8. Двойственность задач линейного программирования. Таблица соответствий. Достаточное условие оптимальности

Определение 8.1. **Двойственная задача** – это вспомогательная задача линейного программирования, формулируемая с помощью определенных правил непосредственно из условий исходной задачи, которая в этом случае называется прямой задачей линейного программирования.

Рассмотрим пару ЗЛП вида:

Таблица 8.1

Прямая задача (I)	Двойственная ей задача (II)
$F = c_1x_1 + ... + c_nx_n \to \max$	$\bar{F} = b_1y_1 + ... + b_my_m \to \min$
$a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n \le b_1$	$y_1 \ge 0$
………………………	………
$a_{k1}x_1 + ... + a_{k+1n}x_n \le b_k$	$y_k \ge 0$
$a_{k+1,1}x_1 + ... + a_{k+1n}x_n = b_{k+1}$	y_{k+1} - любое
....	……..
$a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n = b_m$	y_m - любое
$x_1 \ge 0$	$a_{11}y_1 + ... + a_{m1}y_m \ge c_1$
………	……………………………..
$x_l \ge 0$	$a_{1l}y_1 + .. + a_{ml}y_m \ge c_l$
x_{l+1} - любое	$a_{1l+1}y_1 + ... + a_{ml+1}y_m = c_{l+1}$
……..	....
x_n - любое	$a_{1n}y_1 + ... + a_{mn}y_m = c_n$

Задачу (I) называют прямой задачей ЛП, а (II) - двойственной. Ограничения задач (I) и (II), соответствующие друг другу, называются сопряженными. Заметим, что задача двойственная к (II), есть исходная прямая задача, т.е. соотношение двойственности взаимное. Поэтому можно любую из такой пары задач считать прямой, а другую - двойственной.

В этой связи полезно усвоить следующую схему соответствия.

Таблица 8.2

Прямая задача	Двойственная задача
Максимизация	Минимизация
Коэффициенты в целевой функции	Константы в правых частях ограничений
Константы в правых частях ограничений	Коэффициенты в целевой функции
i-я строка, составленная из коэффициентов при неизвестных в ограничениях	i-й столбец, составленный из коэффициентов при неизвестных в ограничениях
j-й столбец, составленный из коэффициентов при неизвестных в ограничениях	j-я строка, составленная из коэффициентов при неизвестных в ограничениях
i-е неравенство вида ≤ (этот знак неравенства согласован с целевой функцией на максимум)	i-я неотрицательная переменная: $y_i \geq 0$
i-е соотношение в виде равенства	i-я переменная y_i, не имеющая ограничения в знаке
j-я неотрицательная переменная: $x_i \geq 0$	j-е неравенство вида ≥ (этот знак неравенства согласован с целевой функцией на минимум)
i-я переменная x_i, не имеющая ограничения в знаке	i-е соотношение в виде равенства

Трудности в решении задач линейного программирования зависят не от количества переменных ***n***, а от количества ограничений ***m***, определяющих число итераций симплекс-метода. Поэтому, если прямая задача линейного программирования, еще не приведенная к стандартной форме, содержит большое количество ограничений (***m***>***n***), то в этом случае целесообразно перейти к двойственной задаче. Сформированная двойственная задача линейного программирования будет иметь ***m*** переменных и ***n*** ограничений, т.е. количество итераций при этом уменьшится.

Задача 8.1. Построить двойственную задачу к следующей ЗЛП:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 \le 4 \\ x_1 + x_3 \ge 8 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

$$F = x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \to \min$$

Прежде чем приступать к построению двойственной задачи, необходимо упорядочить запись исходной: согласовать знаки неравенств в ограничениях задачи с целевой функцией. Так как целевая функция минимизируется, то неравенства должны быть записаны с помощью знака $\ge$. Для этого второе неравенство умножим на (-1): $-2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 \ge -4$. Теперь, вводя двойственные переменные y_1, y_2, y_3, запишем в соответствии с указанным правилом пару двойственных задач.

Таблица 8.3

Прямая задача (I)	Двойственная ей задача (II)
$F = x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \to \min$ $x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 6$ $-2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 \ge -4$	$\bar{F} = 6y_1 - 4y_2 + 8y_3 \to \max$ y_1 - любое $y_2 \ge 0$

$x_1 + x_3 \geq 8$	$y_3 \geq 0$
$x_1 \geq 0$	$y_1 - 2y_2 + y_3 \leq 1$
$x_2 \geq 0$	$-2y_1 - 3y_2 \leq -2$
x_3 - любое	$y_1 + 2y_2 + 3y_3 = 1$
x_4 - любое	$3y_1 + y_2 = -1$

Итак, задача слева - исходная прямая задача, задача справа - двойственная к исходной задаче.

Разновидностью двойственных задач линейного программирования являются двойственные симметричные задачи, в которых система ограничений как исходной, так и двойственной задач задаётся неравенствами, причём на двойственные переменные налагается условие неотрицательности.

Таблица 8.4

Прямая задача (I)	Двойственная ей задача (II)
$F = c_1x_1 + ... + c_nx_n \to \max$	$\bar{F} = b_1y_1 + ... + b_my_m \to \min$
$a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1$	$y_1 \geq 0$
………………………	………
$a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m$	$y_m \geq 0$
$x_1 \geq 0$	$a_{11}y_1 + ... + a_{m1}y_m \geq c_1$
………	……………………………..
$x_n \geq 0$	$a_{12}y_1 + .. + a_{m2}y_m \geq c_n$

Пара двойственных задач (I) и (II) называется **парой симметрических двойственных задач.**

Не ограничивая общности, теорию двойственности можно рассматривать для пары симметрических задач, поскольку для любой ЗЛП существует эквивалентная ей стандартная ЗЛП и поэтому теоремы, справедливые для пары симметрических двойственных задач, будут справедливы для пары общих двойственных задач.

Рассмотрим пару симметрических двойственных задач в матричной форме записи.

Таблица 8.5

Прямая задача (I)	Двойственная ей задача (II)
$F = cx \to \max$ $Ax \le b$ $x \ge 0$	$\bar{F} = by \to \min$ $y \ge 0$ $A^T y \ge c$

Здесь $c = (c_1, ..., c_n)$, $x = (x_1, ..., x_n)$, $b = (b_1, ..., b_m)$, $y = (y_1, ..., y_m)$, A - матрица из m строк и n столбцов, A^T - транспонированная матрица. Введем обозначения для допустимых областей задачи (I) и (II).

$D_{\mathrm{I}} = \left\{ x \in R^n \,/\, Ax \le b, x \ge 0 \right\}$, $D_{\mathrm{II}} = \left\{ y \in R^m \,/\, A^T y \ge c, y \ge 0 \right\}$

Основное неравенство двойственности: для любых допустимых решений прямой задачи x и для любых допустимых решений двойственной задачи y выполняется неравенство $cx \le by$.

Доказательство. Из системы ограничений задачи (I) $Ax \le b$ и $y \ge 0$ получаем $y^T Ax \le y^T b$.

Из системы ограничений задачи (II) $A^T y \ge c$ и $x \ge 0$ получаем $\left(A^T y\right)^T x \ge cx$ или $y^T Ax \ge cx$.

Объединяя полученные неравенства, имеем $cx \le y^T Ax \le y^T b$ или $cx \le by$.

Теорема доказана.

Следствие (достаточное условие оптимальности). Если для некоторых допустимых решений $x^* \in D_{\mathrm{I}}$ и $y* \in D_{\mathrm{II}}$ выполняется равенство значений целевых функций $cx^* = by^*$, то x^*, y^* - оптимальные решения задачи (I) и (II) соответственно.

Доказательство. Пусть $x^* \in D_{\mathrm{I}}$ - произвольное допустимое решение задачи (I). По основному неравенству двойственности имеем $cx \le by^* = cx^*$, т.е. $\forall\, x \in D_{\mathrm{I}} \quad cx \le cx^*$.

По определению это означает, что x^* - оптимальное решение задачи (I). Аналогично доказывается, что y^* - оптимальное решение задачи (II).

Следствие доказано.

9. Леммы Фаркаша

Определение 9.1. Канонической комбинацией неравенств системы

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + b_1 \geq 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n + b_m \geq 0 \end{cases} \tag{9.1}$$

называется неравенство вида

$$\begin{aligned} &\lambda_1\left(a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n\right) + \ldots + \lambda_m\left(a_{m1}x_1 + \ldots\right. \\ &\left.\ldots + a_{mn}x_n\right) + \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_m b_m \geq 0, где\, \lambda_i \geq 0, i = 1, \ldots, m \end{aligned} \tag{9.2}$$

Определение 9.2. Неравенство вида $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + b \geq 0$ называется **противоречивым**, если ему не удовлетворяет ни один вектор $x \in R^n$.

Замечание 9.1. В противоречивом неравенстве $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + b \geq 0$ выполняется: 1) $b < 0$; 2) $a_j = 0,\ j = 1, \ldots, n$

Доказательство.

1) Если $b \geq 0$, то вектор $x = (0,\ldots,0)$ удовлетворяет неравенству $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + b \geq 0$. Поэтому $b < 0$.

2) Если существует j при котором $a_j \neq 0$, то вектор $x = (0,\ldots,0,-\dfrac{b}{a_j},0,\ldots,0)$ удовлетворяет неравенству $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + b \geq 0$. Поэтому $a_j = 0,\ j = 1, \ldots, n$.

Замечание доказано.

Определение 9.3. Система (9.1) называется **несовместной**, если ей не удовлетворяет ни один вектор $x \in R^n$.

Лемма 9.1. Если система (9.1) несовместна, то существует ее каноническая комбинация, являющаяся противоречивым неравенством.

Определение 9.4. Система (9.1) называется **несовместной** при $x \ge 0$, если ей не удовлетворяет ни один вектор $x \ge 0$.

Определение 9.5. Неравенство вида $a_1x_1 + ... + a_nx_n + b \ge 0$ называется **противоречивым** при $x \ge 0$, если ему не удовлетворяет ни один вектор $x \ge 0$.

Замечание 9.2. В противоречивом при $x \ge 0$ неравенстве выполняется: 1) $b < 0$; 2) $a_j = 0,\ j = 1,...,n$

Доказательство.

1) Если $b \ge 0$, то вектор $x = 0$ удовлетворяет неравенству. Следовательно $b < 0$.

2) Если существует j при котором $a_j \ne 0$, то вектор $x = (0,...,0,-\dfrac{b}{a_j},0,...,0)$ удовлетворяет неравенству $a_1x_1 + ... + a_nx_n + b \ge 0$.

