточный метод, 2) принцип гарантированного результата.

Идея сеточного метода основана на дискретизации интервала $[q_{\min}, q_{\max}]$ и рассмотрении функции $g(X, q)$ на дискретной совокупности точек (см. рис. 1.1.1).

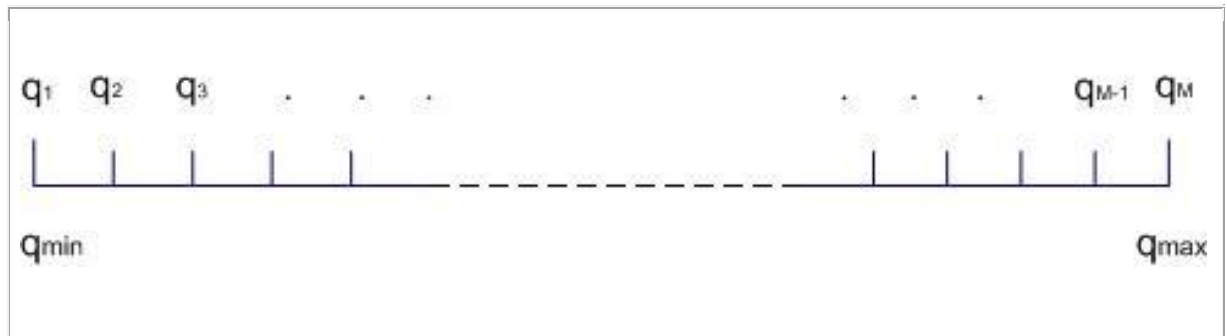


Рис. 1.1.1. Дискретизация интервала $[q_{\min}, q_{\max}]$

При этом выполнение ограничений (1.1.4) сводится к требованию выполнения системы из M неравенств:

$$g(X, q_i) \geq 0, i = 1, 2, \dots, M. \quad (1.1.5)$$

Недостатки подхода: трудно обоснованно выбрать число M ; вместо одного неравенства (1.1.4) приходится рассматривать систему из M неравенств (1.1.5).

Принцип гарантированного результата состоит в том, что ограничения (1.1.4) проверяются для наиболее неблагоприятного значения параметра $q^* \in [q_{\min}, q_{\max}]$: $g(X, q^*) = \min_{q \in [q_{\min}, q_{\max}]} g(X, q)$.

Недостатки подхода: в общем случае $q^* = q^*(X)$ и отыскание q^* является самостоятельной проблемой.

Далее будем полагать, что ограничения на параметр q , заданные на интервале $[q_{\min}, q_{\max}]$, с помощью сеточного метода или принципа гарантированного результата сведены к системе неравенств (1.1.3). Тогда условие (1.1.3) определяет множество допустимых значений вектора X :

$$D_g = \{X / g(X) \geq 0\}.$$

Ограничения (1.1.1) определяют следующее множество допустимых значений вектора X : $D_X = \left\{ x / x_i^- \leq x_i \leq x_i^+, i \in [1, \dots, n] \right\}$.

Множество, полученное пересечением множеств D_g и D_X , будем называть **множеством допустимых значений вектора управляемых параметров X** , т.е. $D = D_g \cap D_X$.

Любой вектор управляемых переменных $X \in D$ называется **допустимым вектором управляемых параметров**.

Если вектор $X \in D$, то будем такой вектор называть также точкой множества D .

Если не оговорено противное, множество допустимых значений вектора варьируемых параметров D является ограниченным и замкнутым (компактным).

Чаще всего ограничения (1.1.1) – (1.1.2) записывают единообразно - в виде ограничений вида $g(X) \geq 0$. Будем называть такие ограничения ограничениями типа неравенств, а функции $g(X)$ - **ограничивающими функциями**.

Если на вектор варьируемых параметров наложены только ограничения типа неравенств, то множество допустимых значений вектора варьируемых параметров определяется следующим образом:

$$D = \{ X / g(X) \geq 0 \} = \{ X / g_i(X) \geq 0, i \in [1, \dots, m] \}. \quad (1.1.6)$$

На вектор варьируемых параметров могут быть наложены, как отмечалось, также ограничения типа равенств. Эти ограничения можно либо сведены к ограничениям типа неравенств, либо выделить в отдельную группу ограничений. В последнем случае множество допустимых значений вектора варьируемых параметров определяется следующим образом:

$$D = \{ X / g(X) \geq 0, h(X) = 0 \} = \{ X / g_i(X) \geq 0, h_j(X) = 0, i \in [1, \dots, m], j \in [1, \dots, l] \}$$

Функции $h(X)$, с помощью которых задаются ограничения типа равенств, также будем называть ограничивающими функциями.

Широкий класс методов оптимизации ориентирован на решение задач оптимизации, у которых множество допустимых значений вектора варьируемых параметров является выпуклым множеством.

Множество допустимых значений вектора варьируемых параметров D называется **выпуклым множеством допустимых значений вектора варьируемых параметров**, если для любых точек $X_1, X_2 \in D$ и для любого $\lambda \in [0,1]$ выполняется соотношение $\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2 \in D$.

Например, на рис. 1.1.2, который иллюстрирует двумерный случай ($n=2$), все точки отрезка $[X_1, X_2]$ принадлежат множеству D и поэтому это множество выпукло.

В противном случае множество допустимых значений D называется не выпуклым множеством допустимых значений вектора варьируемых параметров. Например, на рис.1.1.3 часть $[A,B]$ отрезка $[X_1, X_2]$ не принадлежат множеству D , которое поэтому не является выпуклым.

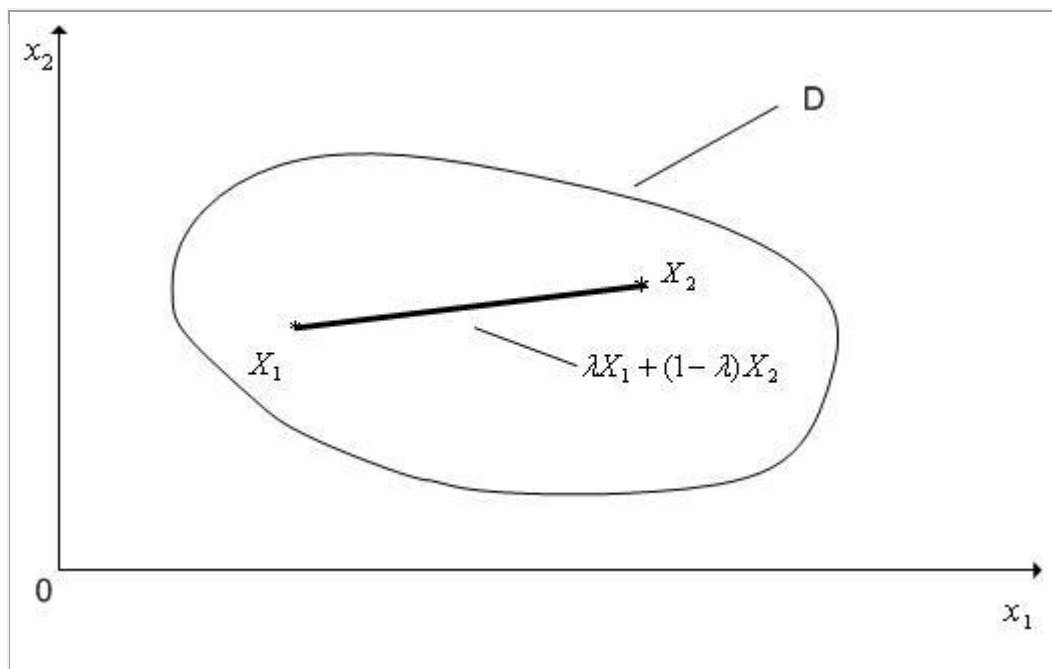


Рис. 1.1.2. К определению выпуклого множества ($n=2$)

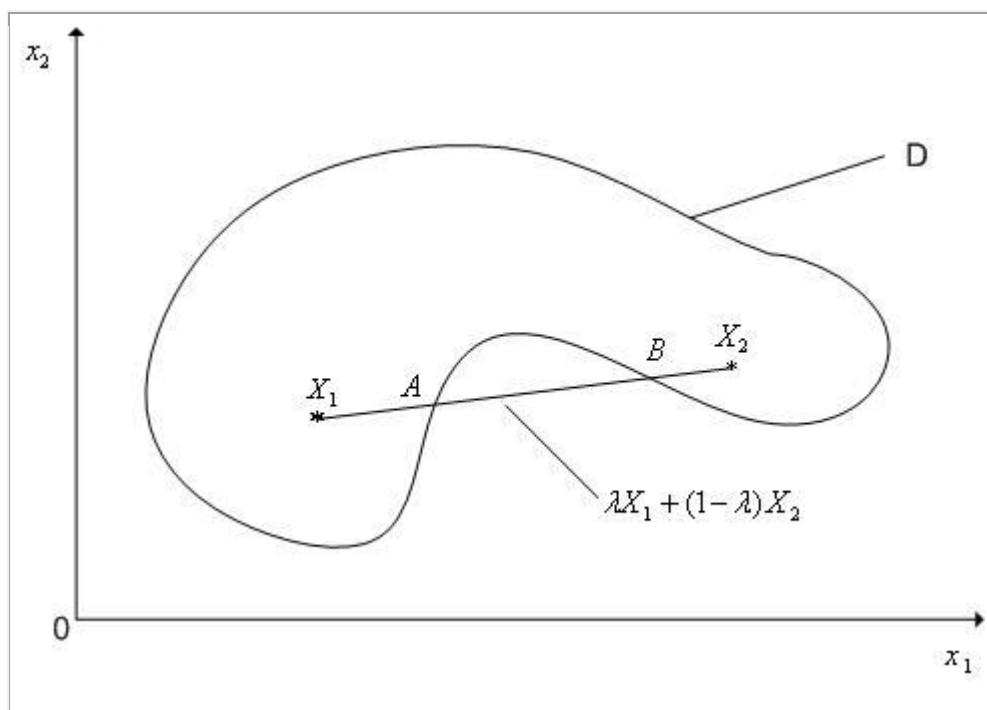


Рис. 1.1.3. Пример не выпуклого множества ($n=2$)

Множество $L(X_1, X_2) = \{X / X = \lambda X_1 + (1-\lambda)X_2 \in D, \lambda \in [0,1]\}$ будем называть отрезком с концами X_1, X_2 и обозначать $[X_1, X_2]$.

На основе введенного понятия, можно дать другое определение выпуклого множества D . Множество допустимых значений вектора варьируемых параметров D называется выпуклым множеством, если оно наряду с любыми точками $X_1, X_2 \in D$ содержит в себе также отрезок $[X_1, X_2]$.

Под решением задачи понимается процесс выбора переменных $X \in D$, обеспечивающих оптимальное значение некоторой функции $\Phi(X)$. Эта величина, показывающая относительное предпочтение одних значений компонент вектора X по отношению к другим значениям этих компонент, называется **критерием оптимальности** (функцией цели, критерием эффективности, функцией полезности и т.д.).

В зависимости от цели проектирования необходимо либо максимизировать, либо минимизировать критерий оптимальности. Будем полагать, что требуется минимизировать критерий оптимальности.

Детерминированная задача оптимизации формулируется следующим образом:

$$\min_{X \in D} \Phi(X) = \Phi(X^*) = \Phi^*, \quad (1.1.7)$$

где X^* - оптимальное значение вектора варьируемых параметров (переменных), $\Phi(X^*) = \Phi^*$ - наименьшее, т.е. оптимальное значение критерия оптимальности $\Phi(X)$.

Задача оптимизации, в которой критерий оптимальности $\Phi(X)$ и/или ограничивающие функции $g(X)$ зависят от случайного вектора внешних параметров Q , называется **стохастической задачей оптимизации**.

Заметим, что задача максимизации критерия оптимальности $\Phi(X)$ сводится к задаче минимизации критерия $(-\Phi(X))$:

$$\max_{X \in D} \Phi(X) = \min_{X \in D} (-\Phi(X)).$$

Если не оговорено противное, функция $\Phi(X)$ в своей области допустимых значений D определена, непрерывна и, за исключением, быть может отдельных точек, имеет в этой области конечные частные производные.

Из курса математического анализа известна следующая теорема.

Теорема 1.1.1. (теорема Вейерштрасса). Если функция $\Phi(X)$ определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области D , то она достигает в этой области своего наименьшего и наибольшего значений.

Таким образом, детерминированная задача оптимизации (1.1.7) имеет решение.

Если случайный вектор внешних параметров Q не входит в критерий оптимальности $\Phi(X)$, то этот критерий называется **детерминированным критерием оптимальности**. Если критерий оптимальности имеет вид

$\Phi(X, Q)$, где Q – случайный вектор внешних параметров, то этот критерий называется **стохастическим критерием оптимальности**.

Дадим определения некоторых свойств функций.

Точка X^* называется **точкой локального минимума** функции $\Phi(X)$, если для всех точек X , принадлежащих некоторой малой окрестности $d(X)$ точки X^* имеем $\Phi(X^*) \leq \Phi(X), X \in d(X^*) \in D$.

Значение функции $\Phi(X)$ в точке локального минимума называется **локальным минимумом** функции $\Phi(X)$.

Таким образом, если точка X^* является точкой локального минимума функции $\Phi(X)$, то величина $\Phi(X^*)$ есть **локальный минимум** этой функции.

Точка X^* называется **точкой глобального минимума** функции $\Phi(X)$, если $\Phi(X^*) \leq \Phi(X), X \in D$.

Таким образом, точка наименьшего из всех локальных минимумов называется **точкой глобального минимума** функции $\Phi(X)$.

Соответствующее значение функции $\Phi(X)$ называется **глобальным минимумом** этой функции.

Например, на рис. 1.1.4, который иллюстрирует одномерный случай ($n=1$) x_1^*, x_2^*, x_3^* - точки локального минимума функции $\Phi(X)$, а величины $\Phi_1^*, \Phi_2^*, \Phi_3^*$ - соответствующие локальные минимумы этой функции, x_3^* - точка глобального минимума функции $\Phi(X)$, а Φ_3^* - глобальный минимум этой функции.

