21. Задачи дробно-линейного программирования.

Одним из частных случаев математического программирования, а так же одним из обобщений линейного программирования является дробно-линейное программирование, ставшее необходимым инструментом при решении многих оптимизационных задач с удельными показателями качества.

Первые статьи, посвященные рассмотрению задач дробно-линейного программирования и разработке методов их решения, появились в начале 60-х годов 20 века. Многие работы по дробно-линейному программированию быстро получили широкую известность и породили многочисленные исследования в этой области.

При планировании производства используют показатели себестоимости продукции, рентабельности производства, среднюю стоимость одной единицы выпускаемой продукции и другие. Одни из этих показателей стремятся минимизировать, а другие – максимизировать. Задачи дробно-линейного программирования в планировании играют особую роль. Актуальность задач дробно-линейного программирования заключается в том, что возможно найти оптимальное решение производства на любой срок и на любой объём производимой продукции.

Среди оптимизационных плановых задач все большее значение приобретают такие, в которых необходимо экстремизировать удельные экономические показатели, т.е. например такие, как себестоимость, рентабельность и т.п. Но в таких случаях допустимые условия могут ничем не отличаться от допустимых условий обычной линейной задачи, а вот целевая функция представляет собой дробь, в числителе и знаменателе которой стоят линейные формы от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ - искомых планов выпуска интересующих нас товаров.

Дробно-линейное программирование - это область математического программирования, связанная с отысканием экстремальных значений (max или min) некоторой дробно-линейной целевой функции в линейной области ограничений. Задачи такого типа, вообще говоря, являются нелинейными задачами оптимизации (так как имеют целевую функция, заданную в нелинейном виде) и решить их сразу достаточно сложно.

Рассмотрим следующую прикладную задачу. Для выполнения n различных работ могут быть использованы рабочие m квалификационных групп.

При выполнении *i*-й группой рабочих *j*-й работы выработка в единицу времени составляет c_{ij} единиц ($i=1,\ldots,m$; $j=1,\ldots,n$).

Общее количество времени, в течение которого *i*-я группа рабочих может быть занята выполнением работ, не превышает a_i единиц времени, а *j*-я работа должна быть выполнена в объеме не менее b_j единиц.

Необходимо составить такой план выполнения работ, который бы обеспечивал максимальную производительность.

$$\text{Производительность} = \frac{\sum \text{объем работ}}{\sum \text{затраты времени}}.$$

Построим модель. Пусть x_{ij}– время, затрачиваемое *i*-й группой рабочих для выполнения *j*-й работы ($i=1,\ldots,m$; $j=1,\ldots,n$).

Тогда при плане $\{x_{ij}\}$ общий объем работ (F_1) составит:

$$F_1 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} .$$

Общие затраты времени (F_2) на выполнение этого объема работ определяются следующим образом:

$$F_2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} .$$

При плане $\{x_{ij}\}$ общая производительность всех работ составит:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}} .$$

Сформулируем ограничения задачи:

- j-я работа должна быть выполнена в объеме не менее b_j единиц, следовательно, должно иметь место:

$$\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \geq b_j \quad (j = 1, \dots, n)$$

- i-я группа рабочих может быть занята выполнением работ не более a_i единиц времени:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i \quad (i = 1, \dots, m).$$

Последнее, естественное, ограничение – это требование неотрицательности переменных: $x_{ij} \geq 0 \ \ (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$.

Окончательно модель приобретает вид:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}} \rightarrow max$$

$$\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \geq b_j, \quad (j = 1, \dots, n)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i, \quad (i = 1, \dots, m)$$

$$x_{ij} \geq 0, (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n).$$

В практике планирования с использованием математических моделей оптимизационных задач подобные нелинейные задачи встречаются достаточно часто. Они составляют целый класс задач математического программирования – задачи дробно-линейного программирования.

Существуют методы, которые делают решение таких задач гораздо проще. К таким методам относятся графический метод и метод сведения задачи дробно-линейного программирования к задаче линейного программирования путем соответствующего преобразования.

22. Графический метод решения задач дробно-линейного программимрования

Общая задача дробно-линейного программирования состоит в определении максимального значения функции и имеет вид:

$$F = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} d_j\, x_j} \to max \qquad (22.1)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \;\; (i = 1, \dots, m), \qquad (22.2)$$

$$x_j \geq 0 \;\; (j = 1, \dots, n), \qquad (22.3)$$

где c_j, d_j, b_i и a_{ij}- некоторые постоянные числа. При этом предполагается, что $\sum_{j=1}^{n} d_j x_j \geq 0 \;\; (j = 1, \dots, n)$ и $\sum_{j=1}^{n} d_j x_j \neq 0$ в области неотрицательных решений системы линейных уравнений (22.2). Заметим, что условие $\sum_{j=1}^{n} d_j\, x_j > 0$ не нарушает общности задачи в этой области, поскольку в том случае, когда эта величина отрицательна, знак минус всегда можно отнести к числителю.

Как и в случае основной задачи линейного программирования, свое максимальное значение целевая функция задачи (22.1)-(22.3) принимает в одной из вершин многоугольника решений, определяемой системой ограничений (22.2) и (22.3) (естественно, если задача имеет решение). Если максимальное значение целевая функция задачи (22.1) принимает более чем в одной вершине многоугольника решений, то она достигает его также во всякой точке, являющейся выпуклой комбинацией данных вершин.

Рассмотрим задачу, состоящую в определении максимального значения функции двух переменных:

$$F = \frac{c_1 x_1 + c_2 x_2}{d_1 x_1 + d_2 x_2} \qquad (22.4)$$

при условиях

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i \ (i = 1, \ldots, m), \quad (22.5)$$

$$x_1, x_2 \geq 0. \quad (21.6)$$

Будем считать, что в области допустимых решений имеет место $d_1x_1 + d_2x_2 \neq 0$.

Для того чтобы найти решение задачи (22.4)-(22.6), сначала находим многоугольник решений, определяемый ограничениями (22.5) и (22.6) задачи.

Предполагая, что этот многоугольник не пуст, полагаем значение функции равным некоторому числу h. Т.е. целевая функция задачи будет принимать одно и тоже значение во всех точках прямой

$$\frac{c_1x_1 + c_2x_2}{d_1x_1 + d_2x_2} = h. \quad (22.7)$$

Эта прямая проходит через начало координат. Чтобы найти допустимые решения, на которых целевая функция задачи принимает значение h, прямая должна иметь общие точки с многоугольником решений. Вращая построенную прямую (22.7) вокруг начала координат, либо определяем вершину (вершины), в которой функция (22.4) принимает максимальное значение, либо устанавливаем неограниченность функции на множестве планов задачи.

Итак, поиск решения задачи (22.4)-(22.6) включает в себя следующие этапы:

1. В системе ограничений задачи знаки неравенств заменяют на знаки точных равенств и строят прямые, определяемые этими уравнениями.
2. Находят полуплоскости для каждого из неравенств системы ограничений задачи.
3. Находят многоугольник решений задачи.
4. Полагая значение целевой функции (22.4) равным некоторому постоянному числу, строят прямую (22.7).
5. Определяют точку максимума или устанавливают неразрешимость задачи.
6. В найденной точке максимума находят значение целевой функции.

Заканчивая рассмотрение нахождения решения задачи дробно-линейного программирования графическим методом, отметим, что при решении конкретных задач могут быть различные случаи.

1. Многогранник решений ограничен, максимум и минимум достигаются в его угловых точках (рис. 22.1).

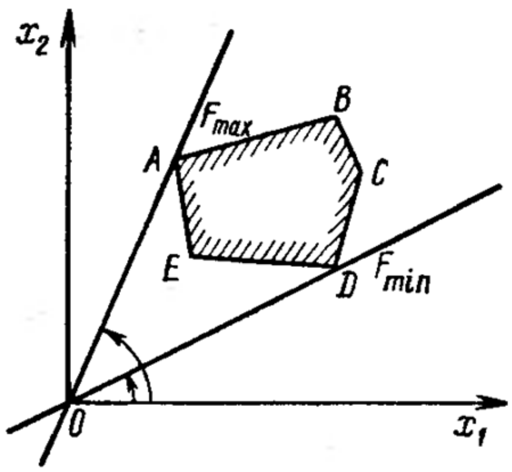

рис. 22.1

2. Многогранник решений не ограничен, но существуют вершины, в которых целевая функция задачи будет принимать соответственно максимальное и минимальное значения (рис. 22.2).

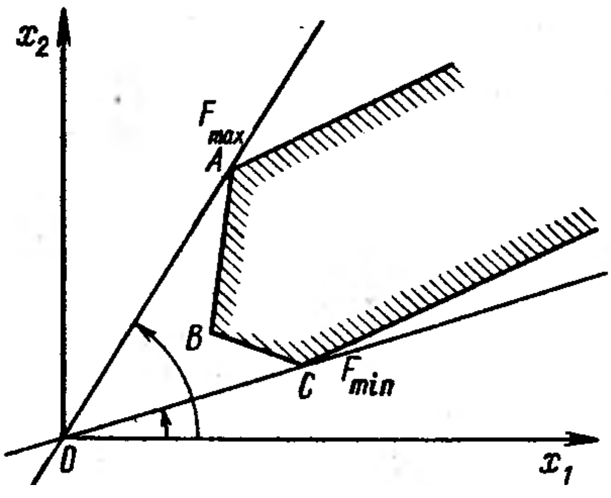

рис. 22.2

3. Многогранник решений не ограничен, и достигается один из экстремумов. К примеру, минимум достигается в одной из вершин многогранника решений, а максимум не достигается вообще, т.е. функция F имеет так называемый асимптотический максимум (рис. 22.3).

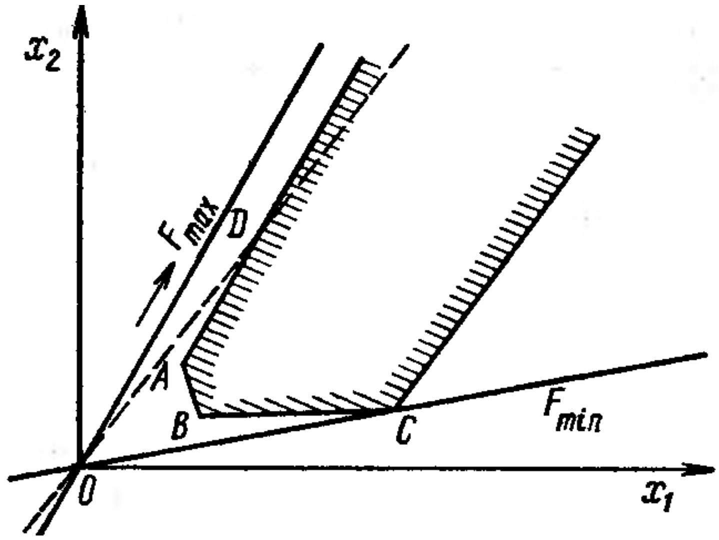

рис. 22.3

4. Многогранник решений не ограничен, максимум и минимум являются асимптотическими (рис. 22.4).