Следовательно, $a_j \le 0,\ j = 1,...,n$.

Замечание доказано.

Лемма 9.2. Если система (9.1) несовместна при $x \ge 0$, то существует ее каноническая комбинация, являющаяся неравенством, противоречивым при $x \ge 0$.

Основная лемма. Рассмотрим пару симметрических двойственных задач:

Таблица 9.1

Прямая задача (I)	Двойственная ей задача (II)
$F = c_1x_1 + ... + c_nx_n \to \max$	$\bar{F} = b_1y_1 + ... + b_my_m \to \min$
$a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n \le b_1$	$y_1 \ge 0$
………………………	………
$a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n \le b_m$	$y_m \ge 0$
$x_1 \ge 0$	$a_{11}y_1 + ... + a_{m1}y_m \ge c_1$
………	……………………………..
$x_n \ge 0$	$a_{12}y_1 + .. + a_{m2}y_m \ge c_n$

Пусть допустимая область задачи (I) непустая и для любого $x \in D_{\mathrm{I}}$ выполняется $F(x) \le M$. Тогда существует $y \in D_{\mathrm{II}}$, для которого выполняется $F(y) \le M$.

Доказательство. Утверждение основной леммы означает, что существует вектор $y \ge 0$, удовлетворяющий системе:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + \ldots + a_{m1}y_m - c_1 \ge 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + ..+ a_{mn}y_m - c_n \ge 0 \\ -b_1y_1 - \ldots - b_my_m + M \ge 0 \end{cases} \tag{9.3}$$

Предположим, что система (9.3) несовместна при $y \ge 0$

Тогда по лемме 9.2 существует каноническая комбинация, которая является неравенством, противоречивым при $y \ge 0$

$$\begin{gathered} \lambda_1\left(a_{11}y_1 + \ldots + a_{m1}y_m - c_1\right) + \ldots + \lambda_n\left(a_{1n}y_1 + \ldots + a_{mn}y_m - c_n\right) + \\ +\beta\left(-b_1y_1 - \ldots - b_my_m + M\right) \ge 0,\ \lambda_i \ge 0, \quad j = 1,\ldots,m, \quad \beta \ge 0 \end{gathered} \tag{9.4}$$

Перепишем это неравенство в виде:

$$\begin{gathered} \left(\lambda_1a_{11} + \ldots + \lambda_na_{1n} - \beta b_1\right)y_1 + \ldots + \left(\lambda_1a_{m1} + \ldots + \lambda_na_{mn} - \beta b_m\right)y_m + \\ +\left(-\lambda_1c_1 - \ldots - \lambda_nc_n + \beta M\right) \ge 0 \end{gathered} \tag{9.5}$$

По замечанию 9.2 в неравенстве, противоречивом при $y \ge 0$ выполняется:

$$\begin{gathered} \lambda_1a_{11} + \ldots + \lambda_na_{1n} - \beta b_1 \le 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_1a_{m1} + \ldots + \lambda_na_{mn} - \beta b_m \le 0 \\ -\lambda_1c_1 - \ldots - \lambda_nc_n + \beta M < 0 \end{gathered} \tag{9.6}$$

Для $\beta \ge 0$ возможны два случая:

Случай 1. Если $\beta > 0$, то делим полученные неравенства (9.6) на β:

$$\frac{\lambda_1 a_{11}}{\beta}+...+\frac{\lambda_n a_{1n}}{\beta}\le b_1,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{\lambda_1 a_{m1}}{\beta}+...+\frac{\lambda_n a_{mn}}{\beta}\le b_m \qquad (9.7)$$

$$\frac{-\lambda_1 c_1}{\beta}-...-\frac{\lambda_n c_n}{\beta}< M$$

В результате получим вектор

$$x'=(\frac{\lambda_1}{\beta},...,\frac{\lambda_n}{\beta})\in D_{\mathrm{I}},\ F\left(x'\right)>0 \qquad (9.8)$$

Это противоречит условию основной леммы.

Случай 2. Если $\beta=0$, то система (9.6) принимает вид:

$$\lambda_1 a_{11}+...+\lambda_n a_{1n}\le 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\lambda_1 a_{m1}+...+\lambda_n a_{mn}\le 0, \qquad (9.9)$$

$$-\lambda_1 c_1-...-\lambda_n c_n<0.$$

Рассмотрим вектор $x'=\left(x_1',...,x_n'\right)\in D_{\mathrm{I}}$ и положим $x_t=x'+t\lambda'$, где $t>0$, $\lambda'=\left(\lambda_1,...,\lambda_n\right)\ge 0$.

Заметим, что для любого $t>0$ вектор $x_t\in D_{\mathrm{I}}$.

Действительно, подставляя координаты вектора x_t в ограничения задачи (I), получим

$$\begin{aligned}&a_{i1}\left(x'+t\lambda_1\right)+...+a_{in}\left(x_n'+t\lambda_n\right)=\\&=a_{i1}\,x'+...+a_{in}x_n'+t\left(a_{i1}\lambda_1+...a_{in}\lambda_n\right)\le b_i\end{aligned} \qquad (9.10)$$

для всех $i=1,...,m$.

Неотрицательность вектора x_t получается из неотрицательности компонент векторов x', λ' и $t > 0$.

Итак, для любого $t > 0$, $x_t \in D_{\mathrm{I}}$ значение целевой функции

$$F(x_t) = F(x' + t\lambda') = F(x') + tF(\lambda') \tag{9.11}$$

неограниченно возрастает при $t \to +\infty$, так как

$$F(\lambda') = c_1\lambda_1 + \ldots + c_n\lambda_n > 0 \tag{9.12}$$

Но по условию основной леммы для любого допустимого вектора $x \in D_{\mathrm{I}}$ целевая функция ограничена $F(x) \le M$. Получили противоречие.

В обоих случаях полученные противоречия возникли из-за того, что было предположение о несовместности системы (9.3) при $y \ge 0$, т.е. существует $y \in D_{\mathrm{II}}$ для которого

$$F(y) = b_1 y_1 + \ldots + b_m y_m \le M\ . \tag{9.13}$$

10. Теоремы двойственности. Критерии оптимальности.

Рассмотрим пару симметричных двойственных задач.

Таблица 10.1

Прямая задача (I)	Двойственная ей задача (II)
$F = cx \to \max$	$\bar{F} = by \to \min$
$Ax \le b$	$y \ge 0$
$x \ge 0$	$A^T y \ge c$

Теорема 10.1. (*первая теорема двойственности)* Если одна из пары двойственных задач (I) и (II) разрешима, то разрешима и другая задача, причем оптимальные значения целевых функций прямой и двойственной задач совпадают.

$$c_1^* x_1^* + \ldots + c_n^* x_n^* = b_1^* y_1^* + \ldots + b_m^* y_m^*, \tag{10.1}$$

где $x^* = \left(x_1^*, \ldots, x_n^*\right)$, $y^* = \left(y_1^*, \ldots, y_m^*\right)$ оптимальные планы задач (I) и (II) соответственно**.**

Доказательство. 1. Пусть задача (I) разрешима, и пусть $x \in D_{\mathrm{I}}$ и $\forall\, x \in D_{\mathrm{I}} \quad F\left(x\right) \le F\left(x^*\right)$, т.е. x^* - оптимальное решение.

Обозначим: $M = F\left(x^*\right)$.

Тогда по основной лемме существует $y \in D_{\mathrm{II}}$, для которого

$$F\left(y^*\right) \le M = F\left(x^*\right)$$

Но по основному неравенству двойственности имеем:

$$\forall\, y \in D_{\mathrm{II}} \;\; F\left(x^*\right) \le F\left(y^*\right).$$

Объединяя последние два соотношения, имеем

$$\forall\, y \in D_{\mathrm{II}} \qquad F\left(y^*\right) \le F\left(x^*\right) \le F\left(y^*\right)$$

откуда следует, что y^* - оптимальное решение задачи (II) и

$$F\left(x^*\right) = F\left(y^*\right)$$

2. Пусть теперь задача (II) - разрешима.

Построим эквивалентную (II) задачу

$$\begin{gathered} -by \to \max \\ y \ge 0 \\ -A^T y \le -c \end{gathered} \tag{II'}$$

Задача (II') разрешима, так как задача (II) разрешима. Тогда по пункту 1 двойственная к (II') задача:

$$\begin{gathered} -cx \to \min \\ -Ax \le b \\ x \ge 0 \end{gathered}$$

Но эта задача эквивалентна задаче (I). Следовательно, задача (I) разрешима.

Теорема доказана.

Первый критерий оптимальности: Решение $x^* \in D_{\mathrm{I}}$ оптимально тогда и только тогда, когда существует решение $y^* \in D_{\mathrm{II}}$ такое, что

$$cx^* \le by^*. \tag{10.2}$$

Доказательство. Необходимость следует из первой теоремы двойственности. Достаточность следует из достаточного условия оптимальности.

Теорема 10.2. (*вторая теорема двойственности)* Чтобы допустимые решения x, y пары двойственных задач (I) и (II) были оптимальными необходимо и достаточно, чтобы выполнялись **условия дополняющей нежесткости**:

1) $\lambda = y^T\left(Ax-b\right)=0$, (10.3)

2) $\beta=\left(c-y^T A\right)x=0$. (10.4)

Доказательство. *Необходимость.* По условию допустимые решения x, y - оптимальны.

Так как $Ax\le b$, $y\ge 0$, $\lambda = y^T\left(Ax-b\right)\le 0$.

Так как $A^T y\ge c$, $x\ge 0$, $\beta=\left(c-y^T A\right)x\le 0$.

Так как $\lambda+\beta = y^T\left(Ax-b\right)+\left(c-y^T A\right)x = cx-by$, то из оптимальности решений x, y по первой теореме двойственности $cx=by$ и $\lambda+\beta=cx-by=0$.

В результате имеем $\lambda+\beta>0$, $\lambda\le 0$, $\beta\le 0$, откуда следует, $\lambda=0$, $\beta=0$.

Необходимость доказана.

Достаточность. По условию $\lambda=0$, $\beta=0$, откуда $\lambda+\beta=0$. Но $\lambda+\beta=cx-by$, следовательно $cx-by=0$, или $cx=by$.

По первой теореме двойственности получаем, что x, y - оптимальные решения задач (I) и (II). Достаточность доказана.

Допустимые решения x, y - задач (I) и (II) удовлетворяют **условиям дополняющей нежесткости (УДН)**, если при подстановке этих векторов в ограничения задач (I) и (II) хотя бы одно из любой пары сопряженных неравенств обращается в равенство.