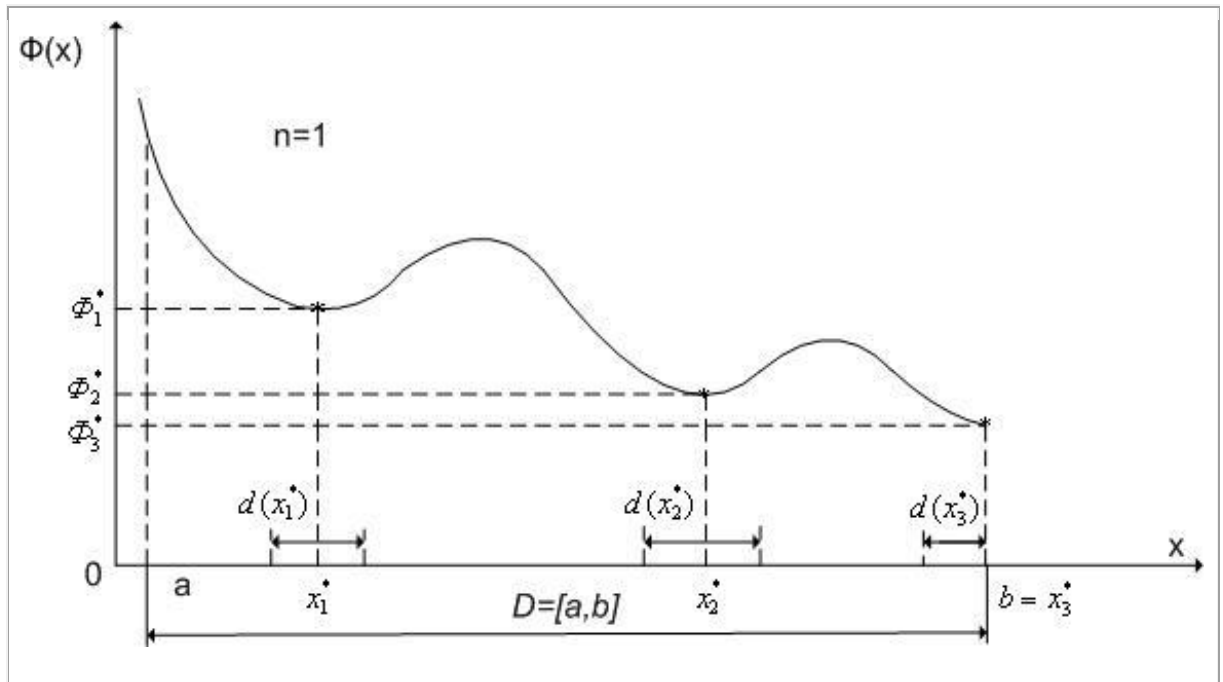


Рис. 1.1.4. К определению локального и глобального минимумов функции

1.2. Классификация критериев оптимальности

Критерий оптимальности $\Phi(X)$, где $x \in [a, b]$ скаляр, называется **унимодальным критерием оптимальности**, если в области определения $[a, b]$ функции $\Phi(X)$ существует точка $x^* \in [a, b]$ такая, что на полуинтервале $[a, x^*)$ функция $\Phi(X)$ убывает, а на полуинтервале $(x^*, b]$ - возрастает. Заметим, что определение одномерного унимодального критерия оптимальности не требует непрерывности функции $\Phi(X)$.

Например, на рис.1.2.1 одномерная функция $\Phi(X)$ на интервале $[a, b]$ является унимодальной, хотя и имеет в точках x_1, x_2 разрывы. Заметим также, что точка x^* может быть как внутренней точкой отрезка $[a, b]$, так и совпадать с одним из его концов.

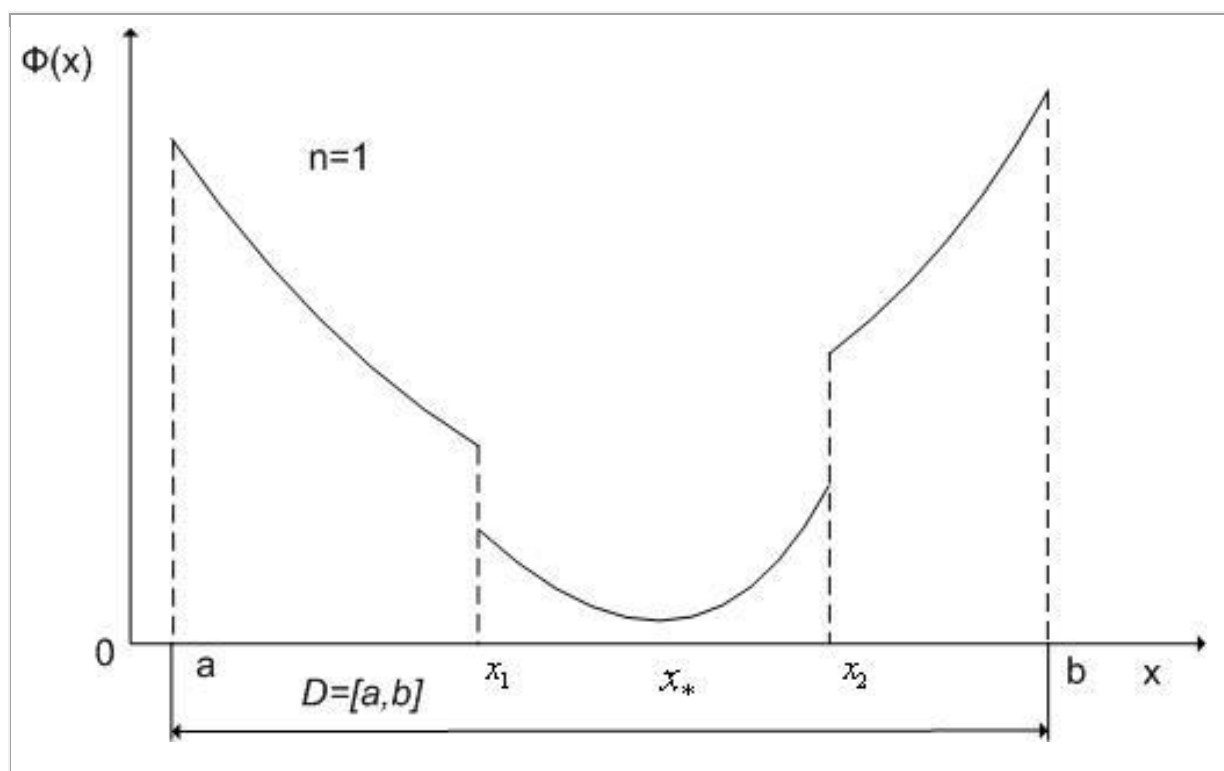


Рис. 1.2.1. К определению унимодального критерия оптимальности: x_1, x_2 - точки разрыва критерия оптимальности $\Phi(X)$

Непрерывный в своей области определения одномерный критерий оптимальности $\Phi(X)$, $x \in [a, b]$ называется **выпуклым критерием оптимальности** (выпуклым вниз критерием оптимальности), если для любых точек $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 \neq x_2$ выполняется неравенство

$$\Phi(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda \Phi(x_1) + (1-\lambda)\Phi(x_2), \quad (1.2.1)$$

где произвольное число $\lambda \in [0, 1]$.

Приведенное определение имеет простой геометрический смысл: если критерий оптимальности $\Phi(X)$ выпукл на интервале $[a, b]$, то все точки любой дуги его графика лежат под соответствующей хордой (см. рис. 1.2.2).

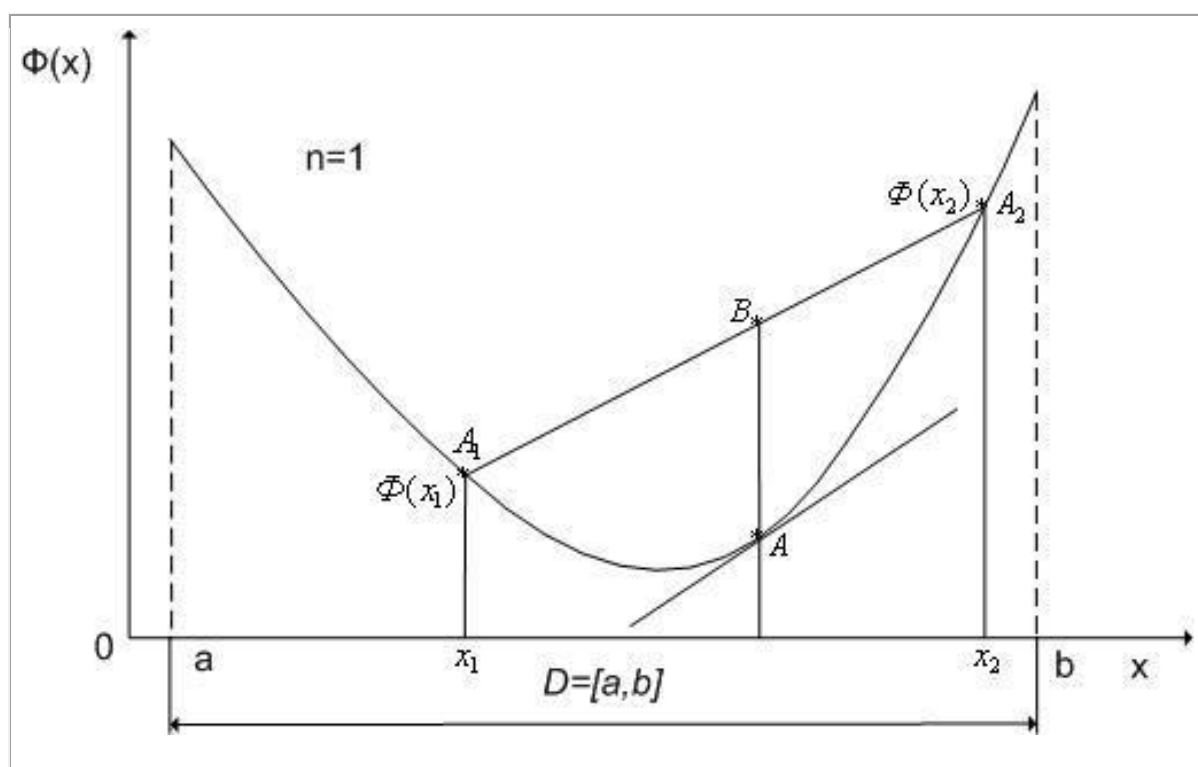


Рис. 1.2.2. К определению выпуклого одномерного критерия оптимальности

Заметим, что определение выпуклого критерия оптимальности не требует его унимодальности. Так что, например, выпуклым является критерий оптимальности, график которого изображен на рис. 1.2.3.

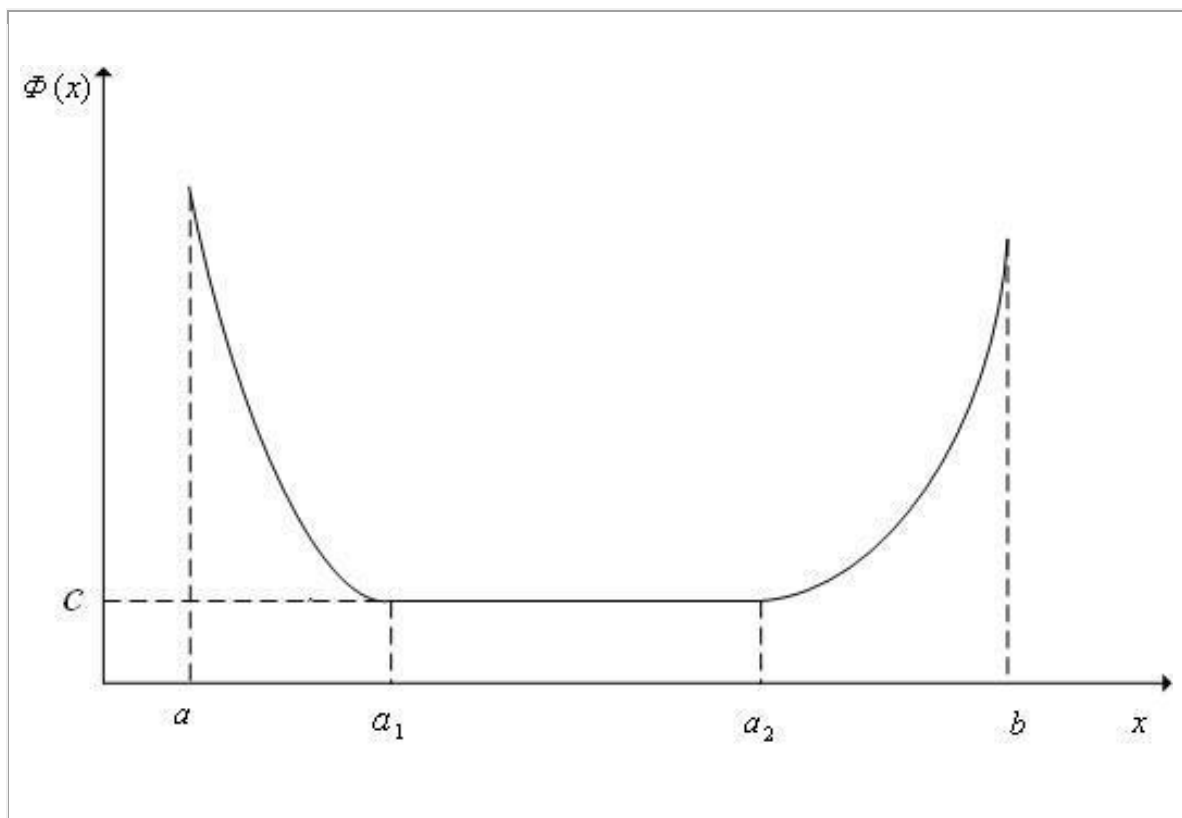


Рис. 1.2.3. Пример выпуклого критерия оптимальности: на интервале $[a_1, a_2]$ значения критерия оптимальности постоянны и равны c .