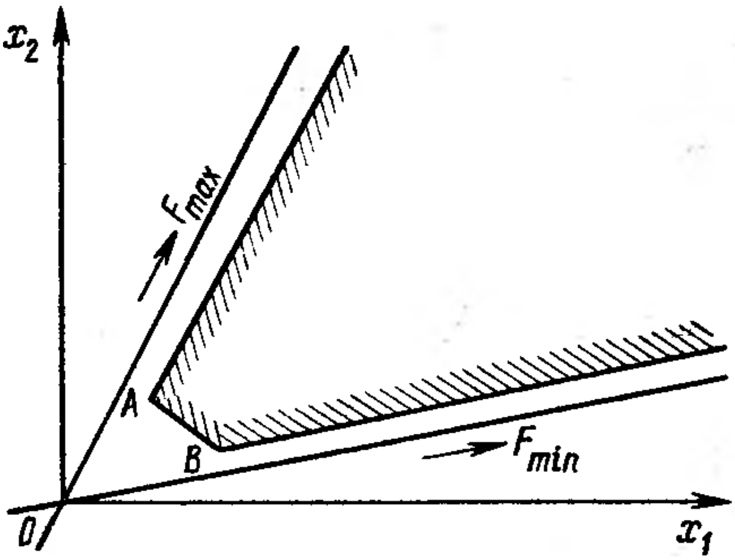

рис. 22.4

Задача 22.1. Для производства двух видов изделий A и B предприятие использует три типа технологического оборудования. Каждое из изделий должно пройти обработку на каждом из трех типов оборудования. Время обработки каждого изделия на оборудовании данного типа представлено в таблице 22.1.

Таблица 22.1.

Тип оборудования	Затраты времени (ч.) на обработку одного изделия	
	A	B
I II III	2 1 12	8 1 3
Затраты на производство одного изделия (руб)	2	3

Оборудование I и III типов предприятие может использовать не более 26 и 39 ч. При этом оборудование II типа целесообразно использовать не менее 4 ч.

Требуется определить, сколько изделий каждого вида следует изготовить предприятию, чтобы себестоимость одного изделия была минимальной.

Решение. предположим, что предприятие изготовит x_1 изделий вида A и x_2 изделий вида B. Тогда общие затраты на их производство будут равны $2x_1 + 3x_2$ руб., а себестоимость одного изделия в рублях составит

$$F = \frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2} \qquad (22.8)$$

Затраты времени на обработку указанного количества изделий на каждом из трех типов оборудования составят соответственно $2x_1 + 8x_2$ часов, $x_1 + x_2$ часов, $12x_1 + 3x_2$ часов. Так как предприятие может использовать оборудование I и III типов для обработки изделий вида A и B не более 26 и 39 ч., а оборудование II типа не менее 4 ч., то должны выполняться следующие неравенства:

$$\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 \le 26, \\ x_1 + x_2 \ge 4, \\ 12x_1 + 3x_2 \le 39. \end{cases} \qquad (22.9)$$

Переменные x_1 и x_2 по своему экономическому смыслу не могут принимать отрицательные значения:

$$x_1, x_2 \ge 0. \qquad (22.10)$$

Таким образом, математическая постановка задачи состоит в определении неотрицательного решения системы линейных неравенств (22.9), реализующего минимум функции (22.8). Для того чтобы найти решение задачи, сначала построим многоугольник решений:

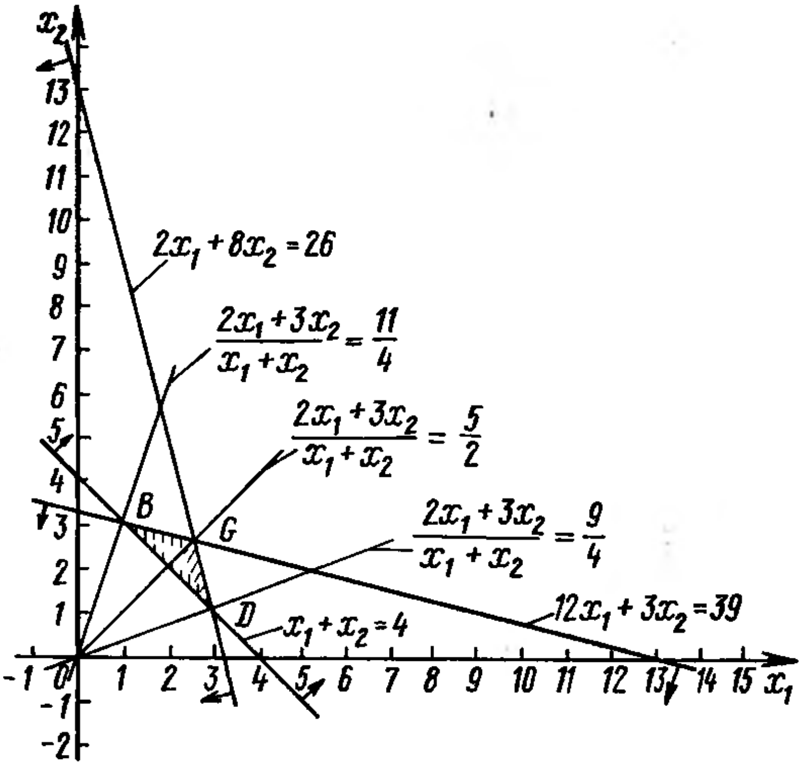

рис. 22.5

Как видно из рис. 22.5 многоугольником решений является треугольник BCD. Таким образом, функция (22.8) принимает минимальное значение в одной из трех точек B, C или D. Для того чтобы определить, в какой именно, положим значение функции F равным некоторому числу, к примеру, 11/4.

Тогда

$$\frac{2x_1+3x_2}{x_1+x_2}=\frac{11}{4},$$

или

$$x_2-3x_1=0. \qquad (22.11)$$

Уравнение (22.11) определяет прямую, проходящую через начало координат. Координаты точек, принадлежащих этой прямой и многоугольнику решений, являются планами задач, при которых значение функции (22.8) равно 11/4. К указанным точкам, в данном случае, относится лишь одна точка *B* (1;3). Ее координаты определяют план задачи, при котором значение функции равно 11/4.

Теперь положим значение функции *F* равным 5/2, т.е.

$$\frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2} = \frac{5}{2},$$

или

$$x_2 - x_1 = 0\,. \tag{22.12}$$

Уравнение (22.12), так же как и уравнение (22.11), определяет прямую, проходящую через начало координат. Ее можно рассматривать как прямую, полученную путем вращения по часовой стрелке вокруг начала координат прямой (22.11). При этом координаты точек, принадлежащих прямой (22.12) и многоугольнику решений, являются планами задач, при которых значение функции (22.8), равное 5/2, меньше, чем в точках прямой (22.11). Значит, если положить значение функции (22.8) равным некоторому числу h_0:

$$F = \frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2} = h_0, \tag{22.13}$$

а прямую (22.13), проходящую через начало координат, вращать по направлению часовой стрелки вокруг начала координат, то получим прямые

$$F = \frac{2x_1 + 3x_1}{x_1 + x_2} = h, \text{ где } h < h_0.$$

Найдем последнюю общую точку многоугольника решений с вращаемой прямой. Это точка *D* (3;1) (рис. 22.5), в которой достигается минимум функции (22.8).

Таким образом, оптимальным планом производства продукции будет план, согласно которому нужно изготовить три изделия вида А и одно изделие вида В. Себестоимость одного изделия при таком плане является минимальной и равна

$$F_{min} = \frac{2 \cdot 3 + 3 \cdot 1}{3 + 1} = \frac{9}{4}.$$

При поиске угловой точки многоугольника решений, в которой целевая функция задачи будет иметь наименьшее значение, мы полагали значение функции равным некоторым двум постоянным числам, и устанавливали направление вращения прямой, определяющее уменьшение значения функции. Но это можно сделать и по-другому: полагая значение функции *F* равным некоторому числу *h*, т.е.

$$\frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2} = h, \tag{22.14}$$

получим некоторую прямую, которая проходит через начало координат и имеет угловой коэффициент, зависящий от *h*. Далее, используя производную, устанавливаем направление вращения прямой (22.14) при возрастании *h*.

На практике дело обстоит намного проще. После того как мы нашли точки *B* (1;3) и *D* (3;1) (рис.22.5), в которых функция (22.8) может принимать минимальное значение, вычислим ее значения в этих точках:

$$F(B) = F(1;3) = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 3}{1 + 3} = \frac{11}{4},$$

$$F(D) = F(3;1) = \frac{2 \cdot 3 + 3 \cdot 1}{3 + 1} = \frac{9}{4}.$$

Так как *F(B)>F(D)*, то можно утверждать, что в точке *D* целевая функция принимает минимальное значение. Также заметим, что в точке *B* функция *F* принимает максимальное значение.