Второй критерий оптимальности **(**следствие из условий дополняющей нежесткости**):** чтобы допустимые решения x, y - пары двойственных задач (I) и (II) были оптимальны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения:

1) если $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j < b_i$, то $y_i = 0$; (10.5)

2) если $y_i > 0$, то $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$; (10.6)

3) если $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i > c_j$, то $x_j = 0$; (10.7)

4) если $x_j > 0$, то $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j$. (10.8)

Доказательство. Распишем $\lambda = y^T (Ax - b)$ и $\beta = \left(c - y^T A\right) x$ покоординатно: $\lambda = \sum_{i=1}^{m} y_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \right)$, $\beta = \sum_{j=1}^{n} \left(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) x_j$.

Из допустимости решений x, y- следует, что $y_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \right) \le 0$, $i = 1,\dots,m$; $\left(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) x_j \le 0$, $j = 1,\dots,n$.

Равенства $\lambda = 0$ и $\beta = 0$ выполняются тогда и только тогда, когда каждое слагаемое в этих равенствах равно нулю

$$y_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \right) = 0,\ i = 1,\dots,m;\ \left(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) x_j = 0,\ j = 1,\dots,n. \qquad (10.9)$$

Произведение двух сомножителей, как известно, равно нулю, тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю.

Следовательно, равенства (10.9) или, что тоже самое $\lambda = 0$, $\beta = 0$, эквивалентны условиям (10.5)-(10.8), и по второй теореме двойственности получаем справедливость утверждения.

Критерий доказан.

Замечание: условия (10.5)-(10.8) есть условия дополняющей нежесткости, поэтому критерий можно сформулировать более лаконично.

Второй критерий оптимальности: чтобы допустимые решения x, y пары двойственных задач (I), (II) были оптимальны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись УДН.

11. Критерий разрешимости задачи линейного программирования

Определение 11.1. Точной верхней гранью (супремумом) функции $F(x)$ на множестве D называется такое число M^*, что

1) $\forall\, x \in D \quad F(x) \le M^*$ (11.1)

2) $\forall\, M < M^* \quad \exists\, x \in D \quad F(x) > M$ (11.2)

Лемма (о супремуме целевой функции): если для пары двойственных задач (I), (II) $M^* = \sup\limits_{x \in D_{\text{I}}} F(x)$, то $\forall\, y \in D_{\text{II}} \quad \bar{F}(y) \ge M^*$. (11.3)

Доказательство. Предположим противное, т.е. $\exists\, y \in D_{\text{II}} \quad \bar{F}(y) < M^*$.

Обозначим: $M = \bar{F}(y)$.

Тогда $M < M^*$ и по определению супремума $\exists\, x \in D_{\text{I}} \quad F(x) > M = \bar{F}(y)$.

Полученное неравенство противоречит основному неравенству двойственности по которому $\forall\, x \in D_{\text{I}} \quad \forall\, y \in D_{\text{II}} \quad F(x) < \bar{F}(y)$.

Предположение было неверным.

Лемма доказана.

Теорема 11.1. *(критерий разрешимости)* Задача (I) (на максимум) разрешима тогда и только тогда, когда целевая функция $F(x)$ ограничена сверху на непустом допустимом множестве.

Доказательство. *Необходимость.* Если задача (I) разрешима, то $\forall\, x \in D_{\text{I}} \quad F(x) \le F(x^*)$, где $x^* \in D_I$ - оптимальное решение.

Следовательно, $F(x)$ ограничена сверху на D_{I} величиной $F^* = F(x^*)$.

Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $D_{\mathrm{I}} = \varnothing$ и $F(x)$ ограничена сверху на D_{I}. Положим $M^* = \sup\limits_{x \in D_{\mathrm{I}}} F(x)$.

Тогда по лемме о супремуме целевой функции $\forall\ y \in D_{\mathrm{II}} \quad \bar{F}(y) \geq M^*$, а по основной лемме параграфа 9: $\exists\ y^* \in D_{\mathrm{II}} \quad \bar{F}\left(y^*\right) \leq M^*$.

В результате получаем: $\bar{F}\left(y^*\right) = M^*$ и $\forall y \in D_{\mathrm{II}} \quad \bar{F}(y) \geq M^* = \bar{F}\left(y^*\right)$, что означает оптимальность вектора y^* для задачи (II).

Итак, задача (II) разрешима. Тогда по первой теореме двойственности и задача (I) разрешима.

Достаточность доказана.

Теорема 11.2. *(малая теорема двойственности)* Если прямая и двойственная задачи имеют хотя бы по одному допустимому решению (т.е. $D_{\mathrm{I}} \neq \varnothing$, $D_{\mathrm{II}} \neq \varnothing$), то обе задачи разрешимы.

Доказательство. Пусть $x \in D_{\mathrm{I}}$, $y \in D_{\mathrm{II}}$.

По основному неравенству двойственности $\forall x \in D_{\mathrm{I}} \quad F(x) \leq \bar{F}(y) = M$, т.е. $F(x)$ ограничена сверху на допустимом множестве.

Тогда по критерию разрешимости прямая задача (I) разрешима. По первой теореме двойственности разрешима и двойственная задача (II).

Теорема доказана.

Теорема 11.3. ***(о неограниченности целевой функции)*** Если $D_{\mathrm{II}} = \varnothing$, то $D_{\mathrm{I}} \neq \varnothing$ и $F(x)$ неограничена сверху на D_{I}. Обратное утверждение тоже верно.

Доказательство. Пусть $F(x)$ неограничена сверху на $D_{\mathrm{I}} \neq \varnothing$. Предположим противное, т.е. $D_{\mathrm{II}} \neq \varnothing$. Тогда $\exists y \in D_{\mathrm{II}}$ и по основному неравенству двойственности $\forall\, x \in D_{\mathrm{I}} \quad F(x) \leq \bar{F}(y) = M$.

Получили ограниченность функции $F(x)$, что противоречит условию. Следовательно, предположение было неверным и $D_{\mathrm{II}} = \varnothing$.

Докажем обратное утверждение.

Пусть теперь $D_{\mathrm{II}} = \varnothing$. Предположим противное, т.е. $F(x)$ ограничена сверху на D_{I}. Тогда по критерию разрешимости задача (I) разрешима и по первой теореме двойственности задача (II) разрешима. Но тогда $D_{\mathrm{I}} \neq \varnothing$. Получили противоречие.

Следовательно, предположение было неверным и $F(x)$ неограничена сверху на D_{I}.

Теорема доказана.

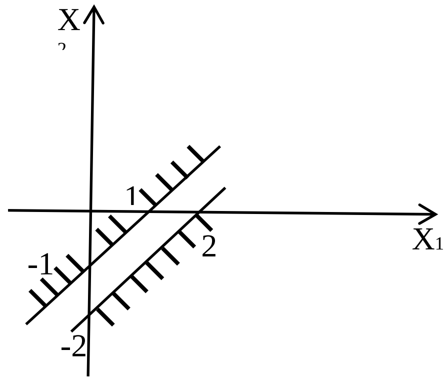
Классификация ЗЛП.

1. $D_{\mathrm{I}} \neq \varnothing$, $D_{\mathrm{II}} \neq \varnothing$. Тогда задачи (I) и (II) разрешимы.
2. $D_{\mathrm{I}} \neq \varnothing$, $D_{\mathrm{II}} = \varnothing$. Тогда задачи (I) и (II) неразрешимы. Задача (I) неразрешима из-за неограниченности целевой функции. Задача (II) неразрешима из-за пустоты допустимой области.
3. $D_{\mathrm{I}} = \varnothing$, $D_{\mathrm{II}} \neq \varnothing$. Аналогично пункту 2.(только задачи (I) и (II) меняются местами).
4. $D_{\mathrm{I}} = \varnothing$, $D_{\mathrm{II}} = \varnothing$. Тогда задачи (I) и (II) неразрешимы.

Например:

$$L(x)=2x_1-x_2\to max$$

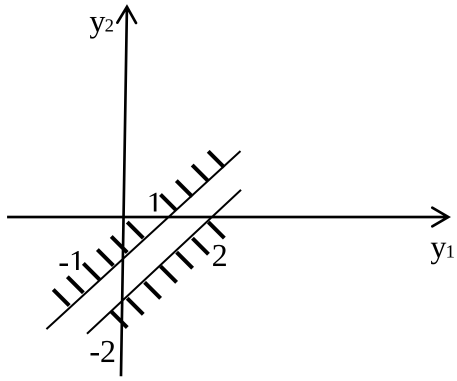
$$x_1-x_2\le 1$$
$$-x_1+x_2\le -2$$
$$x_1\ge 0$$
$$x_2\ge 0$$



$$D_1=\varnothing$$

$$\bar{L}(y)=y_1-2y_2\to max$$

$$y_1\ge 0$$
$$y_2\ge 0$$
$$y_1-y_2\ge 2$$
$$-y_1+y_2\ge -1$$



$$D_{11}=\varnothing$$

рис.11.1

Задача 11.1. Используя теоремы двойственности, решить двойственную задачу, если известно решение прямой задачи.

$$F(x)=300x_1+500x_2+400x_3\to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1+4x_2+2x_3\le 120 \\ x_1+4x_2+3x_3\le 100 \\ 3x_1+3x_3\le 200 \end{cases} \qquad (11.4)$$

$x_1\ge 0$, $x_2\ge 0$, $x_3\ge 0$.

Пусть решение задачи найдено одним из стандартных методов: $x^*=(40,0,20)$, $F^*(x)=20000$.

Решение. Построим двойственную задачу:

$$\bar{F}(y)=120y_1+100y_2+200y_3\to\min$$

$$\begin{cases} 2y_1+y_2+3y_3\ge 300 \\ 4y_1+4y_2\ge 500 \\ 2y_1+3y_2+3y_3\ge 400 \end{cases} \qquad (11.5)$$

$y_1\ge 0$, $y_2\ge 0$, $y_3\ge 0$.

По первой теореме двойственности задача разрешима, причем $\bar{F}^*(y)=F^*(x)=20000$.

Найдем оптимальный план задачи $y^*=\left(y_1^*,y_2^*,y_3^*\right)$, используя вторую теорему двойственности. Подставим координаты вектора x^* в ограничения задачи (11.4).

Получим

$$2x_1^*+4x_2^*+2x_3^*=2\cdot 40+4\cdot 0+2\cdot 20=120=120$$

$$x_1^*+4x_2^*+3x_3^*=1\cdot 40+4\cdot 0+3\cdot 20=100=100$$

$$3x_1^*+3x_3^*=3\cdot 40+3\cdot 20=180<200$$

Следовательно, в силу УДН, неравенство $y_3\ge 0$ должно выполняться как равенство, то есть $y_3^*=0$. Далее, так как $x_1^*=40>0$, $x_3^*=20>0$, то в силу УДН, $2y_1^*+4y_2^*+3y_3^*=300$, $4y_1^*+4y_2^*=500$.

Получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} y_3^*=0 \\ 2y_1^*+4y_2^*+3y_3^*=300 \\ 4y_1^*+4y_2^*=500 \end{cases},\quad \begin{cases} 2y_1^*+y_2^*=300 \\ 2y_1^*+3y_2^*=400 \end{cases},\quad \begin{cases} y_3^*=0 \\ y_2^*=50 \\ y_1^*=125 \end{cases}$$

Планы $x^*=\left(40,0,20\right)$ и $y^*=\left(125,50,0\right)$ удовлетворяют УДН, следовательно, в силу второй теоремы двойственности, являются оптимальными в задачах (11.4) и (11.5) соответственно.

Ответ. $y^*=\left(125,50,0\right)$

Задача 11.2. Исследовать вектор $x=(1,0,1,-1)$ на оптимальность в ЗЛП

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4=1 \\ x_1+2x_2-x_3+2x_4\le 5 \end{cases}$$

$x_1\ge 0, x_2\ge 0$

$F(x)=x_1+x_2+x_3+x_4\to \max$

Решение. Вначале надо проверить, является ли вектор x допустимым. Для этого подставляем координаты вектора в ограничения:

$1+0+1-1=1$

$1+2\cdot 0-1+2\cdot(-1)=-2<5$

Так как второе ограничение выполняется как строгое неравенство, то в силу УДН для оптимальности вектора x необходимо выполнение равенства $y_2=0$.

Построим двойственную задачу:

$$\begin{cases} y_1+y_2\ge 1 \\ y_1+2y_2\ge 1 \\ -y_1-y_2=1 \\ -y_1+y_2=1 \end{cases}$$

$y_2\ge 0, y_1 - \textit{любое}$

$\bar{F}(y)=y_1+5y_2\to \min$

Поскольку $y_2=0$, то из третьего и четвертого ограничений получаем $y_1=-1$. Но по УДН из условия $x_1=0$ следует, что должно выполняться равенство в первом ограничении двойственной задачи: $y_1+y_2=1$,

Подставляя значения $y_1=-1$, $y_2=0$, получим: $-1+0\ne 1$

Следовательно, УДН не выполняются и вектор $x=(1,0,1,-1)$ не является оптимальным в исходной задаче.

Ответ. Вектор $x=(1,0,1,-1)$ не является оптимальным в исходной задаче.

12. Задача о наилучшем использовании ресурсов

Пусть некоторая производственная единица (цех, завод, объединение и т.д.), исходя из конъюнктуры рынка, технических или технологических возможностей и имеющихся ресурсов может выпускать *n* различных видов продукции (товаров), известных под номерами, обозначаемыми индексом *j*, $j=1,...,n$. Ее будем обозначать Π_j.

Предприятие при производстве этих видов продукции должно ограничиваться имеющимися видами ресурсов, технологий, других производственных факторов (сырья, полуфабрикатов, рабочей силы, оборудования, электроэнергии и т.д.). Все эти виды ограничивающих факторов называют ингредиентами R_i. Пусть их число равно *m*; припишем им индекс *i*, $i=1,...,m$. Они ограничены, и их количества равны соответственно $b_1, b_2, ..., b_m$ условных единиц. Таким образом, $b=(b_1,...,b_i,...,b_m)$ - вектор ресурсов.

Известна экономическая выгода (мера полезности) производства продукции каждого вида, исчисляемая, скажем, по отпускной цене товара, его прибыльности, издержкам производства, степени удовлетворения потребностей и т.д. Примем в качестве такой меры, например, цену реализации c_j, $j=1,...,n$, т.е. $c=(c_1,...,c_j,...,c_n)$ - вектор цен.

Известны также технологические коэффициенты a_{ij}, которые указывают, сколько единиц *i*–го ресурса требуется для производства единицы продукции *j*-го вида. Матрицу коэффициентов a_{ij} называют технологической и обозначают буквой A. Имеем $A=\left[a_{ij}\right]$.

Обозначим через $x=(x_1,...,x_j,...,x_n)$ план производства, показывающий, какие виды товаров $\Pi_1,...,\Pi_j,...,\Pi_n$ нужно производить и в каких количествах, чтобы обеспечить предприятию максимум объема реализации при имеющихся ресурсах.

Так как $c_j,\ j=1,...,n$ - цена реализации единицы *j*-й продукции, цена реализованных x_j единиц будет равна $c_j x_j$, а общий объем реализации

$$Z = c_1 x_1 + ... + c_n x_n \to \max. \tag{12.1}$$

Это выражение — целевая функция, которую нужно максимизировать.

Так как $a_{ij} x_j$ - расход *i*-го ресурса на производство x_j единиц *j*-й продукции, то, просуммировав расход *i*-го ресурса на выпуск всех *n* видов продукции, получим общий расход этого ресурса, который не должен превосходить $b_i, i=1,...,m$ единиц:

$$a_{i1} x_1 + ... + a_{ij} x_j + ... + a_{in} x_n \le b_i. \tag{12.2}$$

Чтобы искомый план $x = \left(x_1, ..., x_j, ..., x_n\right)$ был реализован, наряду с ограничениями на ресурсы нужно наложить условие неотрицательности на объёмы x_j выпуска продукции: $x_j \ge 0,\ j=1,...,n$.

Таким образом, модель задачи о наилучшем использовании ресурсов примет вид:

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{12.3}$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i=1,...,m,\ x_j \ge 0,\ j=1,...,n. \tag{12.4}$$

Так как переменные x_j входят в функцию $Z(x)$ и систему ограничений только в первой степени, а показатели a_{ij}, b_i, c_j являются постоянными в планируемый период, то перед нами - задача линейного программирования.

Задача 12.1. Исходя из специализации и своих технологических возможностей предприятие может выпустить четыре вида продукции. Сбыт любого количества обеспечен. Для изготовления этой продукции используются трудовые ресурсы, полуфабрикаты и станочное оборудование. Общий объём ресурсов, расход каждого ресурса за единицу продукции, приведены в таблице:

Таблица 12.1

Ресурсы		Выпускаемая продукция				Объём ресурсов
		Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	
P_1	Трудовые ресурсы, чел-ч	4	2	2	8	4800
P_2	Полуфабрикаты, кг	2	10	6	0	2400
P_3	Станочное оборудование, станко-ч	1	0	2	1	1500
Цена единицы продукции, руб.		65	70	60	120	

Требуется определить план выпуска, доставляющий предприятию максимум прибыли. Выполнить после оптимизационный анализ решения и параметров модели.

Решение. Пусть x_1, x_2, x_3, x_4- объёмы продукции $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$ планируемые к выпуску; Z - сумма ожидаемой выручки.

Математическая модель прямой задачи:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 8x_4 \le 4800 \\ 2x_1 + 10x_2 + 6x_3 \le 2400 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 \le 1500 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0, x_4 \ge 0$$
$$Z = 65x_1 + 70x_2 + 60x_3 + 120x_4 \to \max$$

Математическая модель двойственной задачи:

$$\begin{cases} 4y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 65 \\ 2y_1 + 10y_2 \geq 70 \\ 2y_1 + 6y_2 + 2y_3 \geq 60 \\ 8y_1 + y_3 \geq 120 \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0$$

$$\bar{Z} = 4800y_1 + 2400y_2 + 1500y_3 \to \min$$

По условиям задачи требуется найти:

1. Ассортимент выпускаемой продукции, обеспечивающий предприятию максимум реализации (максимум выручки).

2. Оценки ресурсов, используемых при производстве продукции.

Симплексным методом решаем прямую задачу, модель которой составлена выше в таблице. Последняя симплекс-таблица выглядит следующим образом.

Таблица 12.2

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_4	500	$^5/_{12}$	$^{-1}/_6$	0	1	$^1/_8$	$^{-1}/_{24}$	0
x_3	400	$^1/_3$	$1^2/_3$	1	0	0	$^1/_6$	0
x_7	1000	$^7/_{12}$	$2^1/_6$	0	0	$^{-1}/_8$	$^1/_{24}$	1
F(X4)	84000	5	10	0	0	15	5	0

После второй итерации все оценки оказались неотрицательными (см. последнюю строку таблицы), значит, найденный опорный план является оптимальным: $x^* = (0, 0, 400, 500, 0, 0, 200)$, $Z^* = Z\left(x^*\right) = 84000$.

Основные переменные $x_1^* = 0, x_2^* = 0, x_3^* = 400, x_4^* = 500$ показывают, что продукцию $П_1$ и $П_2$ выпускать нецелесообразно, а продукции $П_3$ следует произвести 400 ед., $П_4$ - 500 ед.

Дополнительные переменные $x_5^* = x_6^* = 0$ показывают, что ресурсы P_1 и P_2 используются полностью, а вот равенство $x_7^* = 200$ свидетельствует о том, что 200 единиц продукции P_3 осталось неиспользованным.

Выпишем из таблицы компоненты оптимального плана двойственной задачи – двойственные оценки. В канонической форме прямой задачи переменные x_1, x_2, x_3, x_4 - являются свободными, а дополнительные переменные - базисными. В канонической форме двойственной задачи свободными будут переменные y_1, y_2, y_3 - а базисными y_4, y_5, y_6, y_7.

Соответствие между переменными примет вид

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_1 & y_2 & y_3 \end{array}$$

Учитывая это соответствие, выпишем из индексной строки последней итерации компоненты искомого плана $y^* = (15, 5, 0, 5, 10, 0, 0)$ - двойственные оценки, $\min \bar{Z} = \max Z = 84000.$

Запишем это неравенство в развернутой форме:

$$48000 \cdot 15 + 2400 \cdot 5 + 1500 \cdot 0 = 65 \cdot 0 + 70 \cdot 0 + 60 \cdot 400 + 120 \cdot 500.$$

Учитывая, что компоненты представляют собой оценки ресурсов, заключаем: при оптимальном плане оценка ресурсов, затраченных на выпуск продукции, совпадает с оценкой произведенной продукции.

Теперь установим степень дефицитности используемых ресурсов и обоснуем рентабельность оптимального плана.