Непрерывный в своей области определения одномерный критерий оптимальности $\Phi(X)$, $x \in [a, b]$ называется **строго выпуклым критерием оптимальности** (строго выпуклым вниз критерием оптимальности), если для любых точек $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 \neq x_2$ выполняется неравенство

$$\Phi(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda\Phi(x_1) + (1-\lambda)\Phi(x_2), \quad (1.2.2)$$

где произвольное число $\lambda \in [0, 1]$.

Замечание 1.2.1. Строго вогнутый критерий является унимодальным критерием.

Если множество D является выпуклым множеством, то в многомерном случае $n \geq 2$ также определено понятие выпуклого критерия оптимальности.

Непрерывный критерий оптимальности $\Phi(X)$, где $X \in D$ и множество D является выпуклым множеством, называется **выпуклым критерием оптимальности** (выпуклым вниз критерием оптимальности), если для любых $X_1, X_2 \in D$, $X_1 \neq X_2$ и любого $\lambda \in [0,1]$ выполняется неравенство

$$\Phi(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) \leq \lambda \Phi(X_1) + (1-\lambda)\Phi(X_2). \quad (1.2.3)$$

Аналогично, критерий оптимальности $\Phi(X)$, где $X \in D$ и множество D является выпуклым множеством, называется **строго выпуклым критерием оптимальности** (строго выпуклым вниз критерием оптимальности), если для любых $X_1, X_2 \in D$, $X_1 \neq X_2$ и $\lambda \in [0,1]$ выполняется неравенство

$$\Phi(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) < \lambda \Phi(X_1) + (1-\lambda)\Phi(X_2). \quad (1.2.4)$$

Замечание 1.2.2. Выпуклая функция может иметь более одной точки локального минимума, а строго выпуклая функция – только одну точку.

Например, рассмотрим выпуклую квадратичную функцию $\Phi(X) = \Phi(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^2$. Легко видеть, что эта функция достигает в точке $(0,0)$ минимума, равного нулю. Но это же значение функция принимает во всех точках вида $(x_1, x_2 = -x_1)$.

Критерий оптимальности $\Phi(X)$, имеющий в области определения несколько локальных минимумов, называется **многоэкстремальным критерием оптимальности** или **мультимодальным критерием оптимальности**.

Если размерность вектора варьируемых параметров X больше единицы ($n > 1$), то критерий оптимальности $\Phi(X)$ может быть в своей области допустимых значений D **"овражным" критерием оптимальности**.

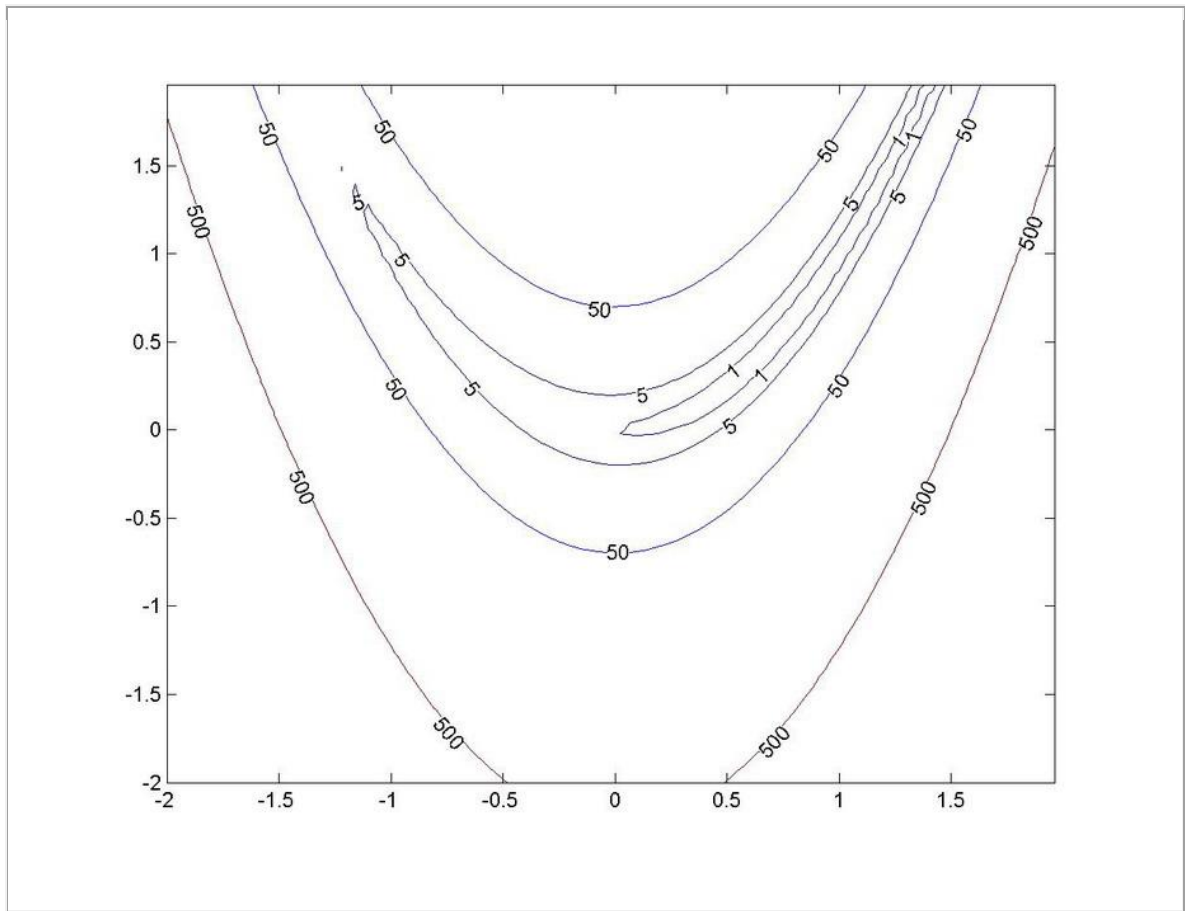


Рис. 1.2.4. Линии уровня функции Розенброка. Функция медленно изменяется вдоль дна V-образного оврага и быстро – перпендикулярно этому дну.

Критерий оптимальности называется **овражным** в своей области допустимых значений, если в этой области имеют место слабые изменения частных производных функции $\Phi(X)$ по одним направлениям и значительные изменения этих производных по другим направлениям.

Рассмотрим (см. рис. 1.2.4) функцию Розенброка $\Phi(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$ ($n = 2$). Легко видеть, что минимум этой функции достигается в точке $(0, 0)$ и равен нулю. Функция медленно изменяется вдоль дна V-образного оврага и быстро – перпендикулярно этому дну.

Критерий оптимальности $\Phi(X)$ называется **сепарабельным критерием оптимальности**, если функция $\Phi(X)$ является

сепарабельной, т.е. представляет собой сумму функций, каждая из которых зависит только от одной компоненты вектора X :

$$\Phi(X) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x_i). \quad (1.2.5)$$

Критерий оптимальности $\Phi(X)$ называется **позиномиальным критерием оптимальности**, если функция $\Phi(X)$ есть **позином**, т.е. если

$$\Phi(X) = \sum_{i=1}^k c_i p_i(X), \quad (1.2.6)$$

где c_i и все компоненты вектора X – положительные действительные числа, а функции $p_i(X)$ имеют вид

$$p_i(X) = \prod_{j=1}^n x_j^{a_{ij}}, \quad (1.2.7)$$

a_{ij} - любые действительные числа.

Одномерный выпуклый критерий оптимальности.

Если функция $\Phi(X)$ является дифференцируемой, то можно сформулировать простые признаки ее выпуклости.

Теорема 1.2.1. Пусть критерий оптимальности $\Phi(X)$ определен и непрерывен на интервале $[a, b]$ и имеет в нем конечную первую производную $\Phi'(X)$. Для того, чтобы функция $\Phi(X)$ была выпуклой (строго выпуклой) на $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы ее производная $\Phi'(X)$ не убывала (не возрастала) на этом интервале.

Теорема 1.2.2. Пусть критерий оптимальности $\Phi(X)$ определен и непрерывен вместе со своей первой производной $\Phi'(X)$ на интервале $[a, b]$ и имеет в нем конечную вторую производную $\Phi''(X)$. Для выпуклости

функции $\Phi(X)$ на интервале $[a, b]$ необходимо и достаточно, чтобы **внутри** этого интервала имело место неравенство $\Phi''(X) > 0$.

Замечание 1.2.3. Условие $\Phi''(X) > 0$ не является необходимым для строгой выпуклости функции $\Phi(X)$.

Так функция $\Phi(X) = x^4$ является строго выпуклой на всей числовой оси, хотя в начале координат ее вторая производная равна нулю: $\Phi''(0) = 0$.

Укажем еще одну очевидную, но важную геометрическую характеристику выпуклого критерия оптимальности. Если критерий оптимальности $\Phi(X)$ определен на интервале $[a, b]$, имеет на этом интервале конечную первую производную $\Phi'(X)$ и выпукл, то график функции $\Phi(X)$ всеми своими точками лежит над или на любой своей касательной (см. рис.1.2.2).

Многомерный критерий оптимальности

Суть понятия вогнутого (строго вогнутого) критерия оптимальности в многомерном случае удобно определить с помощью сечения. Сечением критерия оптимальности $\Phi(X)$, $X \in D$, где D - выпуклое множество, называется одномерная функция

$$\varphi(\lambda) = \lambda\Phi(X_1) + (1-\lambda)\Phi(X_2), \quad (1.2.8)$$

где $\lambda \in [0, 1]$ - вещественный скаляр, а X_1, X_2 - любые точки множества D .

Теорема 1.2.3. Для того чтобы критерий оптимальности $\Phi(X)$, определенный на выпуклом множестве D , был выпуклым критерием (строго выпуклым критерием), необходимо и достаточно, чтобы любое сечение этого критерия было выпуклой функцией (строго выпуклой функцией).

Теорема 1.2.4. Если критерий оптимальности $\Phi(X)$, определенный на выпуклом множестве $D \subset R^n$, является дважды дифференцируемым на этом

множестве, то необходимым и достаточным условием его выпуклости является неотрицательная определенность на этом множестве матрицы вторых производных функции $\Phi(X)$ – **матрицы Гессе** (гессиана):

$$H(X) = \frac{\partial^2 \Phi(X)}{\partial x_i \cdot \partial x_j}, \quad i, j \in [1, \dots, n]. \quad (1.2.9)$$

Замечание 1.2.4. Симметричная $(n \times n)$ матрица A называется неотрицательно определенной, если квадратичная форма $X^T A X = (A X, X)$ для любых векторов $X \in R^n$ принимает неотрицательные значения. Если матрица A неотрицательно определена, то ее собственные числа являются неотрицательными. Для проверки неотрицательной определенности матрицы удобно использовать **критерий Сильвестра**: если все главные миноры матрицы A неотрицательны, то матрица A неотрицательно определена.

По аналогии с одномерным случаем, положительная определенность матрицы Гессе не является достаточным условием строгой выпуклости функции $\Phi(X)$. Так функция $\Phi(X) = x_1^4 + x_2^4$ строго выпукла в пространстве R^2 , но ее матрица Гессе в точке $(0,0)$ является нулевой:

$$H(0,0) = 0.$$

Наряду с матрицей Гессе нам далее потребуется n -мерный вектор градиента функции $\Phi(X)$:

$$\nabla \Phi(X) = \frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_i}, \quad i \in [1, \dots, n]. \quad (1.2.10)$$

1.3. Классификация задач оптимизации

Рассмотрим задачу оптимизации

$$\min_{X \in D} \Phi(X) = \Phi(X^*) = \Phi^*, \quad (1.3.1)$$

где область допустимых значений $D \subset R^n$,

$$D = \{X / g(X) \geq 0, h(X) = 0\} = \{X / g_i(X) \geq 0, h_j(X) = 0, i \in [1, \dots, m], j \in [1, \dots, l]\} \quad (1.3.2)$$

Классификация задачи возможна по многим признакам. Рассмотрим основные из этих признаков.

Классификация по виду критерия оптимальности и ограничивающих функций.

Если критерий оптимальности $\Phi(X)$ – линейная функция, а множество D – выпуклый многогранник, то задача (1.3.1), (1.3.2) называется **задачей линейного программирования**.

Если критерий оптимальности $\Phi(X)$ – есть отношение двух линейных функций, а множество D – выпуклый многогранник, задача (1.3.1), (1.3.2) называется **задачей дробно-линейного программирования**.

Пусть область D определяется только ограничениями типа неравенств:

$$D = \{X / g(X) \geq 0\} = \{X / g_i(X) \geq 0, i \in [1, \dots, m]\} \quad (1.3.3)$$

Тогда если функция $\Phi(X)$ и функции $g_i(X), i \in [1, \dots, m]$ являются сепарабельными, то задача (1.3.1), (1.3.3) называется **задачей сепарабельного программирования**.

Тогда если функция $\Phi(X)$ и ограничивающие функции $g_i(X), i \in [1, \dots, m]$ являются позиномами, то задача (1.3.1), (1.3.3) называется **задачей геометрического программирования**.

Если $\Phi(X)$ – квадратичная функция, т.е. $\Phi(X) = X^T G X + C^T X$, а множество D есть выпуклое множество, то задача (1.3.1), (1.3.2) называется

задачей квадратичного программирования. Здесь G - $(n \times n)$ симметричная матрица, C - $(n \times 1)$ вектор.

Если множество является конечным множеством, то задача (1.3.1), (1.3.2) называется **задачей дискретного программирования.**

Если множество D является множеством целых чисел, то задача (1.3.1), (1.3.2) называется **задачей целочисленного программирования.**

Если функция $\Phi(X)$ является выпуклой, то задача (1.3.1), (1.3.2) называется **задачей выпуклого программирования.** Заметим, что определение выпуклой функции $\Phi(X)$ требует выпуклости области ее определения D .