Задача 22.2. Используя геометрическую интерпретацию задачи дробно-линейного программирования, найти решение следующей задачи:

$$F = \frac{3x_1 - 2x_2}{x_1 + 2x_2} \to max;$$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 16, \\ -4x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + 3x_2 \ge 9. \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Решение. Для того чтобы найти решение задачи, сначала находим многоугольник решений, определяемый ограничениями задачи. В системе ограничений задачи знаки неравенств заменяем на знаки точных равенств, строим прямые, определяемые этими уравнениями, и находим полуплоскости для каждого из неравенств системы ограничений задачи:

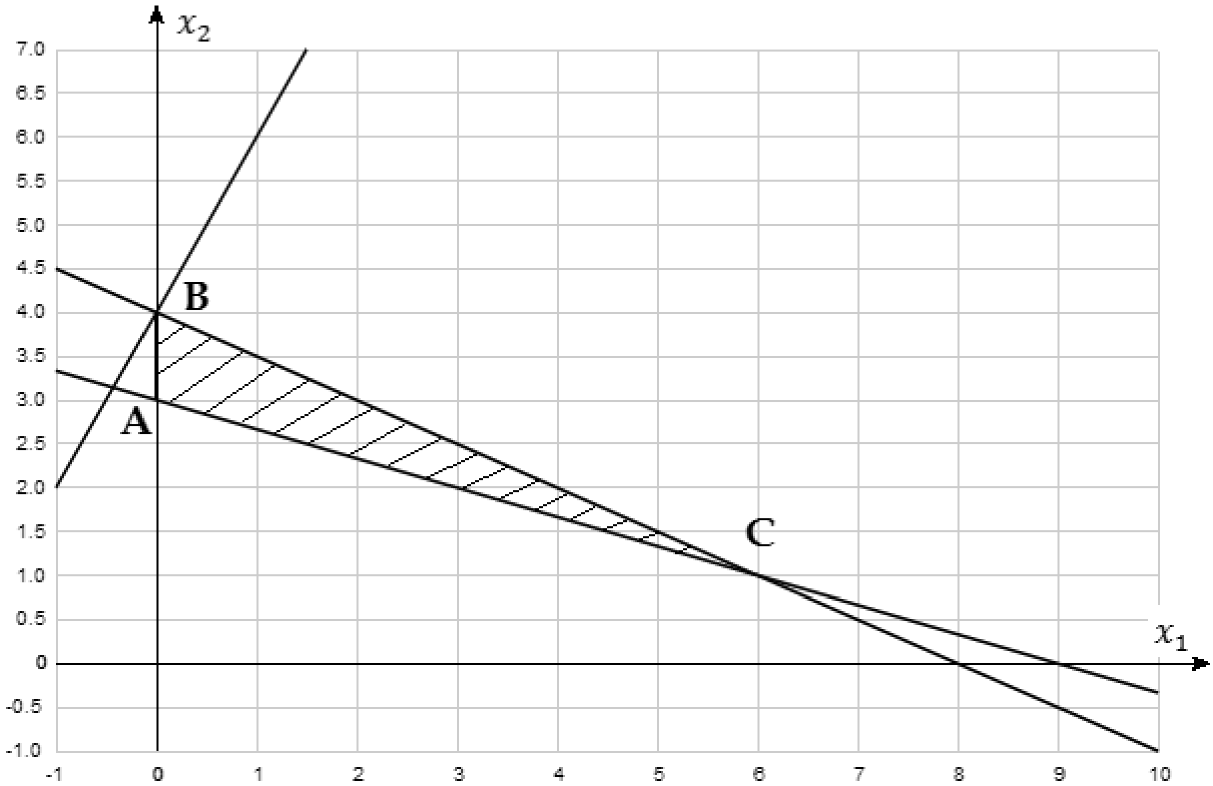

рис. 22.6

Треугольник ABC будет многоугольником решений. После того как мы нашли точки A (0;3), B (0;4) и C(6;1) (рис.22.6), в которых функция может принимать максимальное значение, вычислим ее значения в этих точках:

$F(A) = F(0;3) = -1;$ $F(B) = F(0;4) = -1;$ $F(C) = F(6;1) = 2;$

Из вычислений видно, что наибольшее значение целевая функция принимает в точке C.

Ответ. $F_{max} = 2$.

Задача 22.3. Используя геометрическую интерпретацию задачи дробно-линейного программирования, найти решение следующей задачи:

$$F = \frac{-5x_1 + 4x_2}{-2x_1 - 3x_2} \to min;$$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 \le 12, \\ -x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + x_2 \ge 10. \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Решение. Найдем многоугольник решений этой задачи:

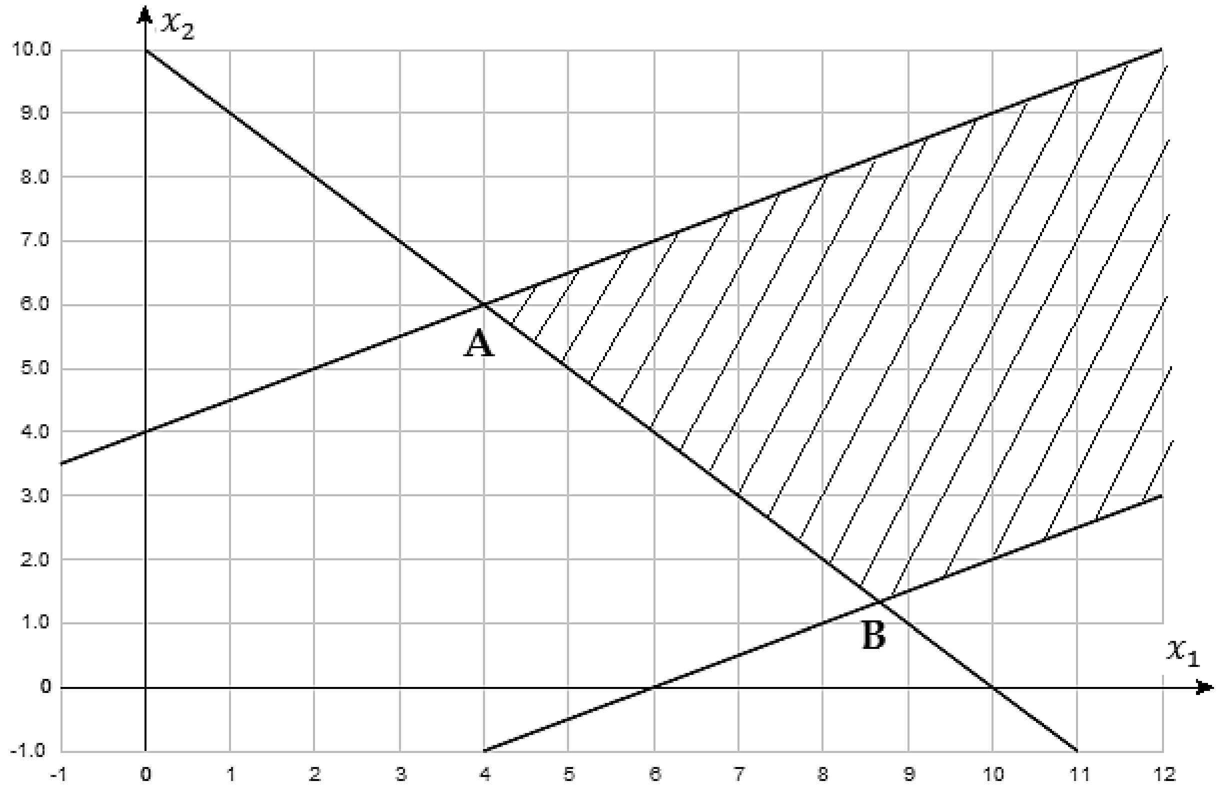

рис. 22.7

После того как мы нашли точки $A(4;6)$ и $B(\frac{26}{3};\frac{4}{3})$, в которых функция может принимать минимальное значение, вычислим ее значения в этих точках:

$$F(A) = F(4;6) = -\frac{2}{13}; \quad F(B) = F\left(\frac{26}{3};\frac{4}{3}\right) = \frac{57}{32};$$

Так как значение $F(A) < F(B)$, то наименьшее значение функция принимает в точке A.

Ответ. $F_{min} = -\frac{2}{13}$.

Задача 22.4. Используя геометрическую интерпретацию задачи дробно-линейного программирования, найти решение следующей задачи:

$$F = \frac{5x_1 + 3x_2}{x_1 + 3x_2} \to max;$$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 12, \\ -x_1 + 6x_2 + x_4 = 18, \\ x_1 - 3x_2 + x_5 = 3. \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. (*)$$

Решение. Система ограничений данной задачи задана в виде равенств. Приведем ее к системе ограничений, заданную в виде неравенств:

$$\begin{cases} x_3 = 2x_1 + 3x_2 - 12, \\ x_4 = x_1 - 6x_2 + 18\ , \\ x_5 = -x_1 + 3x_2 + 3\ . \end{cases}$$

Из $(*)$ получим:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 12 \geq 0, \\ x_1 - 6x_2 + 18 \geq 0\ , \\ -x_1 + 3x_2 + 3 \geq 0\ . \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 12, \\ -x_1 + 6x_2 \leq 18\ , \\ x_1 - 3x_2 \leq 3\ . \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Найдем многоугольник решений задачи:

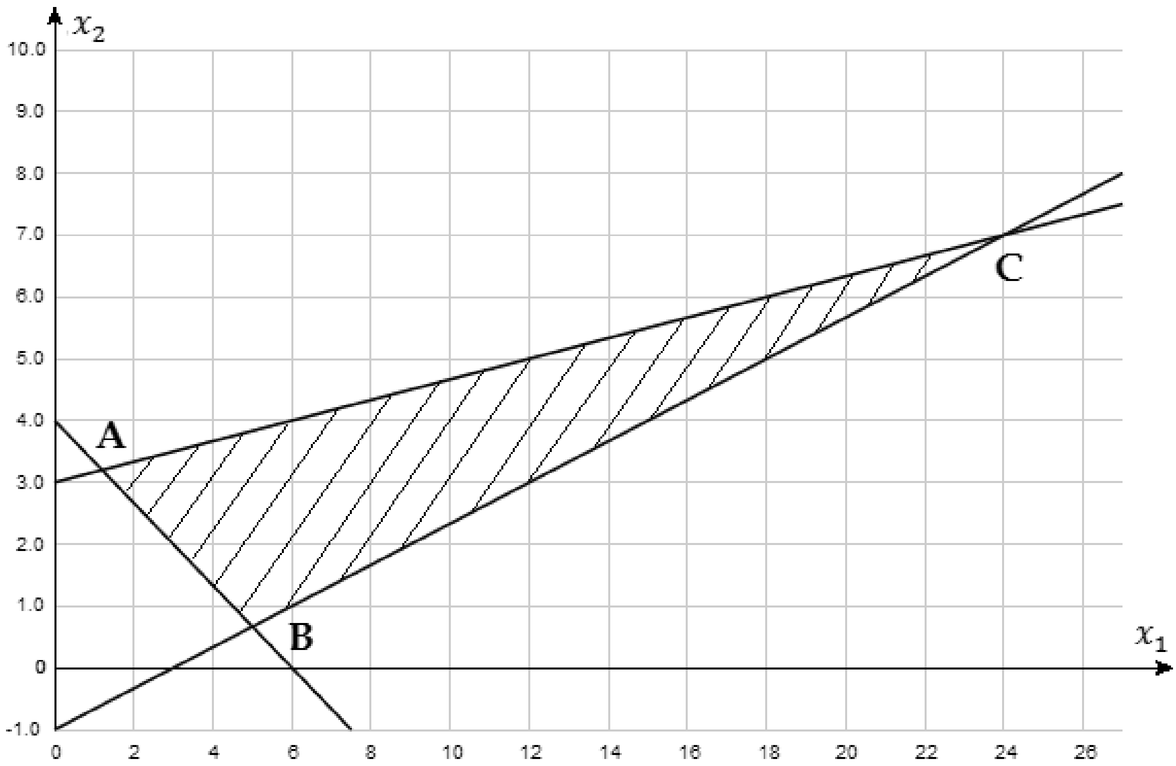

рис. 22.8

После того как мы нашли точки $A(\frac{6}{5};\frac{16}{5})$, $B(5;\frac{2}{3})$ и $C(24;7)$ в которых функция может принимать минимальное значение, вычислим ее значения в этих точках:

$$F(A) = F\left(\frac{6}{5};\frac{16}{5}\right) = \frac{13}{9};\quad F(B) = F\left(5;\frac{2}{3}\right) = \frac{27}{7};\quad F(C) = F(24;7) = \frac{47}{15};$$

Итак, наибольшее значение функция принимает в точке *B*.