Мы нашли оптимальный план $x^* = (0,0,400,500,0,0,200)$ выпуска продукции. При этом плане третье ограничение прямой задачи выполняется как строгое неравенство: $0 + 2 \cdot 400 + 500 = 1300 < 1500$. Это означает, что расход ресурса P_3 меньше его запаса, т. е. ресурс P_3 избыточный. Именно поэтому в оптимальном плане $y^* = (15,5,0,5,10,0,0)$ двойственной задачи оценка y_3^* этого ресурса равна нулю.

А вот оценки y_1^* и y_2^* ресурсов P_1 и P_2 выражаются положительными числами 15 и 5, что свидетельствует о дефицитности этих ресурсов: они при оптимальном плане используются полностью. В самом деле, ограничения по этим ресурсам выполняются как строгие равенства: $4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 400 + 8 \cdot 500 = 4800$, $2 \cdot 0 + 10 \cdot 0 + 6 \cdot 400 = 2400$.

Поскольку 15>5, ресурс P_1 считается более дефицитным, чем ресурс P_2.

На основе теоремы о дополняющей нежесткости нетрудно объяснить, почему не вошла в оптимальный план продукция $П_1$ и $П_2$: первое и второе ограничения двойственной задачи выполняются как строгие неравенства: $4 \cdot 15 + 2 \cdot 5 + 0 > 65$, $2 \cdot 15 + 10 \cdot 5 > 70$. Это означает, что оценки ресурсов, расходуемых на изготовление единицы продукции $П_1$ и $П_2$, превышают оценки единицы этой продукции. Понятно, что такую продукцию выпускать предприятию невыгодно.

Что же касается продукции $П_3$ и $П_4$ $\left(x_3^* \geq 0, x_4^* \geq 0\right)$, то выпуск ее оправдан, поскольку оценка израсходованных ресурсов совпадает с оценкой произведенной продукции: $2 \cdot 15 + 6 \cdot 5 + 2 \cdot 0 = 60$, $8 \cdot 15 + 0 = 120$.

Таким образом, в оптимальный план войдет только та продукция, которая выгодна предприятию, и не войдет убыточная продукция. В этом проявляется рентабельность оптимального плана.

Рассмотрим возможность дальнейшего совершенствования оптимального ассортимента выпускаемой продукции.

Выше установлено, что ресурсы P_1 и P_2 являются дефицитными. В связи с этим на основе теоремы (об оценках) можно утверждать, что на каждую единицу ресурса P_1, введенную дополнительно в производство, будет получена дополнительная выручка $\Delta_i Z$, численно равная y_i^*. В самом деле, при $\Delta b_1 = 1$ получаем $\Delta_1 Z = y_1^* b_1 = 15 \cdot 1 = 15$ рублей. По тем же причинам каждая дополнительная единица ресурса P_2 обеспечит прирост $\Delta_2 Z$ выручки, равный 5 рублям. Теперь становится понятно, почему ресурс P_2 считается более дефицитным по сравнению с ресурсом P_1: он может содействовать получению большей выручки.

Что же касается избыточного ресурса P_3, то увеличение его запаса не приведет к росту выручки, поскольку $\Delta_3 Z = y_3^* b_3 = 0 \cdot \Delta b_3 = 0$. Из приведенных рассуждений следует, что оценки ресурсов позволяют совершенствовать план выпуска продукции.

Выясним экономический смысл оценок $y_4^*, y_5^*, y_6^*, y_7^*$ продукции $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$.

По оптимальному плану $x^* = (0, 0, 400, 500, 0, 0, 200)$ выпускать следует продукцию Π_3 и Π_4. Оценки y_6^* и y_7^* этих видов продукции равны нулю. Что это означает, практически станет ясно, если представить оценки в развернутой записи:

$$y_6^* = \left(2y_1^* + 6y_2^* + 2y_3^*\right) - 60 = (2 \cdot 15 + 6 \cdot 5 + 2 \cdot 0) - 60 = 0$$

$$y_7^* = \left(8y_1^* + y_3^*\right) - 120 = (8 \cdot 15 + 0) - 120 = 0$$

Таким образом, нулевая оценка показывает, что эта продукция является неубыточной, поскольку оценка ресурсов, расходуемых на выпуск единицы такой продукции, совпадает с оценкой единицы изготовленной продукции.

Что же касается продукции Π_1 и Π_2 являющейся, как установлено выше, убыточной, а потому и не вошедшей в оптимальный план, то для ее оценок $y_4^* = 5$ и $y_5^* = 10$ получаем:

$$y_4^* = \left(4y_1^* + 2y_2^* + y_4^*\right) - 65 = 70 - 65 = 5$$

$$y_5^* = \left(y_1^* + 10y_2^*\right) - 70 = 80 - 70 = 10$$

Отсюда видно, что оценка убыточной продукции показывает, насколько будет снижать каждая единица такой продукции достигнутый оптимальный уровень.

13. Транспортная задача. Закрытая и открытая модели

Частным случаем задачи линейного программирования является транспортная задача (ТЗ). ТЗ в общем виде состоит в определении оптимального плана перевозок некоторого однородного груза из m пунктов отправления $A_1, A_2, ..., A_m$ в n пунктов назначения $B_1, B_2, ..., B_n$. В качестве критерия оптимальности можно взять минимальную стоимость перевозок всего груза, либо минимальное время его доставки.

Рассмотрим задачу с первым критерием, обозначив через c_n - тарифы перевозок единицы груза из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения, через a_i - запасы груза в пункте A_i, через b_j - потребности в грузе пункта B_j, x_{ij} - количество единиц груза, перевозимого из i-го пункта в j-й пункт. Составим математическую модель задачи. Так как от i-го поставщика к j-му потребителю запланировано к перевозке x_{ij} единиц груза.

Таблица 13.1

Поставщики	Потребители				Запасы
	B_1	B_2	...	B_n	
A_1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	...	C_{1n} X_{1n}	a_1
A_2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	...	C_{2n} X_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...
A_m	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}	...	C_{mn} X_{mn}	a_m
Потребности	b_1	b_2	...	b_n	$\sum a_i=\sum b_j$

Соответственно математическая постановка задачи состоит в определении минимума целевой функции

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij} \to \min \qquad (13.1)$$

при условиях: $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$, $j = 1,\ldots,n$, $\qquad (13.2)$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_i, i = 1,\ldots,m, \qquad (13.3)$$

$$x_{ij} \geq 0,\ \ i = 1,\ldots,m;\ j = 1,\ldots,n. \qquad (13.4)$$

Всякое неотрицательное решение систем уравнений (13.2)-(13.4), определяемое матрицей $X = \left(x_{ij}\right)$, называют опорным планом ТЗ, а план $X^* = \left(x_{ij}\right)$ при котором функция $\boldsymbol{Z}$ принимает минимальное значение - называется **оптимальным планом** ТЗ.

Все данные, а затем и опорный план, удобно занести в распределительную таблицу. Если общее количество груза в пунктах отправления и общая потребность в нем в пунктах назначения совпадают, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j\ , \qquad (13.5)$$

то модель ТЗ называется **закрытой**.

Теорема 13.1. Любая транспортная задача, у которой суммарный объем запасов совпадает с суммарным объемом потребностей, имеет решение. (Для доказательства теоремы необходимо показать, что линейная функция на множестве планов при заданных условиях ограничена.)

Доказательство. Пусть

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = M > 0$$

Тогда величины $x_{ij} = \dfrac{a_i b_j}{M}$, $i = 1,\ldots,m$, $j = 1,\ldots,n$ являются планом, так как они удовлетворяют, системе ограничений (13.2), (13.3).

Действительно, подставляя значения x_{ij} в (13.2) и (13.3), имеем

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i b_j}{M} = \frac{a_i}{M} \sum_{j=1}^{n} b_j = \frac{a_i}{M} = a_i, \tag{13.6}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i b_j}{M} = \frac{b_j}{M} \sum_{i=1}^{m} a_i = \frac{b_j}{M} = b_j. \tag{13.7}$$

Выберем из значений C_{ij} наибольшее $C' = \max C_{ij}$ и заменим в линейной функции (13.1) все коэффициенты на C' тогда, учитывая (13.2), получаем

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij} \le C' \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = C' \sum_{i=1}^{m} a_i = C'M.$$

Выберем из значений C_{ij} наименьшее $C'' = \min C_{ij}$ и заменим в линейной функции все коэффициенты на C''**,** тогда имеем

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij} \ge C'' \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = C'' \sum_{i=1}^{m} a_i = C''M. \tag{13.8}$$

Объединяя два последних неравенства в одно двойное, окончательно получаем $C''M \le Z \le C'M$, т. е. линейная функция ограничена на множестве планов транспортной задачи.

Теорема доказана.

Если общее количество груза в пунктах отправления и общая потребность в нем в пунктах назначения не совпадают, то ТЗ называется **открытой**. Введением фиктивного потребителя (если $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$), или фиктивного отправителя (если $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, любая задача приводится к закрытой модели (во всех фиктивных ячейках таблицы полагают $C_{ij} = 0$).

Для разрешимости задачи равенство (13.5) является необходимым и достаточным условием.

Нахождение опорных и оптимального планов ТЗ можно вести симплексным методом, но ввиду специфики ТЗ и большого ее прикладного значения разработаны специальные методы.

14. Определение опорного плана транспортной задачи

Как и при решении задачи линейного программирования симплексным методом, определение оптимального плана транспортной задачи начинают с нахождения какого-нибудь ее опорного плана. Этот план находят **методом северо-западного угла, методом минимального элемента**, **методом аппроксимации Фогеля** или **методом двойного предназначения**.

Сущность этих методов состоит в том, что опорный план находится последовательно за $n+m-1$ шагов, на каждом из которых в таблице условий задачи заполняют одну клетку, которую называют *занятой*. Заполнение одной из клеток обеспечивает полностью либо удовлетворение потребности в грузе одного из пунктов назначения (того, в столбце которого находится заполненная клетка), либо вывоз груза из одного из пунктов отправления (из того, в строке которого находится заполненная клетка).

В первом случае временно исключают из рассмотрения столбец, содержащий заполненную на данном шаге клетку, и рассматриваем задачу, таблица условий которой содержит на один столбец меньше, чем было перед этим шагом, но то же количество строк и соответственно измененные запасы груза в одном из пунктов отправления (в том, за счет запасов которого была удовлетворена потребность в грузе пункта назначения на данном шаге).

Во втором случае временно исключают из рассмотрения строку, содержащую заполненную клетку, и считают, что таблица условий имеет на одну строку меньше при неизменном количестве столбцов и при соответствующем изменении потребности в грузе в пункте назначения, в столбце которого находится заполненная клетка.

После того как проделаны $n+m-2$ описанных выше шагов, получают задачу с одним пунктом отправления и одним пунктом назначения. При этом останется свободной только одна клетка, а запасы оставшегося пункта отправления будут равны потребности оставшегося пункта назначения.