В общем случае задача (1.3.1), (1.3.2) называется **задачей нелинейного программирования.**

Часто задачи выпуклого программирования также относят к задачам нелинейного программирования.

Классификация по наличию или отсутствию ограничений.

Если ограничения на вектор X отсутствуют ($D = R^n$), то задача (1.3.1), (1.3.2.) называется **задачей безусловной оптимизации.**

Если имеются ограничения на вектор X ($D \subset R^n$) то задача (1.3.1), (1.3.2) называется **задачей условной оптимизации.**

Среди задач условной оптимизации выделяют следующие классы задач:

- задачи условной оптимизации с ограничениями типа неравенств, когда

$$D = \{X / g(X) \geq 0\} = \{X / g_i(X) \geq 0, i \in [1, \dots, m]\};$$

- задачи условной оптимизации с ограничениями типа равенств, когда

$$D = \{X / h(X) = 0\} = \{X / h_j(X) = 0, j \in [1, \dots, l]\};$$

- задачи условной оптимизации с ограничениями общего вида, когда имеются как ограничения типа неравенств, так и ограничения типа равенств, т.е. когда

$$D = \{X / g(X) \geq 0, h(X) = 0\} = \{X / g_i(X) \geq 0, h_j(X) = 0, i \in [1, \dots, m], j \in [1, \dots, l]\}.$$

Классификация по размерности вектора X .

Если размерность вектора X равна 1 ($n=1$), то задача (1.3.1), (1.3.2) называется **однопараметрической задачей оптимизации** (одномерной задачей оптимизации).

Если размерность вектора X больше 1 ($n>1$), то задача (1.3.1), (1.3.2) называется **многопараметрической задачей оптимизации** (многомерной задачей оптимизации).

Классификация по количеству точек минимума.

Если функция $\Phi(X)$ имеет в области допустимых значений D один минимум, то задача (1.3.1), (1.3.2) называется **одноэкстремальной задачей оптимизации**.

Если функция $\Phi(X)$ имеет в области допустимых значений D более одного минимума, то задача (1.3.1), (1.3.2) называется **многоэкстремальной задачей оптимизации**.

Классификация по характеру искомого решения.

Если отыскивается любой локальный минимум функции $\Phi(X)$, то задача (1.3.1), (1.3.2) называется **задачей локальной оптимизации**.

Если отыскивается любой локальный минимум функции $\Phi(X)$ и задача (1.3.1), (1.3.2) является задачей безусловной оптимизации, то эта задача называется **задачей безусловной локальной оптимизации**.

Аналогично, если отыскивается любой локальный минимум функции $\Phi(X)$ и задача (1.3.1), (1.3.2) является задачей условной оптимизации, то эта задача называется **задачей условной локальной оптимизации**.

Если отыскивается глобальный минимум функции $\Phi(X)$, то задача (1.3.1), (1.3.2) называется **задачей глобальной оптимизации**.

Если отыскивается глобальный минимум функции $\Phi(X)$ и задача (1.3.1), (1.3.2) является задачей безусловной оптимизации, то эта задача называется **задачей безусловной глобальной оптимизации**.

Аналогично, если отыскивается глобальный минимум функции $\Phi(X)$ и задача (1.3.1), (1.3.2) является задачей условной оптимизации, то эта задача называется **задачей условной глобальной оптимизации**.

1.4. Одномерная задача оптимизации

Рассмотрим задачу поиска минимума одномерной функции $\Phi(X)$, определенной на интервале $[a, b]$: $\min_{x \in [a, b]} \Phi(x) = \Phi(x^*)$.

Как известно из курса математического анализа, внутренние точки локального и глобального минимума функции $\Phi(X)$ являются **стационарными точками критерия оптимальности $\Phi(X)$** (см. рис. 1.4.1) или, что то же самое, решениями уравнения

$$\Phi'(X) = 0. \quad (1.4.1)$$

Но, решениями уравнения (1.4.1) являются не только точки минимума, но и точки максимума и точки перегиба функции $\Phi(X)$ (см. рис. 1.4.1). На рисунке отмечены локальные минимумы x_1^* , x_3^* , локальный максимум x_2^* и точка перегиба x_c^* функции $\Phi(X)$.

Следовательно, уравнение (1.4.1) является только необходимым условием минимума, но не является достаточным условием.

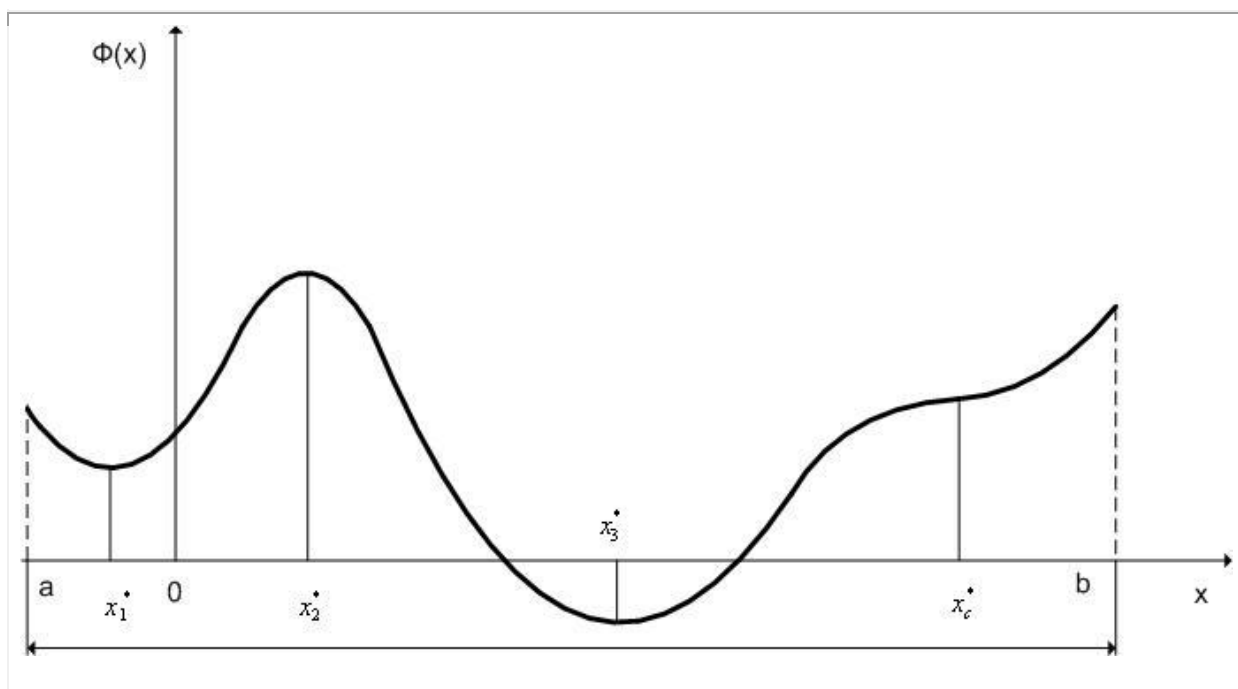


Рис. 1.4.1. Локальные минимумы (x_1^* , x_3^*), локальный максимум (x_2^*) и точка перегиба (x_c^*) функции $\Phi(X)$

Если существует вторая производная функции $\Phi''(X)$, то для отыскания достаточных условий минимума $\Phi(X)$ можно привлечь эту производную. Из курса математического анализа известно, что если в точке x_0 значение первой производной функции $\Phi(X)$ равно нулю, а второй производной – положительно, то в этой точке функция $\Phi(X)$ имеет минимум (локальный или глобальный).

Таким образом, имеем следующую теорему:

Теорема 1.4.1. Если функция $\Phi(X)$ определена и дважды непрерывно дифференцируема на интервале $[a, b]$, то необходимыми и достаточными условиями минимума этой функции в точке x_0 являются условия

$$\Phi'(x_0) = 0, \Phi''(x_0) > 0. \quad (1.4.2)$$

Итак, точками, в которых функция $\Phi(X)$ принимает наименьшее на интервале $[a, b]$ значение, могут быть либо ее стационарные точки, лежащие внутри интервала $[a, b]$, либо ее точки недифференцируемости (**критические точки критерия оптимальности**), к которым следует отнести также концы интервала $[a, b]$.

Поэтому точку, в которой функция $\Phi(X)$ принимает наименьшее на интервале $[a, b]$ значение, нужно искать, сравнивая значения этой функции во всех стационарных и критических точках.

1.5. Многомерная задача безусловной оптимизации

Многие методы решения многомерной задачи нелинейного программирования основаны на сведении этой задачи к задаче безусловной оптимизации. Поэтому рассмотрим n -мерную задачу оптимизации без ограничений

$$\min_{X \in R^n} \Phi(X) = \Phi(X^*) \quad (1.5.1)$$

По аналогии с одномерной задачей, для того, чтобы точка X_0 являлась минимумом функции $\Phi(X)$ необходимо выполнение условия стационарности функции $\Phi(X)$ в точке X_0 или, что тоже самое, необходимо, чтобы точка X_0 была стационарной точкой функции $\Phi(X)$:

$$\nabla \Phi(X_0) = 0. \quad (1.5.2)$$

Положим, что функции $\Phi(X)$ дважды непрерывно дифференцируема в окрестности точки X_0 . Для поиска достаточного условия достижения этой функцией в точке X_0 минимума, разложим $\Phi(X)$ в окрестности точки X_0 в ряд Тейлора:

$$\Phi(X_0 + \Delta X) - \Phi(X_0) = \Delta X^T \nabla \Phi(X_0) + \frac{1}{2} \Delta X^T H(X_0) \Delta X + \dots \quad (1.5.3)$$

Здесь n -мерный вектор-столбец достаточно малых величин $\Delta X = \{\Delta x_i, i \in [1, \dots, n]\}$, $H(X)$ - $(n \times n)$ -матрица Гессе.

По аналогии с одномерной задачей, для того, что в точке X_0 достигался минимум функции $\Phi(X)$, необходимо, чтобы разность $\Phi(X_0 + \Delta X) - \Phi(X_0)$ была положительной. Поскольку $\nabla \Phi(X_0) = 0$, то из (1.5.3) следует, что для выполнения этого условия необходимо, чтобы матрица Гессе $H(X)$ была положительно определена в точке X_0 .

Таким образом, справедлива

Теорема 1.5.1. Если функция $\Phi(X)$ дважды непрерывно дифференцируема в окрестности точки $X_0 \in R^n$, то необходимыми и достаточными условиями минимума этой функция в точке X_0 являются условия: $\nabla\Phi(X_0)=0$; $H(X_0)$ - положительно определена.

Таким образом, теорема 1.5.1 определяет **необходимые и достаточные условия минимума в многомерной задаче безусловной оптимизации.**

Заметим, что условие $\nabla\Phi(X_0)=0$ является только **необходимым условием минимума в многомерной задаче безусловной оптимизации.**

По аналогии с одномерной задачей точками, в которых функция $\Phi(X)$ достигает своего наименьшего значения, могут быть либо ее стационарные точки функции, либо критические точки функции (точки недифференцируемости).

Поэтому так же, как в одномерной задаче, точку, в которой функция $\Phi(X)$ принимает наименьшее значение нужно искать, сравнивая значения этой функции во всех стационарных и критических точках.

1.6. Задача выпуклого программирования

Рассмотрим n -мерную задачу выпуклого программирования $\min_{X \in D} \Phi(X) = \Phi(X^*) = \Phi^*$, $\Phi(X)$ – выпуклая функция, D – выпуклое непустое ограниченное и замкнутое множество допустимых значений вектора варьируемых переменных. Напомним, что по определению выпуклая функция является непрерывной.

Во внутренних точках множества допустимых значений D функция $\Phi(X)$ достигает минимального значения в точках, которые являются ее либо стационарными точками функции, либо критическими точками функции. Однако функция может достигать своего наименьшего значения и в граничных точках области определения D .

Важные свойства задачи выпуклого программирования определяют две следующие теоремы.

Теорема 1.6.1. Если внутренняя точка X^* множества D является точкой локального минимума в задаче выпуклого программирования, то в этой точке функция $\Phi(X)$ достигает глобального минимума.

Доказательство. Положим, что в точке X^* функция $\Phi(X)$ не достигает наименьшего во множестве D значения. Тогда существует точка $Y \in D$, для которой $\Phi(Y) < \Phi(X^*)$. Рассмотрим сечение $\varphi(\lambda) = \Phi(\lambda Y + (1-\lambda)X^*)$, $\lambda \in [0,1]$. Функция $\varphi(\lambda)$ достигает в точке наибольшее значение. Действительно, поскольку $\varphi(\lambda) = \Phi(\lambda Y + (1-\lambda)X^*) \leq \lambda \Phi(Y) + (1-\lambda)\Phi(X^*) < \lambda \Phi(X^*) + (1-\lambda)\Phi(X^*) = \Phi(X^*) = \varphi(0)$.

Это значит, что существует окрестность $\delta D \in D$ точки X^* и некоторое $\tilde{\lambda} \in [0,1]$ такие, что $X = \tilde{\lambda}Y + (1-\tilde{\lambda})X^* \in \delta D$. Но тогда $\Phi(X) = \varphi(\tilde{\lambda}) < \varphi(0) = \Phi(X^*)$, что противоречит условию теоремы.

Из теоремы следует, что во всех точках локального минимума выпуклая функция имеет одинаковые значения.

Пример 1.6.1. Рассмотрим не строго выпуклую квадратичную функцию $\Phi(X) = \Phi(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^2$, определенную в области $D = \{X / -2 \leq x_1 \leq 2, -2 \leq x_2 \leq 2\}$ (см. рис. 1.6.1). Все локальные минимумы этой функции равны нулю и расположены на прямой $-x_1 + x_2 = 0$.