Теперь выразим x_3, x_4, x_5 через x_1 и x_2.

$$\begin{cases} x_1 = 5, \\ x_2 = \frac{2}{3}, \\ x_3 = 2x_1 + 3x_2 - 12 = 0, \\ x_4 = x_1 - 6x_2 + 18 = 19, \\ x_5 = -x_1 + 3x_2 + 3 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, получаем, что $F_{max} = F\left(5;\frac{2}{3};0;19;0\right) = \frac{27}{7}$.

Ответ. $F_{max} = F\left(5;\frac{2}{3};0;19;0\right) = \frac{27}{7}$.

23. Сведение задачи дробно-линейного программирования к задаче линейного программирования.

Сформулированная ранее задача (22.4)-(22.6) может быть сведена к задаче линейного программирования. Для этого примем обозначение:

$$y_0 = \left\{\sum_{j=1}^{n} d_j\, x_j\right\}^{-1} \tag{23.1}$$

и введем новые переменные

$$y_j = y_0 x_j \ \ (j = 1, \dots, n) \tag{23.2}$$

или

$$x_j = \frac{y_j}{y_0}.$$

Из (23.1) имеем

$$y_0 = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j}$$

или

$$y_0 \sum_{j=1}^{n} d_j\, x_j = 1. \tag{23.3}$$

Подставим в выражение (23.3) $x_j = \frac{y_j}{y_0}$.

Получим $\sum_{j=1}^{n} d_j y_j = 1$.

Используя введенные обозначения, исходную задачу (22.4)-(22.6) сведем к следующей: найти максимум функции

$$F^* = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j \tag{23.4}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j - b_i y_0 = 0, \quad (i = 1, \dots, m) \tag{23.5}$$

$$\sum_{j=1}^{n} d_j\, y_j = 1, \qquad (23.6)$$

$$y_j \geq 0 \;\; (j = 1, \dots, n) \text{ и } y_0 \geq 0. \qquad (23.7)$$

Задача (23.4)-(23.7) является задачей линейного программирования, а значит, ее решение можно найти любым известным методом. Зная оптимальный план этой задачи, на основе соотношений (23.2) получаем оптимальный план исходной задачи (22.4)-(22.6).

Таким образом, процесс поиска решения задачи дробно-линейного программирования включает в себя следующие этапы:

1. Сводят задачу (22.4)-(22.6) к задаче линейного программирования (23.4)-(23.7).
2. Решают и находят решение задачи (23.4)-(23.7).
3. Пользуясь соотношениями (23.2), определяют оптимальный план задачи (22.4)-(22.6) и находят максимальное значение функции (22.4).

Задача 23.1. Используя метод сведения задачи дробно-линейного программирования к задаче линейного программирования, найти решение следующей задачи:

$$F = \frac{3x_1 - x_2}{x_1 + x_2} \to max \qquad (23.8)$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \;\; = 5, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 7, \\ 3x_1 - x_2 + x_5 = 11, \end{cases} \qquad (23.9)$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \qquad (23.10)$$

Решение. Сведем данную задачу к задаче линейного программирования. Для этого обозначим $y_0 = \dfrac{1}{x_1 + x_2}$ и введем новые переменные $y_j = y_0 x_j \; (j = 1, \dots, 5)$.

В результате приходим к следующей задаче:

$$F^* = 3y_1 - y_2 \to max \tag{23.11}$$

при условиях

$$\begin{cases} y_1 + y_2 - y_3 & & & -5y_0 = 0, \\ -y_1 + 3y_2 & +y_4 & & -7y_0 = 0, \\ 3y_1 - y_2 & & +y_5 & -11y_0 = 0, \\ y_1 + y_2 & & & = 1, \end{cases} \tag{23.12}$$

$$y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0. \tag{23.13}$$

Задача (23.11)-(23.13) является задачей линейного программирования.

Домножим первое уравнение системы ограничений на (-1):

$$\begin{cases} -y_1 - y_2 + y_3 & & & +5y_0 = 0, \\ -y_1 + 3y_2 & +y_4 & & -7y_0 = 0, \\ 3y_1 - y_2 & & +y_5 & -11y_0 = 0, \\ y_1 + y_2 & & & = 1, \end{cases} \tag{23.14}$$

В системе (23.14) рассмотрим векторы из коэффициентов при неизвестных:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ -11 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Среди векторов $A_1, \dots, A_6$ только три единичных A_3, A_4 и A_5. Поэтому в левую часть четвертого уравнения системы ограничений (23.14) задачи добавим дополнительную неотрицательную переменную r_1 и рассмотрим расширенную задачу, состоящую в максимизации функции

$$F^* = 3y_1 - y_2 - Mr_1$$

при условиях

$$\begin{cases} -y_1 - y_2 + y_3 & & & +5y_0 & = 0, \\ -y_1 + 3y_2 & +y_4 & & -7y_0 & = 0, \\ 3y_1 - y_2 & & +y_5 & -11y_0 & = 0, \\ y_1 + y_2 & & & & +r_1 = 1, \end{cases}$$

$$y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, r_1 \geq 0,$$

или в векторной форме:

$$A_1y_1 + A_2y_2 + A_3y_3 + A_4y_4 + A_5y_5 + A_6y_0 + A_7r_1 = A_0.$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ -11 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, A_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Векторы A_3, A_4, A_5 и A_7 образуют искусственный базис.

Приравнивая свободные неизвестные к нулю: $y_1 = y_2 = y_0 = 0$, получаем первоначальный опорный план расширенной задачи:
$Y_0 = (0;0;0;0;0;0;1)$.

Составим симплекс-таблицу (таблица 23.1), в которой 6 строк, и по оценкам, содержащимся в ней, проверим план на оптимальность.

Значения оценок, записанных в 5-ой и в 6-ой строках находим по формулам (6.28):

$F^*(Y_0) = C_б Y_0 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (-M) \cdot 1 = -M$

$F_1^* - C_1 = C_б Y_1 - C_1 = 0 \cdot (-1) + 0 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 + (-M) \cdot 1 - 3 = -3 - M$

$F_2^* - C_2 = C_б Y_2 - C_2 = 1 - M$ и т.д.,

т.е. если M заранее не фиксировано, то оценки $F_j^* - C_j$ являются линейными функциями величины M, причем функция состоит из двух слагаемых, одно из которых зависит от M, а второе – не зависит.

Для удобства вычислений в 5-ую строку запишем слагаемое, независимое от M, а в 6-ую строку – только коэффициенты при M, которые и позволяют сравнить оценки между собой.

Таблица 23.1

i	базис	$C_б$	A_0	$C_1 = 3$	$C_2 = -1$	$C_3 = 0$	$C_4 = 0$	$C_5 = 0$	$C_6 = 0$	$C_7 = -M$
				$\boldsymbol{A_1}$	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
1	A_3	0	0	**-1**	-1	1	0	0	5	0
2	A_4	0	0	**-1**	3	0	1	0	-7	0
3	$\boldsymbol{A_5}$	**0**	**0**	**3**	**-1**	**0**	**0**	**1**	**-11**	**0**
4	A_7	-*M*	1	**1**	1	0	0	0	0	1
5	$F_j^* - C_j$		0	**-3**	1	0	0	0	0	0
6			-1	**-1**	-1	0	0	0	0	0

В 6-ой строке имеются две отрицательные оценки -1 и -1, поэтому опорный план Y_0 расширенной задачи не является оптимальным и его можно улучшить, включив в базис вектор, которому соответствует минимум строки 6. Т.к. минимальных оценки две, то в базис включаем вектор, которому соответствует $max\ C_j$, т.е. в нашем случае вектор A_1.

Таким образом, в базис включается вектор A_1, а исключается вектор, которому соответствует $min\left(\frac{0}{3}; \frac{1}{1}\right) = min(0; 1) = 0$, т.е. вектор A_5.

Следовательно, разрешающим элементом служит число 3, стоящее на пересечении третей строки и первого столбца, третья строка и первый столбец являются направляющими; необходимо вектор A_1 включить в базис, а вектор A_5 исключить.

Составим вторую симплекс-таблицу (таблица 23.2).

Подсчитаем новые элементы направляющей строки. Для этого старые элементы направляющей строки разделим на разрешающий элемент (на 3), а остальные элементы таблицы посчитаем по правилу прямоугольника.

Таблица 23.2

i	базис	$C_б$	A_0	$C_1 = 3$	$C_2 = -1$	$C_3 = 0$	$C_4 = 0$	$C_5 = 0$	$C_6 = 0$	$C_7 = -M$
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	$\boldsymbol{A_6}$	A_7
1	$\boldsymbol{A_3}$	**0**	**0**	**0**	**-4/3**	**1**	**0**	**1/3**	**4/3**	**0**
2	A_4	0	0	0	8/3	0	1	1/3	**-32/3**	0
3	A_1	3	0	1	-1/3	0	0	1/3	**-11/3**	0
4	A_7	-*M*	1	0	4/3	0	0	-1/3	**11/3**	1
5	$F_j^* - C_j$		0	0	0	0	0	1	**-11**	0
6			-1	0	-4/3	0	0	1/3	**-11/3**	0

Текущий опорный план не оптимален, так как в 6-ой строке имеются отрицательные оценки $-\frac{4}{3}$ и $-\frac{11}{3}$. Включим в базис вектор, которому соответствует минимум строки 6, т.е. вектор A_6, а исключаем вектор, которому соответствует $min\left(\frac{0}{4/3};\frac{1}{11/3}\right) = min\left(0;\frac{3}{11}\right) = 0$, т.е. вектор A_3. Таким образом, разрешающим элементом служит число $\frac{4}{3}$. Следуя алгоритму составления предыдущей симплекс-таблицы, составим третью симплекс-таблицу (таблица 23.3). Продолжаем до тех пор, пока в 6-ой строке симплекс-таблицы не будет отрицательных коэффициентов.