Заполнив эту клетку, тем самым делают ($n+m–1$)-ый шаг и получают искомый опорный план.

Следует заметить, что на некотором шаге (но не на последнем) может оказаться, что потребности очередного пункта назначения равны запасам очередного пункта отправления. В этом случае также временно исключают из рассмотрения либо столбец, либо строку (что-нибудь одно). Таким образом, либо запасы соответствующего пункта отправления, либо потребности данного пункта назначения считают равными нулю. Этот ноль записывают в очередную заполняемую клетку. Указанные выше условия гарантируют получение $n+m-1$ занятых клеток, в которых стоят компоненты определенного плана, что является исходным условием для проверки последнего на оптимальность и нахождение оптимального плана.

Определение 14.1. Опорный план транспортной задачи называется невырожденным, если число базисных ячеек равно $r=n+m-1$, где m - количество строк, n - количество столбцов транспортной задачи.

Определение 14.2. Если число перевозок меньше чем $r=n+m-1$, где m - количество строк, n - количество столбцов транспортной задачи, то такой план называется вырожденным

15. Метод северо-западного угла

При нахождении опорного плана транспортной задачи методом северо-западного угла на каждом шаге рассматривают первый из оставшихся пунктов отправления и первый из оставшихся пунктов назначения. Заполнение клеток таблицы условий начинается с левой верхней клетки для неизвестного x_{11} («северо-западный угол») и заканчивается клеткой для неизвестного x_{mn}, т.е. идет как бы по диагонали таблицы.

Задача 15.1. Пусть условия транспортной задачи заданы в таблице 15.1.

Таблица 15.1

Поставщики	Потребители					Запасы a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10	7	4	1	4	100
A_2	2	7	10	6	11	250
A_3	8	5	3	2	2	200
A_4	11	8	12	16	13	300
Потребности b_j	200	200	100	100	250	850

Методом северо-западного угла составить опорный план задачи.

Решение. Не учитывая стоимости перевозки единицы груза, начинаем удовлетворение потребностей первого потребителя $\boldsymbol{B_1}$ за счет запаса поставщика $\boldsymbol{A_1}$. Для этого сравниваем: $\boldsymbol{a_1 = 100}$ с $\boldsymbol{b_1 = 200}$, $\boldsymbol{a_1 < b_1}$ меньший из объемов, т.е. = 100 ед. записываем в левый нижний угол клетки $\boldsymbol{A_1B_1}$. Запасы первого поставщика полностью израсходованы, по этому остальные клетки первой строки прочеркиваем. Потребности ***B*** остались неудовлетворенными на ***200–100=100 ед.*** Сравниваем этот остаток с запасами поставщика $\boldsymbol{A_2}$***:*** так как ***100<250***, то ***100*** ед. записываем в клетку $\boldsymbol{A_2 B_1}$, чем полностью удовлетворяем потребности потребителя $\boldsymbol{B_1}$, а оставшиеся клетки в первом столбце прочеркиваем.

У поставщика $\boldsymbol{A_2}$ осталось ***150*** ед. груза. Удовлетворяем потребителя $\boldsymbol{B_2}$ за счет оставшегося у поставщика $\boldsymbol{A_2}$ груза. Для этого сравниваем этот остаток с потребностями потребителя $\boldsymbol{B_2}$***: 150<200***, записываем ***150*** ед. в клетку $\boldsymbol{A_2B_2}$ и, так как запасы $\boldsymbol{A_2}$ полностью израсходованы, прочеркиваем остальные клетки второй строки. Потребности $\boldsymbol{B_2}$ остались неудовлетворенными на ***50*** ед. Удовлетворяем их за счет поставщика $\boldsymbol{A_3}$ и переходим к удовлетворению $\boldsymbol{B_3}$ за счет остатка, имеющегося у поставщика $\boldsymbol{A_3}$, и т. д. Процесс продолжаем до тех пор, пока не удовлетворим всех потребителей за счет запасов поставщиков. На этом построение первоначального опорного плана заканчивается.

Таблица 15.2

Поставщики	Потребители					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10 100	7 -	4 -	1 -	4 -	100
A_2	2 100	7 150	10 -	6 -	11	250
A_3	8 -	5 50	3 100	2 50	2 -	200
A_4	11 -	8	12	16 50	13 250	300
Потребности	200	200	100	100	250	850

Таким образом, в таблице 15.2 в правых верхних углах клеток стоят числа, определяющие стоимость перевозки единицы грузов, а в левых нижних углах — числа, определяющие план перевозок, так как их сумма по строкам равна запасам соответствующего поставщика, а сумма по столбцам — потребности соответствующего потребителя.

Проверим, является ли план, построенный в таблице опорным. Видим, что, начиная движение от занятой клетки A_1B_1, вернуться не только в нее, но и в любую другую занятую клетку, двигаясь только по занятым ячейкам, невозможно. Следовательно, план является опорным. В то же время план невырожденный, так как содержит точно $m+n-1=4+5-1=8$ занятых клеток.

При составлении первоначального опорного плана методом северо-западного угла стоимость перевозки единицы груза не учитывалась, поэтому построенный план далек от оптимального.

Найдем общую стоимость составленного плана как сумму произведений объемов перевозок, стоящих в левом углу занятых клеток, на соответствующие стоимости в этих же ячейках:

$$Z=100\cdot10+100\cdot2+150\cdot7+50\cdot5+100\cdot3+50\cdot2+50\cdot16+250\cdot13=6950\,(\text{ед.})$$

Если при составлении опорного плана учитывать стоимость перевозки единицы груза, то план будет значительно ближе к оптимальному.

Задача 15.2. Методом северо-западного угла составить опорный план перевозок груза из трех пунктов отправления с запасами 30, 48, 24 т. в четыре пункта назначения с потребностями 18, 27, 42, 15 т. Тарифы перевозок C_{ij} (в ден/ед.) из $\boldsymbol{A_i}$ ***(i=1,2,3)*** в $\boldsymbol{B_j}$ ***(j=l,2,3,4)*** приведены в матрице:

$$C=\begin{pmatrix} 13 & 7 & 11 & 5 \\ 11 & 8 & 13 & 7 \\ 6 & 10 & 12 & 9 \end{pmatrix}$$

Решение. Составим распределительную таблицу, в которой последовательно, начиная с верхнего левого угла (ячейка $\boldsymbol{A_1 B_1}$) и двигаясь по диагонали таблицы, заполним клетки до $\boldsymbol{A_3 B_4}$.

Таблица 15.3

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы a_i
A_1	**18** 13	**12** 7	11	5	**30**
A_2	11	**15** 8	**33** 13	7	**48**
A_3	6	10	**9** 12	**15** 9	**24**
Потребности b_j	**18**	**27**	**42**	**15**	**102**

Данный план является опорным и невырожденным, так как содержит точно $(m+n-1=4+3-1=6)$ заполненных клеток. Вычислим общую сумму затрат на перевозки груза по этому плану:

$$Z_1 = 18\cdot 13 + 12\cdot 7 + 15\cdot 8 + 33\cdot 13 + 9\cdot 12 + 15\cdot 9 = 1110 \text{ (ед.)}$$

План не учитывал тарифов перевозок и, наверное, не будет оптимальным.

16. Метод минимальной стоимости

Суть метода заключается в том, что из всей таблицы стоимостей выбирают наименьшую и в клетку, которая ей соответствует, помещают меньшее из чисел a_i, или b_j. Затем из рассмотрения исключают либо строку, соответствующую поставщику, запасы которого полностью израсходованы, либо столбец, соответствующий потребителю, потребности которого полностью удовлетворены, либо и строку и столбец, если израсходованы запасы поставщика и удовлетворены потребности потребителя. Из оставшейся части таблицы стоимостей снова выбирают наименьшую стоимость, и процесс распределения запасов продолжают, пока все запасы не будут распределены, а потребности удовлетворены.

Задача 16.1. Методом минимальной стоимости составить опорный план решения задачи, заданной в таблице 15.1.

Решение. В таблице 16.1 дано решение методом минимальной стоимости.

Таблица 16.1

Поставщики	Потребители					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10	7	4	1 100	4	100
A_2	2 200	7 50	10	6	11	250
A_3	8	5	3	2	2 200	200
A_4	11	8 150	12 100	16	13 50	300
Потребности	200	200	100	100	250	850

Действуем следующим образом, выбираем в таблице наименьшую стоимость (это стоимость, помещенная в клетке A_1B_4) так как A_1=B_4=**100** ед. груза помещаем в этой клетке и исключаем из рассмотрения первую строку и четвертый столбец. В оставшейся таблице стоимостей наименьшей является стоимость, расположенная в клетке A_2B_1 и в клетке A_3B_5. Заполняем любую из них, например A_2B_1. Имеем $200 < 250$, следовательно, записываем в нее **200** и исключаем из рассмотрения столбец B_1. В клетку A_3B_5 записываем **200** ед. и исключаем из рассмотрения строку A_3. В оставшейся таблице стоимостей снова выбираем наименьшую стоимость и продолжаем процесс до тех пор, пока все запасы не будут распределены, а потребности удовлетворены.

В результате получен план

$X = (X_{14} = 100;\ X_{21} = 200;\ X_{22} = 50;\ X_{35}= 200,\ X_{42} = 150;\ X_{43} = 100;\ X_{45} = 50)$, остальные значения переменных равны нулю.

План состоит из семи положительных перевозок, следовательно, является вырожденным опорным планом. Определим его стоимость:

$$Z = 100\cdot 1 + 200\cdot 2 + 50\cdot 7 + 200\cdot 2 + 150\cdot 8 + 100\cdot 12 + 50\cdot 13 = 4300 \text{ (ед.)}$$

Стоимость плана перевозок значительно меньше, следовательно, он ближе к оптимальному.

17. Метод аппроксимации Фогеля

Данный метод состоит в следующем:

1. На каждой итерации находят разности между двумя наименьшими тарифами во всех строках и столбцах, записывая их в дополнительные столбец и строку таблицы;
2. Находят $\boldsymbol{max\ \Delta c_{ij}}$ и заполняют клетку с минимальной стоимостью в строке (столбце), которой соответствует данная разность.

Процесс продолжается до тех пор, пока все грузы не будут развезены по потребителям. Данный метод в ряде задач приводит к оптимальному плану.

Задача 17.1. Решим методом аппроксимации Фогеля задачу 15.2.

Решение. Составим с помощью этого метода опорный план уже рассмотренной задачи. Запишем условие в таблицу 17.1.