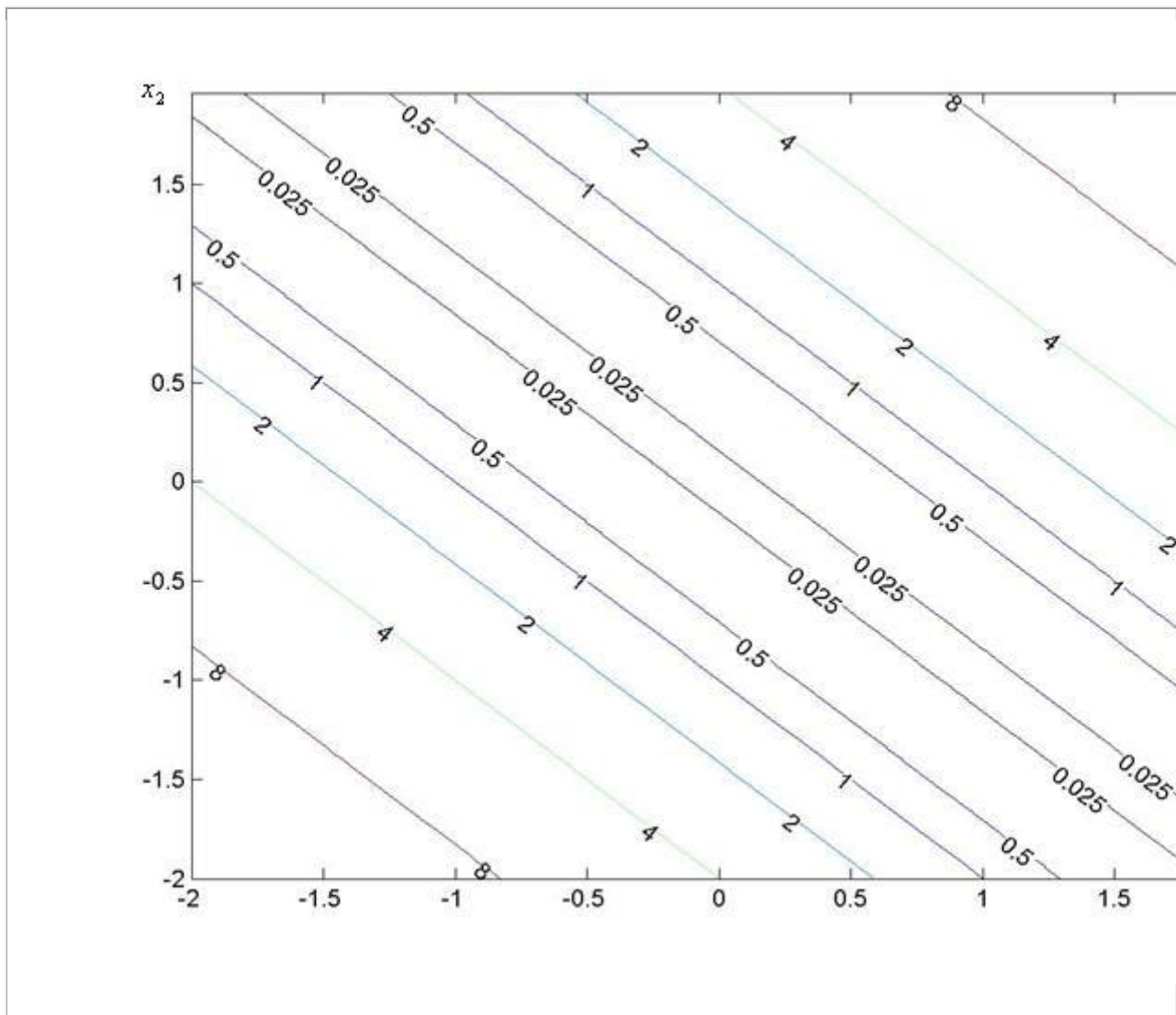


Рис. 1.6.1. К примеру 1.6.1

Теорема 1.6.2. Функция $\Phi(X)$, строго выпуклая функция на выпуклом множестве, имеет в этом множестве не более одной точки минимума (глобального).

Условие существования решения задачи выпуклого программирования дает следующая теорема.

Теорема 1.6.3. Пусть функция $\Phi(X)$ выпукла на выпуклом множестве $D \subset R^n$ и дифференцируема в точке $X^* \in D$. Тогда для того чтобы эта точка была точкой минимума функции $\Phi(X)$, необходимо и достаточно, чтобы для любой точки $X \in D$ выполнялось неравенство

$$(\nabla\Phi(X^*), (X - X^*)) \geq 0 \quad (1.6.1)$$

Необходимость. Рассмотрим сечение $\varphi(\lambda) = \Phi(\lambda X + (1-\lambda)X^*)$ функции $\Phi(X)$. Функция $\varphi(\lambda)$ определена на отрезке $[0,1]$, имеет в точке $\lambda=0$ локальный минимум и дифференцируема в этой точке. Следовательно $\varphi'(0) \geq 0$ (равенство нулю имеет место в том случае, когда точка X^* является внутренней точкой множества D). По правилу дифференцирования сложной функции $\varphi'(0) = \Phi'_\lambda \Phi(\lambda X + (1-\lambda)X^*) \Big|_{\lambda=0} = (\nabla\Phi(X^*), (X - X^*)) \geq 0$

Достаточность. Пусть в точке $X^* \in D$ выполнено неравенство (1.6.1). Рассмотрим сечение $\varphi(\lambda) = \Phi(\lambda X + (1-\lambda)X^*)$ функции $\Phi(X)$, где X – произвольная точка из множества D . Поскольку $\Phi(X)$ выпукла во множестве D , то функция $\varphi(\lambda)$ также выпукла на отрезке $[0,1]$. Кроме того, из неравенства (1.6.1) следует, что $\varphi'(0) \geq 0$. Это означает, что $\varphi(\lambda)$ – неубывающая отрезке $[0,1]$ функция, т.е. $\varphi(0) \leq \varphi(1)$. Последнее неравенство означает, что $\Phi(X^*) \leq \Phi(X)$ и в точке X^* функция $\Phi(X)$ принимает наименьшее в области D значение.

Теорему 1.6.3 иллюстрирует рис. 1.6.2. Точка X_1^* на рис. 1.6.2 является точкой локального минимума, поскольку не существует такой точки $X \in D$, что скалярное произведение $(\nabla\Phi(X_1^*), (X - X_1^*))$ отрицательно. Точка X_4 ,

например, не является точкой локального минимума, так как существуют такие точки $X \in D$, что скалярное произведение $(\nabla\Phi(X_4^*), (X - X_4^*))$ отрицательно.

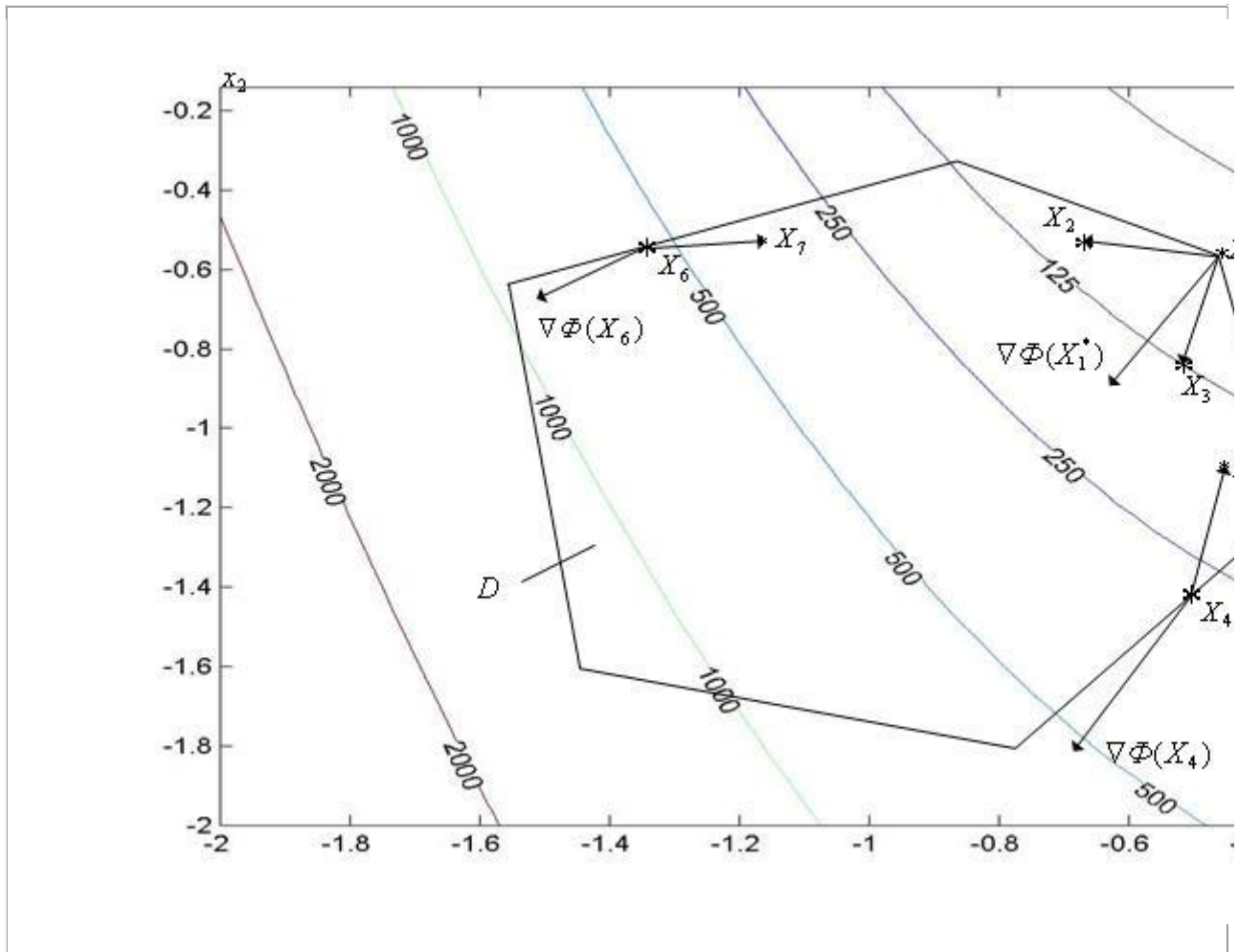


Рис. 1.6.2. К теореме 1.6.3

Заметим, что если точка $X^* \in D$ является внутренней точкой множества D , то условие (1.6.1) эквивалентно условию $\nabla\Phi(X^*)=0$. Таким образом, условие (1.6.1) можно рассматривать как обобщение необходимого условия минимума в многомерной задаче безусловной оптимизации.

1.7. Задача нелинейного программирования с ограничениями типа равенств

Рассмотрим n -мерную задачу нелинейного программирования

$$\min_{X \in D} \Phi(X) = \Phi(X^*) = \Phi^*, \quad (1.7.1)$$

где

$$D = \{X / h(X) = 0\} = \{X / h_j(X) = 0, j \in [1, \dots, l]\} \subset R^n \quad (1.7.2)$$

-не пустое, ограниченное замкнутое множество.

Нам понадобятся далее понятия **множителей Лагранжа** и **функции Лагранжа**. Функция Лагранжа для задачи (1.7.1) с ограничениями (1.7.2) определяется формулой

$$L(X, \lambda) = \Phi(X) + \sum_{j=1}^l \lambda_j h_j(X) = \Phi(X) + \lambda^T h(X), \quad (1.7.3)$$

где $\lambda = (\lambda_j, j \in [1, \dots, l])$ - $(l \times 1)$ -вектор множителей Лагранжа.

Нам понадобится также понятие **условия регулярности ограничивающих функций**. Если точка $X^* \in D$, то условие линейной независимости векторов $\nabla h_j(X^*), j \in [1, \dots, l]$ называется условием регулярности задачи (1.7.1), (1.7.2) в точке X^* . Данное условие означает, в частности, что количество ограничивающих функций, проходящих через точку X^* , не может быть больше размерности вектора варьируемых параметров, т.е. должно быть выполнено неравенство $l \leq n$. Например, на рис. 1.7.1 в ситуации (а) количество ограничивающих функций, проходящих через точку X^* , превышает размерность вектора варьируемых параметров, в ситуации (б) в точке X^* градиенты $\nabla h_1(X), \nabla h_2(X)$ ограничивающих функций коллинеарны.

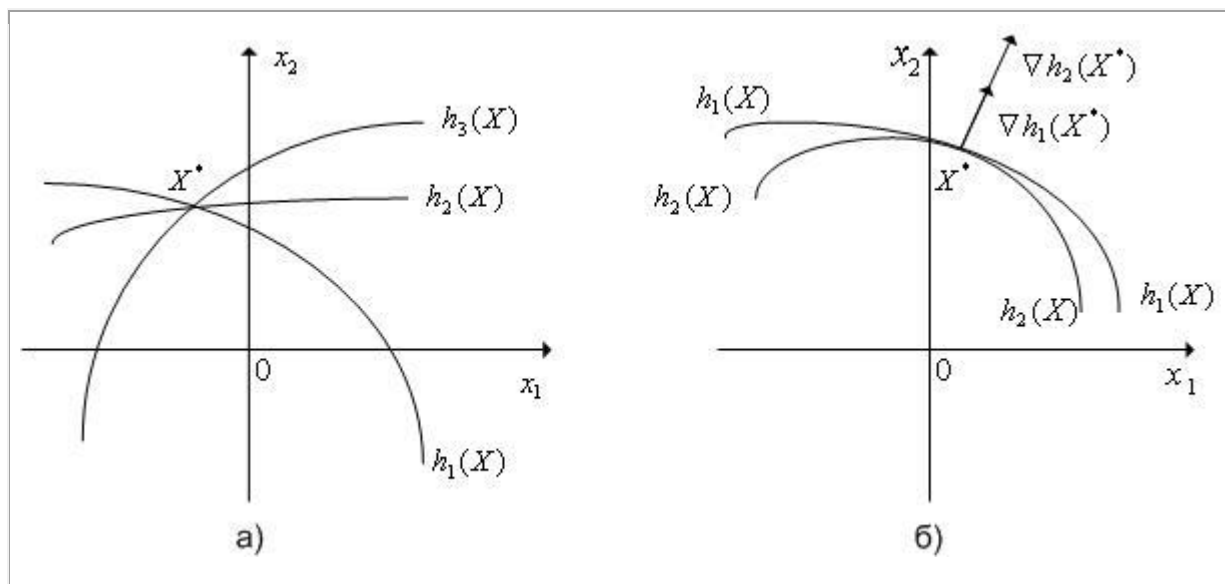


Рис. 1.7.1. Ситуации, в которых в двумерном случае ($n=2$) не выполняется условие регулярности системы функций $h(X)$ в точке X^* .