Таблица 23.3

i	базис	$C_б$	A_0	$C_1 = 3$	$C_2 = -1$	$C_3 = 0$	$C_4 = 0$	$C_5 = 0$	$C_6 = 0$	$C_7 = -M$
				A_1	$\boldsymbol{A_2}$	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
1	A_6	0	0	0	**-1**	3/4	0	1/4	1	0
2	A_4	0	0	0	**-8**	8	1	3	0	0
3	A_1	3	0	1	**-4**	11/4	0	5/4	0	0
4	$\boldsymbol{A_7}$	**-*M***	**1**	**0**	**5**	**-11/4**	**0**	**-5/4**	**0**	**1**
5	$F_j^* - C_j$		0	0	**-11**	33/4	0	15/4	0	0
6			-1	0	**-5**	11/4	0	5/4	0	0

Таблица 23.4

i	базис	$C_б$	A_0	$C_1 = 3$	$C_2 = -1$	$C_3 = 0$	$C_4 = 0$	$C_5 = 0$	$C_6 = 0$	$C_7 = -M$
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
1	A_6	0	1/5	0	0	1/5	0	0	1	1/5
2	A_4	0	8/5	0	0	18/5	1	1	0	8/5
3	A_1	3	4/5	1	0	11/20	0	1/4	0	4/5
4	A_2	-1	1/5	0	1	-11/20	0	-1/4	0	1/5
5	$F_j^* - C_j$		11/5	0	0	11/5	0	1	0	11/5
6			0	0	0	0	0	0	0	1

В результате третьей итерации с разрешающим элементом 5 из базиса исключен искусственный вектор A_7, поэтому в 6-ой строке таблицы 23.4 все оценки, кроме искусственного вектора, обратились в ноль.

Опорный план $Y = (y_1 = \frac{4}{5}; y_2 = \frac{1}{5}; y_3 = 0; y_4 = \frac{8}{5}; y_5 = 0; y_0 = \frac{1}{5})$, полученный в таблице 23.4 является оптимальным планом задачи (23.11)-(23.13), так как в 5-ой строке нет отрицательных оценок.

Учитывая, что $y_j = y_0 x_j$ находим оптимальный план задачи (23.8)-(23.10):

$X = (4;\ 1;\ 0;\ 8;\ 0)$. При этом плане $F_{max} = \frac{11}{5}$.

Задача 23.2. Используя метод сведения задачи дробно-линейного программирования к задаче линейного программирования, найти решение следующей задачи:

$$F = \frac{8x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4} \to max \tag{23.15}$$

при условиях

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \le 300, \\ x_1 + \quad\quad 2x_3 + x_4 \le 70, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \quad\quad \le 340, \end{cases} \tag{23.16}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0. \tag{23.17}$$

Решение. Сведем задачу (23.15)-(23.17) к задаче линейного программирования. Для этого обозначим

$$y_0 = \frac{1}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}$$

и введем новые переменные $y_j = y_0 x_j \ (j = 1, \dots, 4)$.

В результате приходим к следующей задаче:

$$F^* = 8y_1 + 3y_2 + 2y_3 + y_4 \to max \qquad (23.18)$$

при условиях

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + y_3 + 3y_4 - 300y_0 \le 0, \\ y_1 + \quad 2y_3 + y_4 \quad - 70y_0 \ \le 0, \\ y_1 + 2y_2 + y_3 \qquad - 340y_0 \le 0, \\ y_1 + y_2 + y_3 + \ y_4 \qquad\qquad = 1, \end{cases} \qquad (23.19)$$

$$y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0. \qquad (23.20)$$

Задача (23.18)-(23.20) является задачей линейного программирования.

Перейдем в системе ограничений (23.19) от неравенств к уравнениям, прибавляя к левым частям первого, второго и третьего уравнения неотрицательные переменные, в результате чего придем к задаче в следующем виде:

$$F^* = 8y_1 + 3y_2 + 2y_3 + y_4 + 0 \cdot y_5 + 0 \cdot y_6 + 0 \cdot y_7 \to max \qquad (23.21)$$

при условиях

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + y_3 + 3y_4 - 300y_0 + y_5 \qquad = 0, \\ y_1 + \quad 2y_3 + y_4 \quad - 70y_0 \quad + \ y_6 \quad = 0, \\ y_1 + 2y_2 + y_3 \qquad - 340y_0 \qquad + y_7 = 0, \\ y_1 + y_2 + y_3 + \ y_4 \qquad\qquad\qquad = 1, \end{cases} \qquad (23.22)$$

$$y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7 \ge 0. \qquad (23.23)$$

В системе уравнений (23.22) рассмотрим векторы из коэффициентов при неизвестных:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A_8 = \begin{pmatrix} -300 \\ -70 \\ -340 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Среди векторов $A_1, \dots, A_8$ только три единичных A_5, A_6 и A_7. Поэтому в левую часть четвертого уравнения системы ограничений (23.22) задачи добавим дополнительную неотрицательную переменную r_1 и рассмотрим расширенную задачу, состоящую в максимизации функции

$$F^* = 8y_1 + 3y_2 + 2y_3 + y_4 + 0 \cdot y_5 + 0 \cdot y_6 + 0 \cdot y_7 - Mr_1$$

при условиях

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + y_3 + 3y_4 + y_5 \qquad - 300y_0 \qquad = 0, \\ y_1 + \qquad 2y_3 + y_4 + \qquad y_6 \quad - 70y_0 \qquad = 0, \\ y_1 + 2y_2 + y_3 + \qquad\qquad y_7 - 340y_0 \qquad = 0, \\ y_1 + y_2 + y_3 + \ y_4 \qquad\qquad\qquad\qquad + r_1 = 1, \end{cases}$$

$$y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, r_1 \geq 0,$$

или в векторной форме:

$$A_1y_1 + A_2y_2 + A_3y_3 + A_4y_4 + A_5y_5 + A_6y_6 + A_7y_7 + A_8y_0 + A_9r_1 = A_0.$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A_8 = \begin{pmatrix} -300 \\ -70 \\ -340 \\ 0 \end{pmatrix}, A_9 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, A_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Векторы A_5, A_6, A_7 и A_9 образуют искусственный базис. Приравнивая свободные неизвестные к нулю: $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = y_0 = 0$, получаем первоначальный опорный план расширенной задачи:

$Y_0 = (0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 1)$.

Составим симплекс-таблицу (таблица 23.5), в которой 6 строк, и по оценкам, содержащимся в ней, проверим план на оптимальность.

Таблица 23.5

i	базис	$C_б$	A_0	$C_1 = 8$	$C_2 = 3$	$C_3 = 2$	$C_4 = 1$	$C_5 = 0$	$C_6 = 0$	$C_7 = 0$	$C_8 = 0$	$C_9 = -M$
				$\boldsymbol{A_1}$	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9
1	$\boldsymbol{A_5}$	**0**	**0**	**2**	**1**	**1**	**3**	**1**	**0**	**0**	**-300**	**0**
2	A_6	0	0	**1**	0	2	1	0	1	0	-70	0
3	A_7	0	0	**1**	2	1	0	0	0	1	-340	0
4	A_9	-M	1	**1**	1	1	1	0	0	0	0	1
5	$F_j^* - C_j$		0	**-8**	-3	-2	-1	0	0	0	0	0
6			-1	**-1**	-1	-1	-1	0	0	0	0	0

В 6-ой строке имеются отрицательные оценки, поэтому опорный план Y_0 расширенной задачи не является оптимальным. Разрешающий элемент число 2, вектор A_1 включаем в базис, а вектор A_5 – исключаем.

Составим вторую симплекс-таблицу (таблица 23.6). Для этого элементы направляющей строки разделим на разрешающий элемент (на 2), а остальные элементы таблицы посчитаем по правилу прямоугольника.

Таблица 23.6

i	базис	$C_б$	A_0	$C_1 = 8$	$C_2 = 3$	$C_3 = 2$	$C_4 = 1$	$C_5 = 0$	$C_6 = 0$	$C_7 = 0$	$C_8 = 0$	$C_9 = -M$
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	$\boldsymbol{A_8}$	A_9
1	A_1	8	0	1	1/2	1/2	3/2	1/2	0	0	**-150**	0
2	$\boldsymbol{A_6}$	**0**	**0**	**0**	**-1/2**	**3/2**	**-1/2**	**-1/2**	**1**	**0**	**80**	**0**
3	A_7	0	0	0	3/2	1/2	-3/2	-1/2	0	1	**-190**	0
4	A_9	-M	1	0	1/2	1/2	-1/2	-1/2	0	0	**150**	1
5	$F_j^* - C_j$		0	0	1	2	11	4	0	0	**-1200**	0
6			-1	0	-1	-1	1	1	0	0	**-150**	0

Таблица 23.7

i	базис	$C_б$	A_0	$C_1 = 8$	$C_2 = 3$	$C_3 = 2$	$C_4 = 1$	$C_5 = 0$	$C_6 = 0$	$C_7 = 0$	$C_8 = 0$	$C_9 = -M$
				A_1	$\boldsymbol{A_2}$	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9
1	A_1	8	0	1	**-7/16**	53/16	9/16	-7/16	15/8	0	0	0
2	A_8	0	0	0	**-1/160**	3/160	-1/160	-1/160	1/80	0	1	0
3	$\boldsymbol{A_7}$	**0**	**0**	**0**	**5/16**	**65/16**	**-43/16**	**-27/16**	**19/8**	**1**	**0**	**0**
4	A_9	-M	1	0	**23/16**	-37/16	7/16	7/16	-15/8	0	0	1
5	$F_j^* - C_j$		0	0	**-13/2**	49/2	7/2	-7/2	15	0	0	0
6			-1	0	**-23/16**	37/16	-7/16	-7/16	15/8	0	0	0

Таблица 23.8.

i	базис	$C_б$	A_0	$C_1 = 8$	$C_2 = 3$	$C_3 = 2$	$C_4 = 1$	$C_5 = 0$	$C_6 = 0$	$C_7 = 0$	$C_8 = 0$	$C_9 = -M$
				A_1	A_2	A_3	$\boldsymbol{A_4}$	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9
1	A_1	8	0	1	0	9	**-16/5**	-14/5	26/5	7/5	0	0
2	A_8	0	0	0	0	1/10	**-3/50**	-1/25	3/50	1/50	1	0
3	A_2	3	0	0	1	13	**-43/5**	-27/5	38/5	16/5	0	0
4	$\boldsymbol{A_9}$	**-M**	**1**	**0**	**0**	**-21**	**64/5**	**41/5**	**-64/5**	**-23/5**	**0**	**1**
5	$F_j^* - C_j$		0	0	0	109	**-262/5**	-193/5	322/5	104/5	0	0
6			-1	0	0	21	**-64/5**	-41/5	64/5	23/5	0	0

Таблица 23.9

i	базис	$C_б$	A_0	$C_1 = 8$	$C_2 = 3$	$C_3 = 2$	$C_4 = 1$	$C_5 = 0$	$C_6 = 0$	$C_7 = 0$	$C_8 = 0$	$C_9 = -M$
				A_1	A_2	A_3	A_4	$\boldsymbol{A_5}$	A_6	A_7	A_8	A_9
1	A_1	8	1/4	1	0	15/4	0	**-3/4**	2	1/4	0	1/4
2	A_8	0	3/640	0	0	1/640	0	**-1/640**	0	-1/640	1	3/640
3	A_2	3	43/64	0	1	-71/64	0	**7/64**	-1	7/64	0	43/64
4	$\boldsymbol{A_4}$	**1**	**5/64**	**0**	**0**	**-105/64**	**1**	**41/64**	**-1**	**-23/64**	**0**	**5/64**
5	$F_j^* - C_j$		131/32	0	0	737/32	0	**-161/32**	12	63/32	0	131/32
6			0	0	0	0	0	**0**	0	0	0	1

В результате четвертой итерации с разрешающим элементом 64/5 из базиса исключен искусственный вектор A_9, поэтому в 6-ой строке таблицы 23.9 все оценки, кроме искусственного вектора, обратились в ноль.