Таблица 17.1

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы a_i	Δc_{ij}
A_1	^{13}	15 ^{7}	^{11}	15 ^{5}	30	2,2,4,В
A_2	^{11}	12 ^{8}	36 ^{13}	^{7}	48	1,1,5,В
A_3	18 ^{6}	^{10}	6 ^{12}	^{9}	24	3,1,2,В
Потребности b_j	18	27	42	15	102	
Δc_{ij}	5,В	1,2,В	1,1,1,В	2,В		

На первом шаге заполняем клетку $\boldsymbol{A_3\ B_1}$ **(**$\boldsymbol{max\ \Delta c = 5}$ и $\boldsymbol{min\ c_{ij} = 6}$**)**, исключаем 1-ый столбец, отметив в дополнительной строке буквой «***В***» факт выполнения заказа пункта $\boldsymbol{B_1}$. Находим новые разности минимальных тарифов по строкам (в столбцах они не изменились) и $\boldsymbol{max\ \Delta c = 2}$ в 1-ой строке и в 4-ом столбце. Заполняем клетку $\boldsymbol{A_1B_4}$ и исключаем 4-й столбец и т.д. В конце остается последовательно заполнить клетки 3-го столбца остатками запасов в $\boldsymbol{A_1}$, $\boldsymbol{A_3}$, $\boldsymbol{A_2}$.

Составленный опорный план дает значение: $Z_2 = 924 < Z_1$.

Таким образом, наименьшую стоимость для задачи 15.2 имеет опорный план, полученный методом аппроксимации Фогеля, следовательно, он наиболее близок к оптимальному плану.

18. Метод двойного предпочтения

Если таблица стоимостей велика, то перебор всех элементов затруднителен. В этом случае используют метод двойного предпочтения, суть которого заключается в следующем.

В каждом столбце отмечают знаком ***V*** клетку с наименьшей стоимостью. Затем то же проделывают в каждой строке. В результате некоторые клетки имеют отметку ***VV***. В них находится минимальная стоимость, как по столбцу, так и по строке. В эти клетки помещают максимально возможные объемы перевозок, каждый раз исключая из рассмотрения соответствующие столбцы или строки. Затем распределяют перевозки по ячейкам, отмеченным знаком ***V***. В оставшейся части таблицы перевозки распределяют по наименьшей стоимости.

Задача 18.1. Методом двойного предпочтения составить опорный план решения задачи, заданной в таблице 15.1.

Решение. Отмечаем в таблице 18.1 знаком ***V*** ячейку с наименьшей стоимостью в каждом столбце, затем - в каждой строке.

Таблица 18.1

Поставщики	Потребители					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10	7	4	1 VV	4	100
A_2	2 VV	7	10	6	11	250
A_3	8	5 V	3 V	2 V	2 VV	200
A_4	11	8 V	12	16	13	300
Потребности	200	200	100	100	250	850

Ячейки $\boldsymbol{A_1B_4}$, $\boldsymbol{A_2B_1}$, $\boldsymbol{A_3B_5}$ имеют отметку **VV**, следовательно, с них и начинаем заполнение. Затем заполняем ячейку $\boldsymbol{A_4B_2}$ (т.к. в столбце $\boldsymbol{B_2}$ нет ни одной ячейки с отметкой **VV**). В оставшейся части таблицы последовательно заполняем ячейки по минимальной стоимости $\boldsymbol{A_1B_3}$, $\boldsymbol{A_4B_3}$, $\boldsymbol{A_4B_5}$.

План, полученный в таблице 18.2, является вырожденным опорным планом.

Таблица 18.2

Поставщики	Потребители					Запасы
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	10	7	4	1 100	4	100
A_2	2 200	7	10 50	6	11	250
A_3	8	5	3	2	2 200	200
A_4	11	8 200	12 50	16	13 50	300
Потребности	200	200	100	100	250	850

Вычислим общую сумму затрат на перевозку груза по этому плану:

$Z = 100 \cdot 1 + 200 \cdot 2 + 50 \cdot 10 + 200 \cdot 2 + 200 \cdot 8 + 50 \cdot 12 + 50 \cdot 13 = 4250$ (ед.)

Таким образом, для задачи 15.1 наименьшую стоимость имеет опорный план, полученный методом двойного предпочтения и он наиболее близок к оптимальному плану.

19. Теорема о существовании оптимального решения

Пусть одним из рассмотренных методов решения ТЗ найден опорный план, содержащий ***m+n - 1*** занятых клеток (в некоторых из них могут стоять нули). Поставим в соответствие каждому пункту отправления $\boldsymbol{A_i}$ некоторое число u_i, $i=1,...,m$ и каждому пункту назначения B_j - число v_j, $j=1,...,n$.

Эти числа назовем ***потенциалами***, соответственно, пунктов отправления и пунктов назначения.

Вопрос об оптимальности опорного плана решает следующая теорема:

Теорема 19.1. Если для некоторого плана $X^*=\left(x_{ij}\right)$, $i=1,...,m$, $j=1,...,n$ транспортной задачи выполняются условия:

1. $u_i+v_j=c_{ij}$ для $x_{ij}>0$ (для занятых клеток), (19.1)

2. $u_i+v_j<c_{ij}$ для $x_{ij}=0$ (для свободных клеток), (19.2)

то план X^* является оптимальным.

Отметим, что система (19.1) (***m+n-1***) уравнений содержит (***m+n***) неизвестных u_i, v_j, и потому, приравнивая одно из них, например, u_i к нулю, однозначно определим остальные неизвестные.

Для «улучшения» опорного плана (при невыполнении условия (19.2)) выбирают свободную клетку с ***max(***$u_i+v_j-c_{ij}$***)*** и строят для нее **цикл пересчета** (сдвига).

Определение 19.1. **Циклом** называют замкнутую ломаную линию, все вершины которой лежат в занятых ячейках, кроме одной, расположенной в свободной клетке, подлежащей заполнению, а звенья параллельны строкам и столбцам, причем в каждой строке (столбце) лежит не более 2-х вершин. Всем вершинам поочередно приписывают знаки «+» и «-», начиная со свободной клетки. Далее, в свободную клетку помещают груз величиной λ, равной минимальному значению из всех чисел в отрицательных ячейках цикла. Во все положительные клетки прибавляется λ, из отрицательных - вычитается λ (сдвиг по циклу). Нетрудно подсчитать, насколько изменится (уменьшится) стоимость перевозок при новом плане:

$$\Delta Z = \lambda \left| \sum_{+} c_{ij} - \sum_{-} c_{ij} \right|, \tag{19.3}$$

где $\sum_{+} c_{ij}$ - сумма тарифов в положительных вершинах, $\sum_{-} c_{ij}$ - в отрицательных вершинах цикла.

Новый опорный план снова проверяют на оптимальность с помощью системы уравнений потенциалов.

Заметим, что в результате пересчета по циклу может оказаться число занятых клеток меньше, чем ***m+n-1*** (план называется вырожденным). В этом случае следует заполнить числом «***0***» пустую клетку, имеющую минимальный тариф, и не образующую с занятыми клетками замкнутого прямоугольного контура.

Задача 19.1. Проверить оптимальность опорного плана ТЗ, решенной в задаче 15.2.

Решение: Пользоваться будем опорным планом, полученный методом аппроксимации Фогеля, так как он наиболее близок к оптимальному плану.

Таблица 19.1

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы a_i
A_1	13	15 7	11	15 5	30
A_2	11	12 8	36 13	7	48
A_3	18 6	10	6 12	9	24
Потребности b_j	18	27	42	15	102

Составляем систему уравнений потенциалов:

$$\begin{cases} u_1+v_2=7 \\ u_1+v_4=5 \\ u_2+v_2=8 \\ u_2+v_3=13 \\ u_3+v_1=6 \\ u_3+v_3=12 \end{cases}.$$

Полагая $u_1=0$, найдем: $u_2=1$, $u_3=0$, $v_1=6$, $v_2=7$, $v_3=12$, $v_4=5$.

Проверив свободные клетки, находим, что лишь в клетке ***A₁B₃*** будет $u_1+v_3>11=c_{13}$.

Для заполнения этой клетки строим цикл пересчета (см. табл. 19.2).

Таблица 19.2

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы a_i
A_1	13	15 − 7	+ 11	15 5	30
A_2	11	12 + 8	36 − 13	7	48
A_3	18 6	10	6 12	9	24
Потребности b_j	18	27	42	15	102

Сдвиг по циклу на 15 ед. ($\min(15,36)=15$) дает новый опорный план

$$X_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 15 & 15 \\ 0 & 27 & 21 & 0 \\ 18 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

при этом будет: $\Delta Z_2 = 15\left[(11+8)-(7+13)\right] = -15$ и $Z_3 = Z_2 + \Delta Z_2 = 909$ (ед.).

В системе потенциалов для этого плана лишь 1-ое уравнение заменялся равенством $u_1 + v_3 = 11$.

Тогда, положив $u_1 = 0$, находим $v_3 = 11$, $v_4 = 5$, $v_2 = 6$, $v_1 = -5$, $u_2 = 2$, $u_3 = 1$ убеждаемся, что для всех свободных клеток выполняется условие (**). Следовательно, план $X_3 = X_{опт}$ и $Z_{\min} = 909$ (ед.).

Свойство 19.1. Если для некоторого оптимального плана $X^* = (x_{ij})$, $i = 1,...,m$, $j = 1,...,n$ транспортной задачи выполняется условие: $u_i + v_j = c_{ij}$ для $x_{ij} = 0$ (для свободных клеток), то существует как минимум еще один оптимальный план, для которого общая стоимость плана перевозок остается прежней, поскольку $u_i + v_j - c_{ij} = 0$.

Задача 19.2. Проверить оптимальность ТЗ, определенную таблицей 19.3.

Таблица 19.3

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	2	7	3	6	2	50
A_2	9	4	5	7	3	50
A_3	5	7	6	2	4	50
b_j	10	40	20	60	20	150

Решение. Ведем построение опорного плана методом наименьшей стоимости (см. таблицу 19.4).

Таблица 19.4

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	**10** 2	7	**20** 3	6	**20** 2	50
A_2	9	**40** 4	5	**10** 7	**0** 3	50
A_3	5	7	6	**50** 2	4	50
b_j	10	40	20	60	20	150

Замечаем, что в результате пересчета по циклу оказалось, что число занятых клеток меньше, чем ***m+n-1***: $5+3-1=7>6$, т.е. получен вырожденный план. Следовательно, заполняем числом «***0***» пустую клетку ***A₂B₅*** , т.к. она имеет минимальный тариф ($c_{25}=3$) и не образует с занятыми клетками замкнутого прямоугольного контура.