Исключительно важное место в теории и практике решения задач нелинейного программирования с ограничениями типа равенств занимает следующая теорема (**правило Лагранжа для задачи оптимизации с ограничениями типа равенств**).

Теорема 1.7.1. Пусть функция $\Phi(X)$ и функции $\nabla h_j(X), j \in [1, \dots, l]$ имеют непрерывные частные производные в некоторой окрестности точки X^* и пусть эта точка является точкой локального минимума функции $\Phi(X)$ при условии $h(X^*)=0$. Пусть, кроме того, выполняется условие регулярности системы функций $h(X)$ в точке X^* . Тогда существуют такие множители Лагранжа $\lambda_j, j \in [1, \dots, l]$, не все из которых равны нулю **одновременно**, что для функции Лагранжа $L(X, \lambda)$ точка X^* является стационарной точкой функции, т.е.

$$\nabla_x L(X^*, \lambda) = \nabla \Phi(X^*) + \sum_{j=1}^l \lambda_j \nabla h_j(X^*) = 0. \quad (1.7.4)$$

Отметим, что теорема 1.7.1 не требует знакоопределенности (т.е. положительности или отрицательности) множителей Лагранжа $\lambda_j, j \in [1, \dots, l]$. Теорема требуется лишь того, чтобы не все из этих множителей равнялись нулю одновременно.

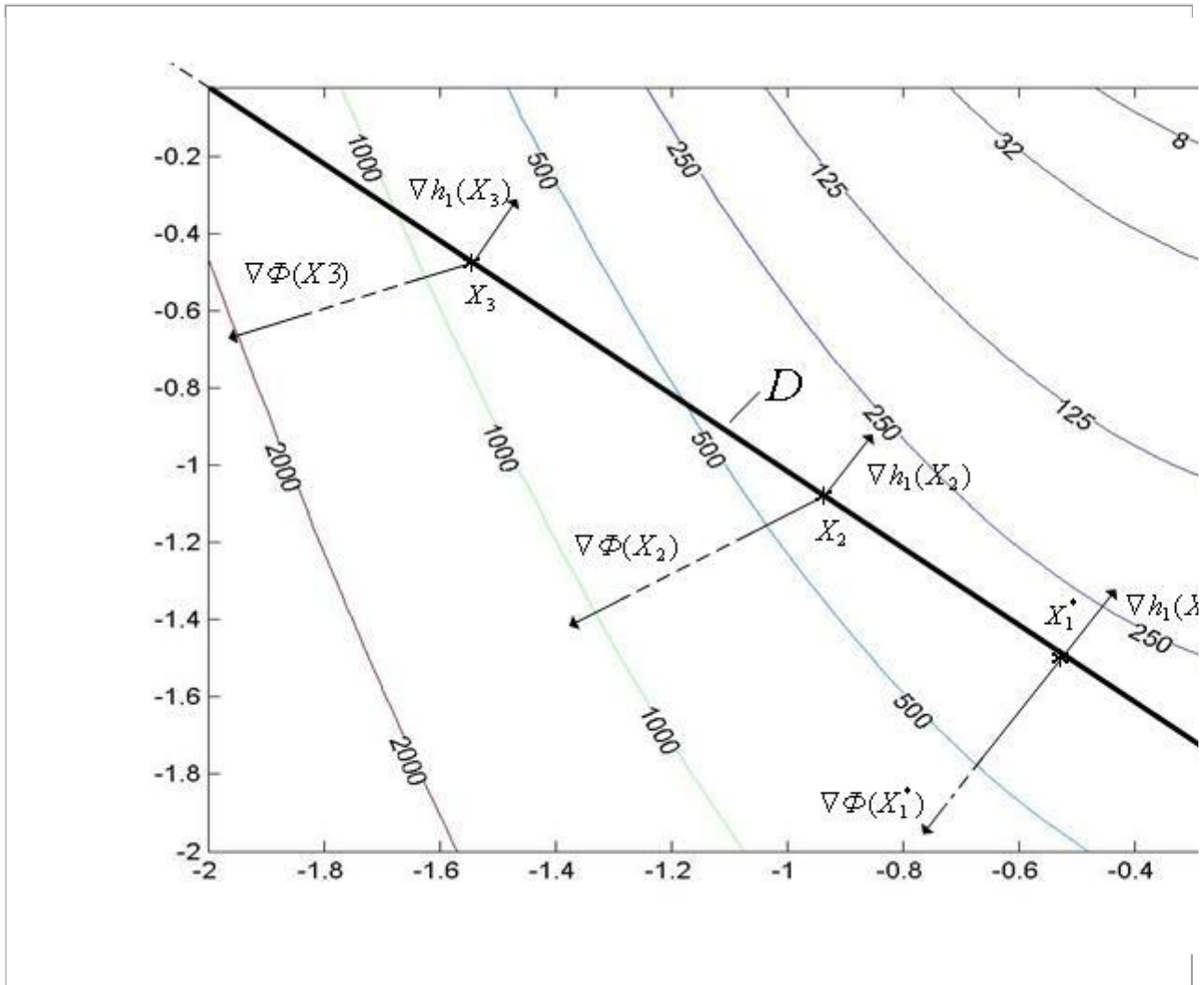


Рис. 1.7.2. К примеру 1.7.1.

Пример 1.7.1. Рассмотрим в качестве минимизируемой функции $\Phi(X)$ функцию Розенброка $\Phi(x_1, x_2) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$, ($n = 2$). Положим, что имеется только одно ограничение типа равенств, которое задается с помощью функции $h_1(X) = x_1 + x_2 + 0.2 = 0$. Легко видеть, что градиенты функций $\Phi(X)$, $h_1(X)$ равны, соответственно

$$\nabla \Phi(X) = \left(-400(x_2 - x_1^2)x_1 - 2(1 - x_1) \quad 200(x_2 - x_1^2) \right)^T, \quad \nabla h_1(X) = (1 \quad 1)^T.$$

Пример 1.7.1 иллюстрирует рис. 1.7.2. В точках X_2, X_3 векторы градиента функций $\Phi(X)$, $h_1(X)$ не коллинеарны. Поэтому для этих точек не существует не равный нулю множитель Лагранжа λ_1 , при котором функция Лагранжа равна нулю: $\nabla\Phi(X) + \lambda_1\nabla h_1(X) = 0$. И поэтому точки X_2, X_3 не могут быть точками локального минимума для рассматриваемой задачи. Наоборот, в точке X_1^* векторы градиента функций $\Phi(X)$, $h_1(X)$ коллинеарны и поэтому существует не равный нулю множитель λ_1 при котором справедливо равенство $\nabla\Phi(X^*) + \lambda_1\nabla h_1(X^*) = 0$. Отметим, что, например, в точке $(-1 \ -1)^T$, градиент функции Розенброка равен $(-402 \ -400)^T$.

Теорема 1.7.1. означает, что в ее условиях вместо задачи условной оптимизации (1.7.1), (1.7.2) можно решать задачу безусловной оптимизации

$$\min_{X \in R^n} \left(\Phi(X) + \sum_{j=1}^l \lambda_j h_j(X) \right).$$

Необходимым условием существования локального минимума этой задачи в некоторой точке $X^* \in R^n$ является условие

$$\nabla_x \left(\Phi(X) + \sum_{j=1}^l \lambda_j h_j(X) \right) = 0.$$

Широко известна другая форма теоремы 1.7.1, которую мы сформулируем в виде следствия этой теоремы.

Следствие 1.7.1. В условиях теоремы 1.7.1 существуют такие множители Лагранжа $\lambda_j, j \in [1, \dots, l]$, не все из которых равны нулю одновременно, что имеют место следующие равенства:

$$\nabla_x L(X^*, \lambda) = 0, \quad (1.7.5)$$

$$\nabla_{\lambda} L(X^*, \lambda) = h(X^*) = 0. \quad (1.7.6)$$

Здесь равенство (1.7.5) повторяет равенство (1.7.4), а справедливость равенства (1.7.6) следует из того факта, что по условиям теоремы точка X^* удовлетворяет всем ограничениям, т.е. $h_j(X^*) = 0, j \in [1, \dots, l]$.

Заметим, что из (1.7.6) следует справедливость еще одного полезного равенства $\lambda^T \nabla_{\lambda} L(X^*, \lambda) = \sum_{j=1}^l \lambda_j h_j(X^*) = \lambda^T h(X^*) = 0$.

1.8. Теорема Куна-Таккера для задачи нелинейного программирования с ограничениями типа неравенств

Рассмотрим задачу нелинейного программирования

$$\min_{X \in D} \Phi(X) = \Phi(X^*) = \Phi^*, \quad (1.8.1)$$

где $\Phi(X)$ – произвольная функция,

$$D = \{X / g(X) \geq 0\} = \{X / g_i(X) \geq 0, i \in [1, \dots, m]\} \subset R^n \quad - \quad \text{не пустое,}$$

ограниченное замкнутое множество.

Нам понадобятся далее понятия множителей Лагранжа и функции Лагранжа для задачи нелинейного программирования с ограничениями типа неравенств. Функция Лагранжа для задачи (1.8.1) с ограничениями (1.8.2) определяется формулой

$$L(X, \lambda) = \Phi(X) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(X) = \Phi(X) + \lambda^T g(X), \quad (1.8.2)$$

где $\lambda = (\lambda_i, i \in [1, \dots, m]) - (m \times 1)$ - вектор множителей Лагранжа.

Нам понадобятся также понятия активных и неактивных ограничений. В точке локального минимума задачи (1.8.1), (1.8.2) каждое из ограничений $g_i(X^*) \geq 0, i \in [1, \dots, m]$ выполняется либо в виде равенства $g_i(X^*) = 0$, либо в виде неравенства $g_i(X^*) > 0$. Ограничения первого вида называются **активными ограничениями**. Остальные ограничения называются **неактивными ограничениями**.

Кроме того, нам понадобится также понятие условия регулярности для задачи нелинейного программирования с ограничениями типа неравенств. Если точка $X^* \in D$ и ограничения $g_{i_j}(X^*) \geq 0, i_j \in [1, \dots, s], s \leq m$ активны, то условие линейной независимости векторов называется условием регулярности ограничивающих функций $\nabla g_{i_j}(X^*) \geq 0, i_j \in [1, \dots, s]$ в точке

X^* . Это условие означает, что, например, при $n=2$ количество ограничивающих функций, проходящих через точку X^* , не должно превышать 2 и в точке X^* векторы $\nabla g_1(X), \nabla g_2(X)$ не должны быть коллинеарны.

Например, на рис. 1.8.1 в ситуации (а) количество ограничивающих функций, проходящих через точку X^* , превышает размерность вектора варьируемых параметров, в ситуации (б) в точке X^* градиенты $\nabla g_1(X), \nabla g_2(X)$ ограничивающих функций коллинеарны.

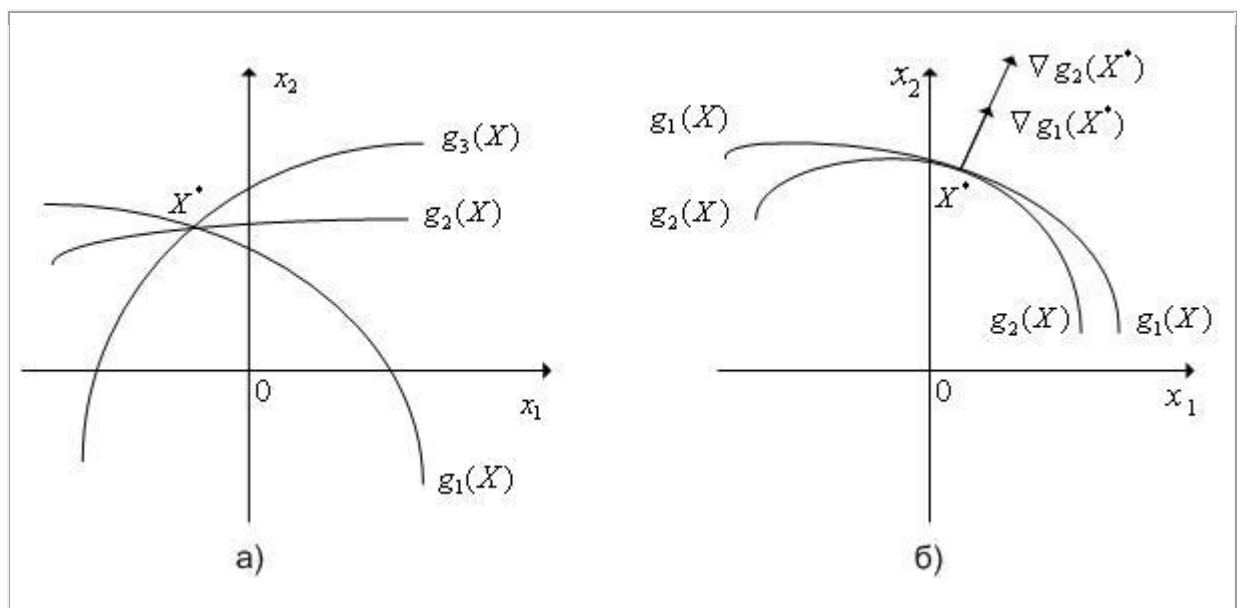


Рис. 1.8.1. Ситуации, в которых не выполняется условие регулярности двумерной задачи.