Опорный план $\bar{Y}_0^4 = (\frac{1}{4};\frac{43}{64};0;\frac{5}{64};\ 0;\ 0;\ 0;\frac{3}{640};0)$, полученный в таблице 23.9, является планом задачи (23.18)-(23.20), хотя и не оптимальным, так как в 5-ой строке имеется отрицательная оценка.

Дальнейший итерационный процесс проводим по 5-ой строке, 6-ую строку из дальнейшего рассмотрения исключаем, а величину *M* включаем в оценки для искусственных векторов.

Таблица 23.10

i	базис	$C_б$	A_0	$C_1 = 8$	$C_2 = 3$	$C_3 = 2$	$C_4 = 1$	$C_5 = 0$	$C_6 = 0$	$C_7 = 0$	$C_8 = 0$	$C_9 = -M$
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	$\boldsymbol{A_7}$	A_8	A_9
1	A_1	8	14/41	1	0	75/41	48/41	0	34/41	**-7/41**	0	14/41
2	A_8	0	1/205	0	0	-1/410	1/410	0	-1/410	**-1/410**	1	1/205
3	$\boldsymbol{A_2}$	**3**	**27/41**	**0**	**1**	**-34/41**	**-7/41**	**0**	**-34/41**	**7/41**	**0**	**27/41**
4	A_5	0	5/41	0	0	-105/41	64/41	1	-64/41	**-23/41**	0	5/41
5	$F_j^* - C_j$		193/41	0	0	416/41	322/41	0	170/41	**-35/41**	0	193/41 +M

Таблица 23.11

i	базис	$C_б$	A_0	$C_1 = 8$	$C_2 = 3$	$C_3 = 2$	$C_4 = 1$	$C_5 = 0$	$C_6 = 0$	$C_7 = 0$	$C_8 = 0$	$C_9 = -M$
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9
1	A_1	8	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1
2	A_8	0	1/70	0	1/70	-1/70	0	0	-1/70	0	1	1/70
3	A_7	0	27/7	0	41/7	-34/7	-1	0	-34/7	1	0	27/7
4	A_5	0	16/7	0	23/7	-37/7	1	1	-30/7	0	0	16/7
5	$F_j^* - C_j$		8	0	5	6	7	0	0	0	0	8+M

В шестой итерации (таблица 23.11) находим оптимальный план задачи (23.18)-(23.20): $Y = (y_1 = 1; y_2 = y_3 = y_4 = 0; y_0 = \frac{1}{70})$. Учитывая, что $y_j = y_0 x_j$ находим оптимальный план задачи (23.15)-(23.17):
$X = (70;\ 0;\ 0;\ 0)$. При этом плане $F_{max} = 8$.

24. Целочисленное линейное программирование. Графический метод решения

Целочисленное программирование ориентировано на решение задач математического программирования, в которых все или некоторые переменные должны принимать только целочисленные значения. Задача называется **полностью** целочисленной, если условие целочисленности наложено на все ее переменные; когда это условие относится лишь к некоторым переменным, задача называется **частично** целочисленной. Если при этом целевая функция и функции, входящие в ограничения, линейные, то говорят, что данная задача является задачей целочисленного линейного программирования (ЦЛП).

Целочисленные задачи математического программирования возникают различными путями:

1. Существуют задачи линейного программирования, которые формально к целочисленным не относятся, но при соответствующих исходных данных всегда обладают целочисленным планом. Примеры таких задач - транспортная задача и ее модификации (задачи о назначениях, о потоках в сетях).
2. Толчком к изучению целочисленных задач в собственном смысле слова явилось рассмотрение задач линейного программирования, в которых переменные представляли физически неделимые величины. Они были названы задачами с неделимостью. Таковы, например, задачи об оптимизации комплекса средств доставки грузов, о нахождении минимального порожнего пробега автомобилей при выполнении заданного плана перевозок, об определении оптимального машинного парка и его оптимального распределения по указанным работам при условии минимизации суммарной стоимости (машинного парка и производимых работ), о нахождении минимального количества судов для осуществления данного графика перевозок и т. п.

3. Другим важным толчком к построению теории целочисленного программирования стал новый подход к некоторым экстремальным комбинаторным задачам. В них требуется найти экстремум целочисленной линейной функции, заданной на конечном множестве элементов. Такие задачи принято называть задачами с альтернативными переменными. В качестве примеров можно назвать задачи коммивояжера (бродячего торговца), об оптимальном назначении, теории расписания, или календарного планирования, и задачи с дополнительными логическими условиями (например, типа «или - или», «если - то» и т.п.).

Исторически первой задачей целочисленного типа является опубликованная в 1932г. венгерским математиком Е.Эгервари задача о назначении персонала. В 1955г. на Втором симпозиуме по линейному программированию была рассмотрена задача о бомбардировщике, известная как задача о ранце.

В большинстве случаев целочисленные задачи сильно отличаются от своих непрерывных аналогов и требуют для решения специальных методов.

Условно методы решения задач целочисленного программирования можно разделить на три основных группы: методы отсечения, комбинаторные методы, приближенные методы.

При наличии в задаче целочисленного линейного программирования двух переменных, а в системе ограничений неравенств задача может быть решена **графическим методом**.

В системе координат $X_1 0 X_2$ находят область допустимых решений, строят вектор C и линию уровня. Перемещая линию уровня по направлению C для задач на максимум, определяют наиболее удаленную от начала координат точку и ее координаты.

В случае, когда координаты этой точки нецелочисленные, в области допустимых решений строят целочисленную решетку и находят на ней такие целые числа x_1 и x_2, которые удовлетворяют системе ограничений и при которых значение целевой функции наиболее близко к экстремальному нецелочисленному решению. Координаты такой вершины и являются целочисленным решением.

Аналогично решается задача на минимум. Целочисленному минимуму целевой функции будет соответствовать координата вершины целочисленной решетки, лежащей в области допустимых решений, наиболее близкой к началу координат в направлении вектора *C*.

Рассмотрим алгоритм решения задачи целочисленного программирования на конкретном примере.

Задача 24.1. Для улучшения финансового положения фирма приняла решение об увеличении выпуска конкурентоспособной продукции, для чего в одном из цехов необходимо установить дополнительное оборудование, требующее $\frac{19}{3}$ м^2 площади. На приобретение дополнительного оборудования фирма выделила 10 тыс. ден. ед., при этом она может купить оборудование двух видов. Приобретение одного комплекта оборудования 1-го вида стоит 1 тыс. ден. ед., 2-го вида — 3 тыс. ден. ед. Приобретение одного комплекта оборудования 1-го вида позволяет увеличить выпуск продукции в смену на 2 ед., а одного комплекта оборудования 2-го вида — на 4 ед. Зная, что для установки одного комплекта оборудования 1-го вида требуется 2м^2 площади, а для оборудования 2-го вида — 1м^2 площади, определить такой набор дополнительного оборудования, который дает возможность максимально увеличить выпуск продукции.

Решение. Предположим, что фирма приобретает x_1 комплектов дополнительного оборудования 1-го вида и x_2 комплектов оборудования 2-го вида.

Математическая модель задачи будет иметь вид:

$$F(x) = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le \dfrac{19}{3} \\ x_1 + 3x_2 \le 10 \end{cases},$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_1, x_2 \in Z.$$

Получим задачу целочисленного программирования. Так как неизвестных только два (x_1 и x_2), то найдем ее решение графическим способом (см. рис.24.1).

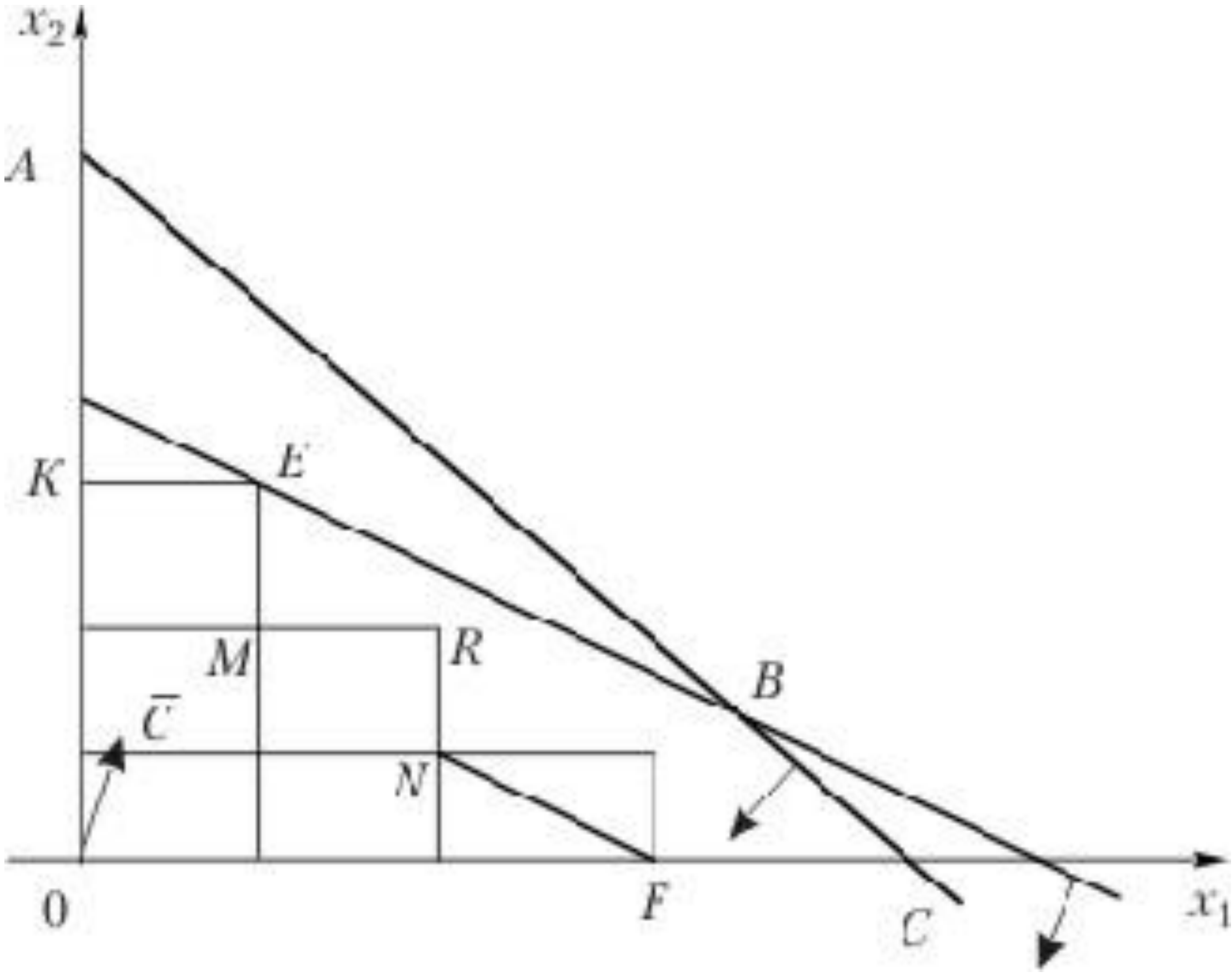

рис. 24.1

OABC — область допустимых решений (ОДР). Оптимальное решение задача имеет в точке ***B*** (9/5,41/15) при этом максимальное значение целевой функции составляет 218/15 ед. Полученное оптимальное решение не целочисленное.

Условию целочисленности переменных удовлетворяют координаты 12 точек, принадлежащих ОДР. Чтобы найти точку, координаты которой определяют решение исходной задачи, заменим многоугольник ***OABC*** многоугольником ***OKEMNF***, содержащим все допустимые точки с целочисленными координатами.

Строим вектор $\bar{C}(2,4)$. Линию уровня перемещаем по направлению $\bar{C}$, получим в точке $E(1,\ 3)$ максимальное значение целевой функции $F = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 = 14$ (ед.).

Ответ. Фирме следует приобрести один комплект оборудования 1-го вида и три комплекта оборудования 2-го вида, что обеспечит ей при имеющихся ограничениях на производственные площади и денежные средства максимальное увеличение выпуска продукции, равное 14 ед. в смену.

Итак, один из простейших подходов при решении задач целочисленного программирования заключается в решении непрерывной модификации целочисленной задачи с последующим округлением координат полученного оптимума до допустимых целых значений. Округление в данном случае есть не что иное, как приближение. Например, если получено решение непрерывной задачи, содержащее число 10,1, то можно приближенно заменить это число на 10 (т.е. округлить до 10). Однако нет гарантии, что округленное решение будет удовлетворять ограничениям. Например, для линейной задачи с ограничениями в виде равенств округленное решение всегда не удовлетворяет этим ограничениям. Как следует из теории линейного программирования, округленное решение не может быть допустимым, поскольку это означало бы, что один и тот же базис (при условии равенства нулю небазисных переменных) определяет два различных решения задачи.

Приведем пример, который показывает возможную несостоятельность подхода, основанного на округлении оптимального решения задачи линейного программирования, полученной из исходной целочисленной задачи путем отбрасывания требований целочисленности.

Задача 24.2. Решить следующую задачу ЦЛП

$$F(x) = -5x_1 - 2x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 11x_1 + 4x_2 \le 33 \\ -x_1 + 2x_2 \le 8 \end{cases},$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_1, x_2 \in Z.$$

Решение. Отбросив требование целочисленности переменных, получим задачу линейного программирования. Решением данной задачи является точка $x^* = (x_1^*, x_2^*) = (1\frac{4}{13}, 4\frac{17}{26})$. Если рассматривать все возможные округления компонент оптимальной точки, то получим четыре возможных целочисленных точки (1,4), (2,4), (1,5), (2,5). Во-первых, из этих точек только точка (1,4) является допустимой для исходной задачи. А во-вторых, она находится далеко от истинного оптимального решения исходной задачи $x^* = (x_1^*, x_2^*) = (3,0)$.

Невозможно обосновать какое-либо утверждение относительно близости целочисленного решения и решения задачи без требований целочисленности, поскольку можно построить пример, показывающий, что данный подход может давать сколь угодно плохие приближения к решению исходной целочисленной задачи.

Эффект округления не слишком заметен, лишь когда искомые параметры задачи подчинены относительно нежестким ограничениям. Однако типичными для задач целочисленного программирования являются ограничения-равенства, достаточно жестко определяющие поведение релевантных переменных. Примером может служить условие $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$, где $x_i = (0,1)$ для всех *i*. В такой ситуации процедура округления не имеет смысла и необходимо обратиться к другим алгоритмам решения.

Несостоятельность округления подчеркивается также следующими соображениями. Несмотря на то, что целочисленные переменные обычно выражают количество неделимых предметов (например, машин, людей, кораблей), возможны и другие типы спецификации этих переменных. Так, решение о финансировании некоторого проекта представляется булевой переменной x (x=0, если проект отклоняется, и x=1, если проект принимается). В этом случае бессмысленно оперировать дробными значениями величины x, и процедура округления является логически неприемлемой.

Огромное количество экономических задач носит дискретный, чаще всего целочисленный характер, что связано, как правило, с физической неделимостью многих элементов расчета: например, нельзя построить два с половиной завода, купить полтора автомобиля и т.д. В ряде случаев такие задачи решаются обычными методами, например, симплексным методом, с последующим округлением до целых чисел. Однако такой подход оправдан, когда отдельная единица составляет очень малую часть всего объема (например, товарных запасов); в противном случае он может внести значительные искажения в действительно оптимальное решение. Поэтому разработаны специальные методы решения целочисленных задач, например, метод ветвей и границ.

25. Метод ветвей и границ

Пусть
$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \tag{25.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \; i = 1,\dots,m, \tag{25.2}$$

$$x_j \ge 0, \; x_j \in Z, \; j = 1,\dots,n. \tag{25.3}$$

Первоначально находим симплексным методом или методом искусственного базиса оптимальный план задачи без учета целочисленности переменных.

Если среди компонент этого плана нет дробных чисел, то тем самым найдено искомое решение данной задачи.

Если среди компонент плана имеются дробные числа, то необходимо осуществить переход к новым планам, пока не будет найдено решение задачи.

Метод ветвей и границ основан на предположении, что наш оптимальный нецелочисленный план дает значение функции, большее, чем всякий последующий план перехода.

Пусть переменная x_i^* в плане – дробное число. Тогда в оптимальном плане ее значение будет, по крайней мере:

1) либо меньше или равно ближайшему меньшему целому числу K_i^*;

2) либо больше или равно ближайшему большему целому числу $K_i^* + 1$.

Определяя эти числа, находим симплексным методом решение двух задач :линейного программирования:

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \tag{25.4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i = 1,\dots,m, \tag{25.5}$$

$$x_i^* \le K_i^* \tag{25.6}$$

$$x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ j = 1,\dots,n. \tag{25.7}$$

и

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \tag{25.8}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i = 1,\dots,m, \tag{25.9}$$

$$x_i^* \ge K_i^* + 1 \tag{25.10}$$

$$x_j \ge 0,\ x_j \in Z,\ j = 1,\dots,n. \tag{25.11}$$

Возможны четыре случая при решении этой пары задач:

1. Одна из задач неразрешима, а другая имеет целочисленный оптимальный план. Тогда этот план и значение целевой функции дают решение исходной задачи.
2. Одна из задач неразрешима, а другая имеет нецелочисленный оптимальный план. Тогда рассматриваем вторую задачу и в ее оптимальном плане выбираем одну из компонент, значение которой равно дробному числу и строим две задачи, аналогичные предыдущим.
3. Обе задачи разрешимы. Одна из задач имеет оптимальный целочисленный план, а в оптимальном плане другой задачи есть дробные числа. Тогда вычисляем значения целевой функции от планов и сравниваем их между собой. Если на целочисленном оптимальном плане значение целевой функции больше или равно ее значению на

плане, среди компонент которого есть дробные числа, то данный целочисленный план является оптимальным для исходной задачи и дает искомое решение.

4. Обе задачи разрешимы, и среди оптимальных планов обеих задач есть дробные числа. Тогда рассматриваем ту из задач, для которой значение целевой функции является наибольшим. И строим две задачи.

Алгоритм метода ветвей и границ:

1. Находим решение задачи линейного программирования без учета целочисленности.
2. Составляет дополнительные ограничения на дробную компоненту плана.
3. Находим решение двух задач с ограничениями на компоненту.
4. Строим в случае необходимости дополнительные ограничения, согласно возможным четырем случаям получаем оптимальный целочисленный план либо устанавливаем неразрешимость задачи.

Задача 25.1. Решить следующую задачу ЦЛП

$$F = 2x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + x_3 = 24 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_4 = 9 \\ -x_1 + 3x_3 + x_5 = 3 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in Z$$

Решение. Находим решение без учета целочисленности задачи симплексным методом: $x^* = \left(\frac{18}{5}; \frac{3}{5}; 0; 0; \frac{24}{5}\right)$, $F\left(x^*\right) = \frac{39}{5}$.

Рассмотрим следующую пару задач:

Задача 1: $F = 2x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + x_3 = 24 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_4 = 9 \\ -x_1 + 3x_3 + x_5 = 3 \end{cases}$$

$$x_1 \le 3$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0$$

и

Задача 2: $F = 2x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + x_3 = 24 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_4 = 9 \\ -x_1 + 3x_3 + x_5 = 3 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 4$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0.$$

Первая задача имеет оптимальный план $x_1^* = \left(3; \frac{3}{2}; 0; \frac{9}{2}; \frac{3}{2}\right)$, вторая – неразрешима.

Проверяем на целочисленность план первой задачи.

Это условие не выполняется, поэтому строим следующие задачи:

Задача 1.1: $F = 2x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + x_3 = 24 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_4 = 9 \\ -x_1 + 3x_3 + x_5 = 3 \end{cases}$$

$$x_1 \le 3$$

$$x_2 \le 1$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0$$

и

Задача 1.2: $F = 2x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + x_3 = 24 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_4 = 9 \\ -x_1 + 3x_3 + x_5 = 3 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 4$$

$$x_2 \geq 2$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$$

Задача 1.2 неразрешима, а задача 1.1 имеет оптимальный план $x_{1.1}^* = (3; 1; 2; 3; 3)$, на котором значение целевой функции $F\left(x_{1.1}^*\right) = 7$.