Исключительно большое значение в теории и практике решения задач нелинейного программирования имеет следующая теорема (теорема Куна-Таккера для задачи условной оптимизации с ограничениями типа неравенств).

Теорема 1.8.1. (Куна-Таккера). Пусть функция $\Phi(X)$ и функции $g_i(X) \geq 0, i \in [1, \dots, m]$ имеют непрерывные частные производные в некоторой окрестности точки X^* и пусть эта точка является точкой локального минимума функции $\Phi(X)$ при ограничениях $g_i(X^*) \geq 0$, удовлетворяющих в точке X^* условию регулярности ограничивающих функций. Тогда

существуют такие неотрицательные множители Лагранжа $\lambda_i, i \in [1, \dots, m]$, что для функции Лагранжа $L(X, \lambda)$ точка X^* является стационарной точкой функции, т.е.

$$\nabla_x L(X^*, \lambda) = \nabla \Phi(X^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(X^*) = 0. \quad (1.8.3)$$

Заметим, что в отличие от правила множителей Лагранжа, теорема 1.8.1 требует знакоопределенности множителей Лагранжа $\lambda_i, i \in [1, \dots, m]$. Отметим также, что теорема не запрещает того, чтобы все множители Лагранжа $\lambda_i, i \in [1, \dots, m]$ были равны нулю.

Поясним смысл теоремы на примере.

Пример 1.8.1. Рассмотрим двумерную ($n=2$) задачу нелинейного программирования (1.8.1), (1.8.2), в которой область допустимых значений D задается тремя ограничивающими функциями, т.е. $D = \{X / g(X) \geq 0\} = \{X / g_i(X) \geq 0, i \in [1, \dots, 3]\} \subset \mathbb{R}^2$. Положим, что множество D имеет вид, представленный на рис. 1.8.2.

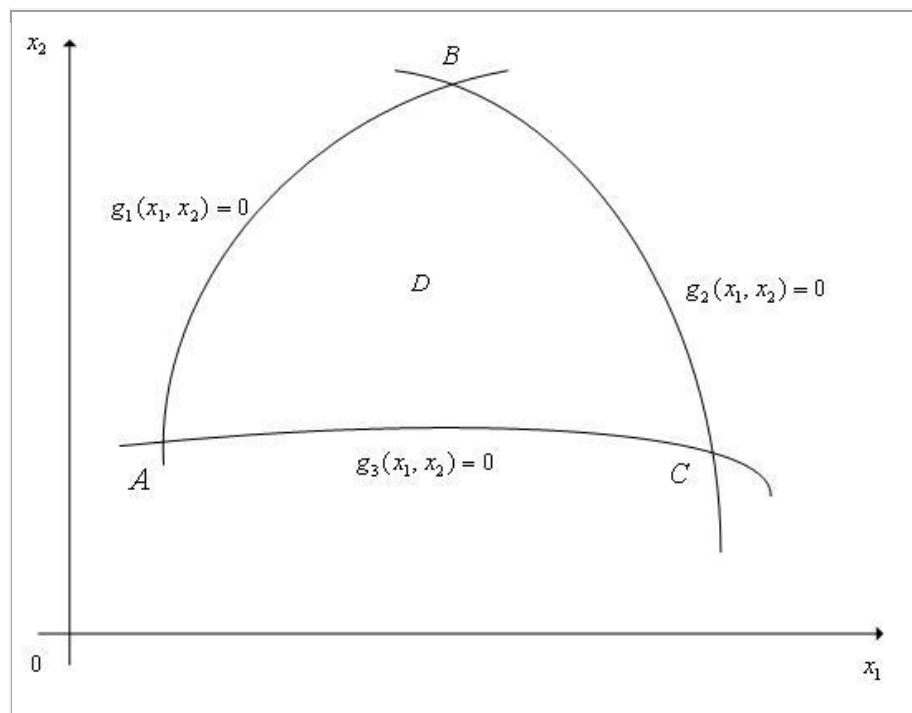


Рис. 1.8.2. К примеру 1.8.1.

Для всех граничных точек области D , очевидно, выполняются условия регулярности ограничивающих функций.

Если точка X^* находится внутри множества D (т.е. является стационарной точкой функции $\Phi(X)$), то теорема будет справедлива, если положить все множители Лагранжа $\lambda_i, i \in [1, \dots, m]$ равными нулю.

Пусть теперь точка X^* находится на одной из дуг, например, на дуге AB , т.е. пусть ограничение $g_1(X) \geq 0$ является активным ограничением, а остальные ограничения – неактивными ограничениями. Тогда в этой точке $g_1(X^*) = 0$ и справедливость теоремы вытекает из правила множителей Лагранжа для задачи с ограничениями типа равенств, если положить $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Пусть, наконец, точка X^* находится в одной из угловых точек множества D , например, в точке B , т.е. пусть ограничения $g_1(X) \geq 0, g_2(X) \geq 0$ - являются активными ограничениями, а ограничение $g_3(X) \geq 0$ - неактивным ограничением. Тогда можно положить $\lambda_3 = 0$ и справедливость теоремы вытекает из правила множителей Лагранжа для задачи с ограничениями типа равенств.

Теорема 1.8.1 означает, что в ее условиях вместо задачи условной оптимизации (1.8.1), (1.8.2) можно решать задачу безусловной оптимизации

$$\min_{X \in R^n} \left(\Phi(X) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(X) \right).$$

Необходимым условием существования локального минимума этой задачи в некоторой точке $X^* \in R^n$ является условие

$$\nabla_x \left(\Phi(X^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(X^*) \right) = 0.$$

Широко известна другая форма теоремы 1.8.1, которую мы сформулируем в виде следствия этой теоремы.

Следствие 1.8.1. В условиях теоремы 1.8.1 существуют такие неотрицательные множители Лагранжа $\lambda_i, i \in [1, \dots, m]$, что имеют место следующие равенства:

$$\nabla_x L(X^*, \lambda) = 0, \quad (1.8.4)$$

$$\nabla_\lambda L(X^*, \lambda) = g(X^*) \geq 0. \quad (1.8.5)$$

Здесь равенство (1.8.5) повторяет равенство (1.8.4), а справедливость равенства (1.8.6) следует из того факта, что по условиям теоремы точка X^* удовлетворяет всем ограничениям, т.е. $g_i(X^*) \geq 0, i \in [1, \dots, m]$.

Заметим, что из (1.8.6) следует справедливость еще одного полезного равенства $\lambda^T \nabla_\lambda L(X^*, \lambda) = \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(X^*) = \lambda^T g(X^*) \geq 0$.

1.9. Теорема Куна-Таккера для общей задачи нелинейного программирования

Рассмотрим общую задачу нелинейного программирования

$$\min_{X \in D} \Phi(X) = \Phi(X^*) = \Phi^*, \quad (1.9.1)$$

где $\Phi(X)$ – произвольная функция,

$$\begin{aligned} D &= \{X / g(X) \geq 0, h(X) = 0\} = \\ &= \{X / g_i(X) \geq 0, h_j(X) = 0, i \in [1, \dots, m], j \in [1, \dots, l]\} \subset R^n \end{aligned} \quad (1.9.2)$$

не пустое ограниченное замкнутое множество.

Нам понадобятся далее понятия множителей Лагранжа и функции Лагранжа для общей задачи нелинейного программирования.

Функция Лагранжа для задачи (1.9.1) с ограничениями (1.9.2) определяется формулой

$$L(X, \lambda, \mu) = \Phi(X) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(X) + \sum_{j=1}^l \mu_j h_j(X) = \Phi(X) + \lambda^T g(X) + \mu^T h(X),$$

где $\lambda = (\lambda_i, i \in [1, \dots, m])$, $\mu = (\mu_j, j \in [1, \dots, l])$ – $(m \times 1)$ и $(l \times 1)$ – векторы множителей Лагранжа, соответственно.

Нам понадобится также понятие условий регулярности для общей задачи нелинейного программирования. Если точка $X^* \in D$ и ограничения $g_{i_j}(X^*) \geq 0, i_j \in [1, \dots, s], s \leq m$ являются активными ограничениями, то условие линейной независимости векторов $\nabla g_{i_j}(X^*) \geq 0, i_j \in [1, \dots, s]$, а также условие линейной независимости векторов $\nabla h_j(X^*), j \in [1, \dots, l]$ называются условиями регулярности ограничивающих функций в точке X^* .

Смысл условий регулярности раскрыт в предыдущих параграфах.

Теорема 1.9.1. (Куна-Таккера). Пусть функции $\Phi(X)$, $g_j(X) \geq 0, h_j(X) = 0, i \in [1, \dots, m], j \in [1, \dots, l]$, имеют непрерывные частные производные в некоторой окрестности точки $X^* \in D$ и пусть эта точка является точкой локального минимума функции $\Phi(X)$. Пусть, кроме того, выполняются условия регулярности ограничивающих функций $g(X), h(X)$, в точке X^* . Тогда существуют такие множители Лагранжа $\lambda_i, i \in [1, \dots, m], \mu_j, j \in [1, \dots, l]$, не все из которых равны нулю одновременно, что для функции Лагранжа $L(X, \lambda, \mu)$ точка X^* является стационарной точкой функции, т.е.

$$\nabla_x L(X^*, \lambda, \mu) = \nabla \Phi(X^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(X^*) + \sum_{j=1}^l \mu_j \nabla h_j(X^*) = 0. \quad (1.9.3)$$

Теорема 1.9.1 означает, что в ее условиях вместо задачи условной оптимизации (1.9.1), (1.9.2) можно решать задачу безусловной оптимизации

$$\min_{X \in \mathbb{R}^n} \left(\Phi(X) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(X) + \sum_{j=1}^l \mu_j \nabla h_j(X) \right).$$

Необходимым условием существования локального минимума этой задачи в некоторой точке $X^* \in D$ является условие

$$\Phi(X) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(X) + \sum_{j=1}^l \mu_j \nabla h_j(X) = 0.$$

1.10. Аналитическое решение многомерных задач нелинейного программирования

Ограничимся рассмотрением задачи нелинейного программирования с ограничениями типа неравенств

$$\min_{X \in D} \Phi(X) = \Phi(X^*) = \Phi^*, \quad (1.10.1)$$

где $\Phi(X)$ – произвольная функция,

$$D = \{X / g(X) \geq 0\} = \{X / g_i(X) \geq 0, i \in [1, \dots, m]\} \subset R^n \quad (1.10.2)$$

- не пустое, ограниченное замкнутое множество.

Рассмотрим прямое решение задачи (1.10.1), (1.10.2) (без использования теоремы Куна-Таккера), а также решение этой задачи на основе использования теоремы Куна-Таккера

Схема прямого решения задачи нелинейного программирования:

1. Из условия $\nabla \Phi(X^*) = 0$ определяем все стационарные точки функции $\Phi(X)$ в области D ;
2. Определяем все критически точки функции (точки не дифференцируемости) функции $\Phi(X)$ в области D ;
3. Для каждой из границ области D (ограничивающих функций) решаем соответствующую задачу на условный минимум:
 - из уравнения $g_i(X) \geq 0, i \in [1, \dots, m]$ выражаем m переменных через остальные $(n-m)$ переменных и подставляем их в выражение для функции $\Phi(X)$;
 - вместо исходной задачи условной оптимизации получаем задачу безусловной оптимизации с $(n-m)$ переменными;
 - решаем эту задачу – находим стационарные точки полученной функции, лежащие на соответствующей границе области D ;

4. Решаем задачу, аналогичную задаче, рассмотренной в п.3, для каждого из множеств, которое определяется пересечением границ области D ;
5. Во всех отобранных точках вычисляем значения функции $\Phi(X)$ и выбираем ту (или те), в которой значение функции наименьшее.

Заметим, что в общем случае такой подход трудно реализовать на практике, поскольку далеко не всегда удастся разрешить уравнения $g_i(X) \geq 0, i \in [1, \dots, m]$ относительно указанных переменных.

Схема решения задачи нелинейного программирования с использованием теоремы Куна-Таккера:

1. Записываем функцию Лагранжа

$$L(X, \lambda) = \Phi(X) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(X), \quad (1.10.3)$$

2. Находим градиенты $\nabla \Phi(X), \nabla g_i(X), i \in [1, \dots, m]$ функций $\Phi(X), g_i(X), i \in [1, \dots, m]$;

3. Находим стационарные точки функции Лагранжа, т.е. точки, в которых градиент этой функции равен нулю:

$$\nabla_x L(X^*, \lambda) = \nabla \Phi(X^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(X^*) = 0, \quad (1.10.4)$$

4. Находим точки, в которых нарушаются условия регулярности ограничивающих функций.
5. Во всех стационарных точках функции, а также точках нарушения условий регулярности ограничивающих функций вычисляем значения функции $\Phi(X)$ и выбираем ту (или те), в которой значение функции наименьшее.

Пример 1.10.1. Пусть дана двумерная задача нелинейного программирования с ограничениями типа неравенств, где

$$\Phi(X) = \Phi(x_1, x_2) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2, \quad (1.10.5)$$

$$D = \{X / g_1(X) = x_1 \geq 0, g_2(X) = x_2 \geq 0, g_3(X) = x_1 - x_2 + 5 \geq 0\} \subset R^2. \quad (1.10.6)$$

1. Дайте определение задачи нелинейного программирования (1.10.5), (1.10.6).

2. Изобразите на рисунке область допустимых значений вектора варьируемых параметров, формируемую ограничениями (1.10.6).

3. Найдите аналитически решение этой задачи без использования теоремы Куна-Таккера и изобразите его на рисунке.

4. Найдите аналитически решение этой задачи с использованием теоремы Куна-Таккера и изобразите его на рисунке.

Решение. 1. Задача (1.10.5), (1.10.6) является задачей выпуклого программирования: множество D есть выпуклый многогранник, а функция $\Phi(X)$ - квадратичная.