В результате получили, что исходная задача целочисленного программирования имеет оптимальный план $x^* = (3; 1; 2; 3; 3)$ и $F\left(x^*\right) = 7$.

Главный недостаток алгоритма метода ветвей и границ заключается в необходимости полностью решать задачи линейного программирования, ассоциированные с каждой из вершин многогранника допустимых решений. Для задач большой размерности это требует значительных и, в известной степени, неоправданных с практической точки зрения затрат времени.

Но, несмотря на недостатки данного метода, можно утверждать, что в настоящее время алгоритм метода ветвей и границ является наиболее надежным средством решения целочисленных задач, встречающихся в практических исследованиях. Это не означает, однако, что любая целочисленная задача может быть решена с помощью рассматриваемого метода.

26. Задача о назначениях.

Задача о назначениях - задача о наилучшем распределении некоторого числа работ между таким же числом исполнителей. При ее решении ищут оптимальное назначение из условия максимума общей производительности, которая равна сумме производительности исполнителей.

В процессе управления производством зачастую возникают задачи назначения исполнителей на различные виды работ, например: подбор кадров и назначение кандидатов на вакантные должности, распределение источников капитальных вложении между различными проектами научно-технического развития, распределение экипажей самолетов между авиалиниями.

Задача о назначениях. Пусть имеется ***n*** исполнителей, которые могут выполнять ***n*** различных работ. Известна полезность c_{ij}, связанная с выполнением ***i***-м исполнителем ***j***-й работы $j=1,...,n$, $i=1,...,n$. Необходимо назначить исполнителей на работы так, чтобы добиться максимальной полезности, при условии, что каждый исполнитель может быть назначен только на одну работу и за каждой работой должен быть закреплен только один исполнитель.

Математическая модель задачи примет вид:

$$F=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\to \max \qquad (26.1)$$

Каждый исполнитель назначается только на одну работу:

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1 \qquad (26.2)$$

На каждую работу назначается только один исполнитель:

$$\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1 \qquad (26.3)$$

Условия неотрицательности и целочисленности:

$$x_{ij} \geq 0,\, x_{ij} \in \{0,1\},\ i=1,...,n,\ j=1,...,n. \qquad (26.4)$$

При решении задачи о назначениях исходной информацией является таблица задачи о назначениях $c = \{c_{ij}\}$, элементами которой служат показатели эффективности назначений.

Для задачи о назначениях, записанной в стандартной форме, количество строк этой таблицы совпадает с количеством столбцов.

Таблица 26.1

Работа / Рабочий	1	2	…	j	…	m
1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1j}	…	c_{1m}
2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2j}	…	c_{2m}
…	…	…	…	…	…	…
i	c_{i1}	c_{i2}	…	c_{ij}	…	c_{im}
…	…	…	…	…	…	…
m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mj}	…	c_{mm}

Результатом решения задачи о назначениях (26.1) - (26.4) является вектор $x^* = \{x^*_{ij}\}$, компоненты которого - целые числа.

Оптимальный план задачи о назначениях (26.1) - (26.4) можно представить в виде квадратной матрицы назначений, в каждой строке и в каждом столбце которой находится ровно одна единица.

Такую матрицу иногда называют матрицей перестановок. Значение целевой функции (26.1), соответствующее оптимальному плану, называют **эффективностью назначений**.

Если количество рабочих не равно количеству работ, то возникает задача о назначениях в открытой форме. В этом случае задача может быть преобразована в задачу, сформулированную в стандартной форме. Пусть m — количество работ. И пусть, например, количество рабочих n превышает количество работ m. Введем дополнительные фиктивные работы с индексами $j=m+1,...,n$. Коэффициенты таблицы назначений c_{ij}, $i=1,...,n$; $j=m+1,...,n$, положим равными нулю. В этом случае получаем задачу, сформулированную в стандартной форме. Если в оптимальном плане этой задачи $x^*_{ij}=1$ при $j=m+1,...,n$, то исполнитель i назначается на выполнение фиктивной работы, т.е. остается без работы.

Заметим, что оптимальное значение целевой функции исходной задачи совпадает с оптимальным значением задачи, приведенной к стандартной форме. Поэтому эффективность назначений в результате такого преобразования не меняется.

Следует особо отметить, что задача о назначениях является частным случаем транспортной задачи, в которой количество пунктов производства совпадает с количеством пунктов потребления, а все величины спроса и величины предложения равны.

Задача 26.1. Цех металлообработки получил срочный заказ на выпуск партии деталей. Для производства детали необходимо выполнить операции на четырех станках. В цехе работают четыре слесаря высокой квалификации, каждый из которых может работать на любом станке, но с различным процентом брака (процент брака известен из документации ОТК).

Таблица 26.2

Станок / Рабочий	1	2	3	4
1	2,3	1,9	2,2	2,7
2	1,8	2,2	2,0	1,8
3	2,5	2,0	2,2	3,0
4	2,0	2,4	2,4	2,8

Распределите станки между рабочими таким образом, чтобы процент брака был минимальным. (Предполагается, что ОТК проверяет готовую деталь, т.е.

общий процент брака определяется как сумма процентов брака, допущенного всеми рабочими.)

Вопросы:

1. На каком станке должен работать рабочий 2?

2. Чему равен минимальный общий процент брака?

Решение. Необходимо провести оптимизационные расчеты. После этого получим матрицу назначений.

Таблица 26.3

Станок / Рабочий	1	2	3	4
1	0	1	0	0
2	0	0	0	1
3	0	0	1	0
4	1	0	0	0

Решение можно представить в виде таблицы 26.4.

Таблица 26.4

Рабочий	Станок	Процент брака
1	2	1,9
2	4	1,8
3	3	2,2
4	1	2,0
Итог		7,9

Ответ. 1.Рабочий 2 должен работать на станке № 4.

2.Минимальный общий процент брака равен 7,9%.

Задача 26.2. Фирма получила заказы на разработку пяти программных продуктов. На фирме работают шесть квалифицированных программистов, которым можно поручить выполнение этих заказов. Каждый из них дал оценку времени (в днях), требуемого для разработки программ. Эти оценки приведены в таблице 26.5.

Таблица 26.5

Программа / Программист	1	2	3	4	5
Галкин	46	59	24	62	67
Палкин	47	56	32	55	70
Малкин	44	52	19	61	60
Чалкин	47	59	17	64	73
Залкинд	43	65	20	60	75
Кузьмин	41	53	28	54	68

Выполнение каждого из пяти заказов фирма решила поручить одному программисту. Ясно, что один из программистов не получит заказа. Каждому программисту, которому будет поручено выполнять заказ, фирма предложила оплату 1 тыс. руб. в день. Распределите работу между программистами, чтобы общие издержки на разработку программ были минимальными. Вопросы:

1. Чему равны минимальные издержки фирмы на выполнение всех пяти заказов?
2. Какую программу следует поручить Малкину?
3. Какую программу следует поручить Залкинду?
4. Кто из программистов не получит заказа?
5. Стало известным, что не все программисты согласились с условиями оплаты, обосновывая это тем, что имеют разную квалификацию. В результате была достигнута договоренность о следующих размерах оплаты в день (в тыс. руб.).

Таблица 26.6

Программист	Размер оплаты
Галкин	1
Палкин	2
Малкин	1,5
Чалкин	2
Залкинд	1,5
Кузьмин	2

Изменится ли распределение работ между программистами при новых условиях оплаты труда? Каковы будут в этом случае общие минимальные издержки?

6. Кто из программистов при новых условиях не получит заказа?

Решение. В таблице 26.7 задачи о назначениях указан размер оплаты (в тыс. руб.) в случае, если программисту будет поручена соответствующая программа.

Таблица 26.7

Программа / Программист	1	2	3	4	5	6 (фиктивная)
Галкин	46	59	24	62	67	0
Палкин	47	56	32	55	70	0
Малкин	44	52	19	61	60	0
Чалкин	47	59	17	64	73	0
Залкинд	43	65	20	60	75	0
Кузьмин	41	53	28	54	68	0

После проведения расчетов, получается следующая матрица назначений (таблица 26.8)

Таблица 26.8

Программа / Программист	1	2	3	4	5	6 (фиктивная)
Галкин	0	0	0	0	0	0
Палкин	0	0	0	1	0	0
Малкин	0	0	0	0	1	0
Чалкин	0	0	1	0	0	0
Залкинд	1	0	0	0	0	0
Кузьмин	0	1	0	0	0	0

Учитывая исходную информацию, получается следующая таблица 26.9.

Таблица 26.9

Программист	Программа	Издержки, тыс. руб.
Галкин	Фиктивная	0
Палкин	4	55
Малкин	5	60
Чалкин	3	17
Залкинд	1	43
Кузьмин	2	53
Итог		228

Из последней таблицы следует, что минимальные издержки составляют 228 тыс. руб., Малкину следует поручить программу 5, а Залкинду - программу 1. Заказа не получит Галкин.

При новых условиях оплаты труда таблица задачи о назначениях имеет следующий вид (таблица 26.10).

Таблица 26.10

Программа / Программист	1	2	3	4	5	6 (фиктивная)
Галкин	46	59	24	62	67	0
Палкин	94	112	64	110	140	0
Малкин	66	78	28,5	91,5	90	0
Чалкин	94	118	34	128	146	0
Залкинд	64,5	97,5	30	90	112,5	0
Кузьмин	82	106	56	108	136	0

После проведения расчетов, получается следующая матрица назначений (таблица 26.11).

Таблица 26.11

Программа / Программист	1	2	3	4	5	6 (фиктивная)
Галкин	0	0	0	0	1	0
Палкин	0	0	0	0	0	0
Малкин	0	1	0	0	0	0
Чалкин	0	0	1	0	0	0
Залкинд	0	0	0	1	0	0
Кузьмин	1	0	0	0	0	0

В таблице 26.12 представлен итоговый результат

Таблица 26.12

Программист	Программа	Издержки, тыс. руб.
Галкин	5	67
Палкин	Фиктивная	0
Малкин	2	78
Чалкин	3	34
Залкинд	4	90
Кузьмин	1	82
Итог		351

Ответ. 1. Минимальные издержки фирмы на выполнение всех пяти заказов = 228 тыс. руб.

2. Следует поручить Малкину Программу 5.

3. Следует поручить Залкинду Программу 1.

4. Не получит заказ программист Галкин.

5. Общие минимальные издержки = 351 тыс. руб.

6. При новых условиях не получит заказа программист Палкин.