2. Область допустимых значений вектора варьируемых параметров, формируемая ограничениями (1.10.6), имеет вид, представленный на рис. 1.10.1

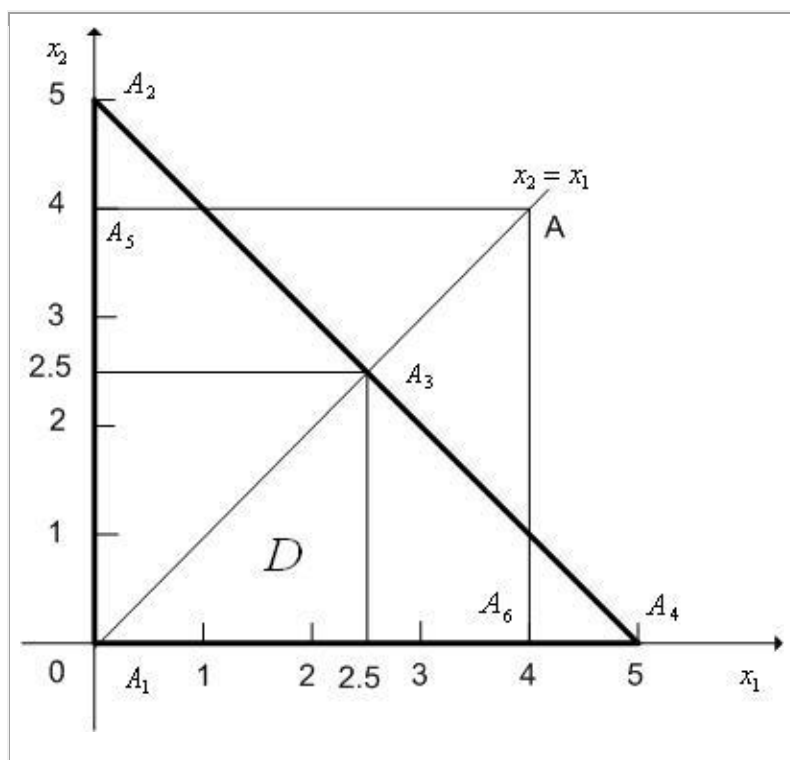


Рис. 1.10.1

3. Аналитическое решение задачи нелинейного программирования (1.10.5), (1.10.6) без использования теоремы Куна-Таккера состоит из следующих шагов.

1. Определяем стационарные точки функции $\Phi(X)$ в области D .

$$\nabla \Phi(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(x_1 - 4) \\ 2(x_2 - 4) \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1^* = 4 \\ x_2^* = 4 \end{pmatrix}.$$

Обозначим A найденную стационарную точку функции $\Phi(X)$. Легко видеть (см. рис. 1.10.1), что точка A не принадлежит множеству D и должна быть исключена из дальнейшего рассмотрения.

2. Определяем критические точки функции $\Phi(X)$ в области D . Функция $\Phi(X)$ всюду дифференцируема. Поэтому критические точки отсутствуют.

3. Для каждой из границ области D решаем соответствующую задачу на условный минимум:

Граница OA_2 . Решаем задачу $\begin{cases} \min_{X \in R} \Phi(X) = \Phi(X^*) \\ g_1(X) = 0 \end{cases}$.

Из условия $g_1(X) = 0$ имеем $x_1 = 0$. Подставив это значение x_1 в выражение для $\Phi(X)$, получим $\Phi(X) = (x_2 - 4)^2 + 16$. Минимум этой функции достигается

в точке A_5 с координатами $(0, 4)$: $\frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_2} = 2(x_2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x_2^* = 4$.

Граница OA_4 . Решаем задачу $\begin{cases} \min_{X \in R} \Phi(X) = \Phi(X^*) \\ g_2(X) = 0 \end{cases}$.

Аналогично предыдущему имеем точку A_6 с координатами $(0, 4)$.

Граница A_2A_4 . Решаем задачу $\begin{cases} \min_{X \in R} \Phi(X) = \Phi(X^*) \\ g_3(X) = 0 \end{cases}$.

Из условия $g_3(X) = 0$ имеем $x_1 = -x_2 + 5$. Подставив это значение x_1 в выражение для $\Phi(X)$, получим $\Phi(X) = 2x_2^2 - 10x_2 + 17$. Минимум этой функции достигается в точке A_3 с координатами $(2.5, 2.5)$:

$$\frac{\partial \Phi(X)}{\partial x_2} = 4x_2 - 10 = 0 \Leftrightarrow x_2^* = 2.5, x_1^* = -2.5 + 2.5 = 2.5.$$

4. Пересечением границ области D являются точки $A_1 - A_2 - A_4$.

5. Значения функции $\Phi(X)$ в отобранных точках приведены в табл. 1.10.1.

Таблица 1.10.1

Точка	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
Координаты	(0,0)	(0,5)	(2.5,2.5)	(5,0)	(0,4)	(4,0)
Значение $\Phi(X)$	32	17	4.5	17	16	16

Из табл. 1.10.1 следует, что искомое минимальное значение $\Phi(X)$ достигается в точке $(2.5, 2.5)$ и равно 4.5.

4. Аналитическое решение задачи нелинейного программирования (1.10.5), (1.10.6) с использованием теоремы Куна-Таккера состоит из следующих шагов.

1. Записываем функцию Лагранжа

$$L(X, \lambda) = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 (-x_1 - x_2 + 5).$$

2. Находим градиенты функций $\Phi(X)$, $g_i(X)$, $i \in [1, \dots, 3]$:

$$\nabla \Phi(X) = \begin{pmatrix} 2(x_1 - 4) \\ 2(x_2 - 4) \end{pmatrix}, \quad \nabla g_1(X) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_2(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_3(X) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

3. Записываем необходимое условие минимума функции Лагранжа:

$$\begin{cases} 2(x_1 - 4) + \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ 2(x_2 - 4) + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \quad (1.10.7)$$

4. **а).** Положим, что ни одно из ограничений не является активным ограничением (точка лежит внутри области D). В этом случае можно положить $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ (напомним, что теорема Куна-Таккера не запрещает этого). Тогда из (1.10.7) имеем стационарную точку функции A с координатами $(4, 4)$. Точка лежит вне области D и из рассмотрения исключается.

б). Пусть активным является ограничение $g_1(X) \geq 0$ т.е. пусть $x_1 = 0$. Тогда можно положить $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. При этом из (1.10.7) следует $\lambda_1 = 8, x_2 = 4$. Таким образом, имеем стационарную точку функции A_5 с координатами $(0, 4)$.

в). Пусть активным является ограничение $g_2(X) \geq 0$, т.е. пусть $x_2 = 0$. Тогда можно положить $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$. При этом из (1.10.7) следует $\lambda_2 = 8, x_1 = 4$. Таким образом, имеем стационарную точку функции A_6 с координатами $(4, 0)$.

г). Пусть активным является ограничение $g_3(X) \geq 0$, т.е. пусть $-x_1 - x_2 + 5 = 0$. Тогда можно положить $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. При этом из (1.10.7) следует система

$$\begin{cases} 2(x_1 - 4) - \lambda_3 = 0 \\ 2(x_2 - 4) - \lambda_3 = 0 \end{cases} \quad (1.10.8)$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим $(x_1 - 4) - (x_2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$. Отсюда, из условия $-x_1 - x_2 + 5 = 0$ и системы (1.10.8) имеем $x_1 = 2.5, x_2 = 2.5, \lambda_3 = -3$. Таким образом, имеем стационарную точку A_3 с координатами $(2.5, 2.5)$.

д) Пусть активными являются ограничения $g_1(X) \geq 0$, $g_2(X) \geq 0$, т.е. пусть $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Тогда можно положить $\lambda_3 = 0$. При этом из (1.10.7) следует $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 8$. Таким образом, имеем стационарную точку функции A_1 с координатами $(0,0)$.

е) Аналогично получаем стационарную точку A_2 с координатами $(0,5)$.

ж) Аналогично получаем стационарную точку A_4 с координатами $(5,0)$.

5. Легко видеть, что точки, в которых нарушаются условия регулярности ограничивающих функций, отсутствуют. Значения функции $\Phi(X)$ в отобранных точках совпали с приведенными в табл. 1.10.1. Искомое минимальное значение $\Phi(X)$ достигается в точке $(2.5, 2.5)$ и равно 4.5.

1.11. Классификация методов решения детерминированных задач оптимизации

Особенность задач оптимизации состоит в том, что вычисление значения критерия оптимальности и значений ограничивающих функций при фиксированных значениях параметров X может требовать больших затрат компьютерного времени. В связи с этим возникает проблема решения задачи оптимизации при наименьшем числе испытаний.

Рассмотрим для простоты записи только ограничения типа неравенств:

$$\min_{X \in D} \Phi(X) = \Phi(X^*), \quad D = \{X / g(X) \geq 0\}.$$

Испытанием называется операция однократного вычисления функций $\Phi(X)$, $g(X)$ и, быть может, их производных, в некоторой точке X , вообще говоря, не обязательно принадлежащей множеству D .

Далее будем говорить, что детерминированная задача оптимизации решается с помощью **поискового метода оптимизации**, если используется следующая процедура поиска оптимального решения X^* :

- по очереди при $r = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ производятся испытания в точках

$$X^0, X^{r+1} = F_{r+1} \left(X^0, \Phi(X^0), g(X^0), \dots, X^r, \Phi(X^r), g(X^r) \right) \quad (1.11.1)$$

где X^0 — начальное приближение;

- в качестве решения задачи берется вектор X^* , который находится из условия

$$\Phi^* = \Phi(X^*) = \min_{r \in [0, N]} \Phi(X^r). \quad (1.11.2)$$

Классификация по наличию или отсутствию ограничений на вектор варьируемых параметров.

Метод поиска, ориентированный на решение задач безусловной оптимизации, называется **методом безусловной оптимизации**.

Аналогично, метод поиска, ориентированный на решение задач условной оптимизации, называется **методом условной оптимизации**.

Классификация по размерности вектора X .

Если в формулах (1.11.1), (1.11.2) X^r есть скаляр, то метод поиска называется **одномерным методом поиска**; если X^r есть вектор ($n > 1$), то метод поиска называется **многопараметрическим методом поиска**.

Классификация по характеру искомого решения.

Если метод поиска гарантирует отыскание только локального минимума функции $\Phi(X)$, то метод называется **методом локального поиска**.

Если делается попытка отыскать глобальный минимум $\Phi(X)$, то метод называется **методом глобального поиска**.

Сразу отметим, что удовлетворительных с точки зрения вычислительной эффективности методов глобального поиска не существует.

Классификация по характеру функции F_r .

Если функции F_r , $r \in [1, N]$ являются детерминированными, то метод поиска называется **детерминированным методом поиска**.

Если функции F_r содержат случайные параметры, то метод поиска называется **стохастическим методом поиска**.

Методы пассивного и последовательного поиска.

Если все точки X^r , $r = 0, 1, 2, \dots, N-1$ назначаются заранее (до проведения испытаний), то метод поиска называется **пассивным методом поиска**.

Если точка X^{r+1} определяется на основе всей или части информации об испытаниях в предыдущих точках, то метод называется **последовательным методом поиска**.

Классификация по количеству предыдущих учитываемых шагов.

Если при вычислении координат точки X^{r+1} учитывается информация только об одном (предыдущем) испытании, то метод поиска называется **одношаговым методом поиска**.

Схема одношагового последовательного метода поиска

$$X^{r+1} = F_{r+1}(X^r, \Phi(X^r), g(X^r))$$

Если при вычислении координат точки X^{r+1} учитывается информация о $s > 1$ предыдущих испытаниях, то метод поиска называется **многошаговым методом поиска** (конкретнее, s -шаговым).

Классификация по виду функций F_r .

Если функции F_r на всех N шагах одинаковы, то метод поиска называется **итерационным методом поиска**.

Схема одношагового итерационного метода последовательного поиска:

$$X^{r+1} = F(X^r, \Phi(X^r), g(X^r))$$

Если функции F_r различны на различных шагах поиска, то метод называется **не итерационным методом поиска**.

Классификация по "близости" соседних точек, в которых производятся испытания.

Если точка X^{r+1} принадлежит некоторой малой окрестности точки X^r , т.е. $X^{r+1} \in d(X^r)$, то метод поиска называется **локальным методом поиска**.

Если точка X^{r+1} может принадлежать любой точке множества D , т.е. $X^{r+1} \in D$, то метод поиска называется **нелокальным методом поиска**.

Классификация по порядку используемых производных.

Если при вычислении значений функции F_r производные не используются, то метод поиска называется **прямым методом поиска** или методом поиска нулевого порядка.

Если при этом используются производные k -го порядка, то метод поиска называется **методом поиска k -го порядка**. Метод поиска первого порядка называется также **градиентным методом поиска**.

Способ выбора начальной точки X^0 и конкретная совокупность функций $\{F_r\}$ называются **алгоритмом поисковой оптимизации**.

Таким образом, понятие алгоритма является более частным по сравнению с понятием метода (одному и тому же методу могут соответствовать различные алгоритмы).

Важной проблемой при построении методов решения задач оптимизации является проблема выбора условия окончания поиска (критерия окончания поиска). Простейшими, но широко используемыми в вычислительной практике, являются следующие критерии окончания поиска:

$$\|X^{r+1} - X^r\| \leq \varepsilon_X, \quad (1.11.3)$$

где ε_X - константа, определяющая требуемую точность решения по X ;

$$\|\Phi(X^{r+1}) - \Phi(X^r)\| \leq \varepsilon_\Phi, \quad (1.11.4)$$

где ε_Φ - константа, определяющая требуемую точность решения по Φ .

Здесь $\|\cdot\|$ — некоторая векторная норма (например, евклидова).

Будем далее условия окончания поиска (1.11.3), (1.11.4) называть **стандартными условиями окончания поиска** (стандартными критериями окончания поиска).