Получаем опорный план: $X=\begin{pmatrix} 10 & 0 & 20 & 0 & 20 \\ 0 & 40 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 & 0 \end{pmatrix}$

Вычислим общую сумму затрат на перевозку груза по этому плану:

$Z=10\cdot 2+20\cdot 3+20\cdot 2+20\cdot 4+10\cdot 7+0\cdot 3+50\cdot 2=550$ ***(ед.).***

Составляем систему уравнений потенциалов: $\begin{cases} u_1+v_1=2 \\ u_1+v_3=3 \\ u_1+v_5=2 \\ u_2+v_2=4 \\ u_2+v_4=7 \\ u_2+v_5=3 \\ u_3+v_4=2 \end{cases}$.

Полагая $u_1=0$, найдем: $u_2=1$, $u_3=-4$, $v_1=2$, $v_2=3$, $v_3=3$, $v_4=6$, $v_5=2$.

Проверив свободные клетки, убеждаемся, что по теореме 19.1 план оптимален, следовательно, $Z = Z_{\min}$.

Данный оптимальный план не является единственным, так как для клетки $\boldsymbol{A_1B_4}$ сумма потенциалов равна стоимости перевозки $u_1 + v_4 = c_{14}$ и в нее по циклу, можно переместить 10 ед. груза.

Задача 19.3. Составить план перевозок грузов с наименьшей общей стоимостью от четырех поставщиков $\boldsymbol{A_i}$ ***(i = 1,2,3,4)***, соответственно, в количествах **100, 400, 100** и **100** ед. К пяти потребителям $\boldsymbol{B_j}$ ***(j = 1,2,3,4,5)***, соответственно, в количествах **50, 100, 150, 200** и **250** ед.. Стоимости перевозок единицы груза из каждого пункта отправления в каждый пункт назначения являются известными величинами и задаются матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 8 & 12 & 16 \\ 16 & 10 & 8 & 6 & 15 \\ 4 & 1 & 9 & 11 & 13 \\ 3 & 2 & 7 & 7 & 15 \end{pmatrix}$$

Решение. Вычислим суммарные запасы и потребности. Соответственно: $\sum_{i=1}^{m} a_i = 700$, $\sum_{j=1}^{n} b_j = 750$. Потребности превышают запасы на **50** ед. Необходимо ввести фиктивного поставщика (строка A_{m+1}), запасы которого составят $A_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i = 50$ (ед.). Получим закрытую модель ТЗ.

Заполняем распределительную таблицу методом минимальной стоимости (см. таблицу 19.5).

Таблица 19.5

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	**50** 1	6	**50** 8	12	16	100
A_2	16	10	**0** 8	**200** 6	**200** 15	400
A_3	4	**100** 1	9	11	13	100
A_4	3	**0** 2	**100** 7	7	15	100
A_5	0	0	0	0	50 0	50
Потребности b_j	50	100	150	200	250	750

Получаем опорный план

$$X = \begin{pmatrix} 50 & 0 & 50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 200 & 200 \\ 0 & 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Вычислим общую сумму затрат на перевозку груза по этому плану:

$$Z = 50\cdot 1 + 50\cdot 8 + 0\cdot 8 + 200\cdot 6 + 200\cdot 15 + 100\cdot 1 + 0\cdot 2 + 100\cdot 7 = 5450 \text{ (ед.)}$$

Проверяем его на оптимальность, для чего составляем систему уравнений потенциалов: $\begin{cases} u_1 + v_1 = 1 \\ u_1 + v_3 = 8 \\ u_2 + v_3 = 8 \\ u_2 + v_4 = 6 \\ u_2 + v_5 = 15 \\ u_3 + v_2 = 1 \\ u_4 + v_2 = 2 \\ u_4 + v_3 = 7 \\ u_5 + v_5 = 0 \end{cases}$.

Полагая $u_1 = 0$, найдем: $u_2 = 0$, $u_3 = -2$, $u_4 = -1$, $u_5 = -15$, $v_1 = 1$, $v_2 = 3$, $v_3 = 8$, $v_4 = 6, v_5 = 15$.

Проверив свободные клетки, находим, что получен оптимальный план.

Анализируя оптимальный план задачи, можно сделать **следующие выводы**: потребитель B_5, получает 50 ед. груза от фиктивного поставщика, следовательно, его потребности будут не удовлетворены на это же количество единиц.

Свойство 19.2. Любая выпуклая линейная комбинация двух оптимальных планов также является оптимальным планом.

Это свойство можно использовать для улучшения планирования, при этом можно учесть особенности, которые не были учтены в математической модели задачи (ранее взятые договорные обязательства, сложившиеся традиции в отношениях и т. д.).

20. Транспортные задачи с ограничениями

При решении конкретных транспортных задач приходится часто учитывать некоторые дополнительные ограничения: невозможность (запрет) поставки груза из A_i в B_j (блокировка), обеспечение пункта B_j, заданным количеством a_{ij} единиц груза за счет пункта отправления A_i и т.п. В этих случаях поступают следующим образом:

1. Запрет перевозок груза из A_i в B_j осуществляется занесением в клетку A_i B_j числа $c_{ij}=M>0$ (здесь и в последующем M - сколь угодно большое число). При оптимальном плане эта клетка будет блокирована.
2. По условию задачи требуется доставить из A_i в B_j α_{ij} единиц груза. Следует занести в начале заполнения таблицы в клетку A_i B_j число α_{ij}, считать ее в дальнейшем свободной (c_{ij} = **M**), а потребности b_j и запасы a_i уменьшить на α_{ij}. Найденный оптимальный план новой задачи будет оптимальным и для исходной (с добавлением $x_{ij} = \alpha_{ij}$).
3. Если требуется из A_i в B_j завести груз $x_{ij} \geq 0$ - заданного числа α_{ij}, то уменьшают запасы a_i и потребности b_j на α_{ij} и находят оптимальный план новой задачи, по которому определяют и решение исходной задачи ($x^*_{ij} = \alpha_{ij} + x_{ij}$, где $x_{ij} > 0$ - компонента плана новой задачи).
4. Иногда требуется перевезти из A_i в B_j груза не более заданного объема $x_{ij} < \alpha_{ij}$. Тогда, чаще всего, поступают следующим образом: в таблицу вводят дополнительный столбец B^*_j с тарифами, равными тарифам столбца B_j, кроме клетки A_iB_j, где полагают $c_{ij}=M$. При этом потребности пункта B_j считаются равными α_{ij}, а B^*_j - равными b_j - α_{ij}.

Находят решение полученной задачи обычными методами или устанавливают ее неразрешимость.

Заметим, что исходная ТЗ разрешима лишь в том случае, когда для нее существует хотя бы один опорный план.

Задача 20.1. Выпуск продукции трех заводов $\boldsymbol{A_1}$, $\boldsymbol{A_2}$, $\boldsymbol{A_3}$ составляет соответственно **260**, **240** и **300** т. Потребности четырех потребителей $\boldsymbol{B_1}$, $\boldsymbol{B_2}$, $\boldsymbol{B_3}$, $\boldsymbol{B_4}$ равны соответственно **300**, **200**, **250** и **100** т. Известно, что продукция завода $\boldsymbol{A_1}$ не требуется пункту $\boldsymbol{B_4}$ и с завода $\boldsymbol{A_3}$ потребителю $\boldsymbol{B_2}$ должно быть доставлено груза не более **50** т. Стоимость перевозки одной тонны продукции из $\boldsymbol{A_i}$ в $\boldsymbol{B_j}$ задана матрицей:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 1 \\ 5 & 7 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

Определить план прикрепления потребителей к заводам, удовлетворяющий поставленным условиям и обеспечивающий минимальные затраты на транспортировку всей продукции завода.

Решение. Заметим, что $\sum_{j=1}^{4} b_j - \sum_{i=1}^{3} a_i = 50$ и поэтому вводим фиктивного поставщика $\boldsymbol{A_4}$ с запасами $\boldsymbol{a_4 = 50}$ и нулевыми тарифами (4-ая строка). Получим закрытую модель ТЗ.

Заполняем распределительную таблицу в следующем порядке. В клетку $\boldsymbol{A_1 B_4}$ записываем число $\boldsymbol{M}$ (блокируем), тем самым выполнив первое условие задачи. Далее в столбце $\boldsymbol{B_2}$ записываем потребности $\boldsymbol{b_2 = 50}$, остальные ***150*** заносим в дополнительный столбец $\boldsymbol{B_5}$. Все тарифы в нем такие же, как и в $\boldsymbol{B_2}$, лишь в клетке $\boldsymbol{A_3 B_5}$ ставим число $\boldsymbol{M}$. Далее по принципу минимальной стоимости заполняем клетки таблицы 20.1.

Таблица 20.1

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Запасы a_i
A_1	**110** ^{3}	^{4}	^{6}	M ^{1}	**150** ^{4}	260
A_2	^{5}	^{7}	**240** ^{2}	^{3}	^{7}	240
A_3	**190** ^{4}	**50** ^{3}	^{8}	**60** ^{6}	M	300
A_4	^{0}	^{0}	**10** ^{0}	**40** ^{0}	^{0}	50
Потребности b_j	300	~~200~~ 50	250	100	150	850

Получаем опорный план:

$$X = \begin{pmatrix} 110 & 150 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 240 & 0 \\ 190 & 50 & 0 & 60 \\ 0 & 0 & 10 & 40 \end{pmatrix}.$$

Проверяем его на оптимальность, для чего составляем систему уравнений потенциалов: $\begin{cases} u_1 + v_1 = 3 \\ u_2 + v_3 = 2 \\ u_3 + v_1 = 4 \\ u_3 + v_2 = 3 \\ u_3 + v_4 = 6 \\ u_4 + v_3 = 0 \\ u_4 + v_4 = 0 \end{cases}.$

Полагая $u_3 = 0$, найдем: $u_1 = -1$, $u_2 = -4$, $u_4 = -6$, $v_1 = 4$, $v_2 = 3$, $v_3 = 6$, $v_4 = 6$.

Проверив свободные клетки, убеждаемся, что для них выполнятся условие (19.2) теоремы, следовательно, план X является оптимальным и $Z_{\min} = 2680$ (ед.).

Задача 20.2. В трех хранилищах горючего ежедневно хранится 175, 125 и 140 т. бензина. Этот бензин ежедневно получают четыре заправочные станции в количествах, равных соответственно 180, 110, 90 и 40 т. Тарифы перевозок 1 т. бензина с хранилищ к заправочным станциям задаются матрицей $C = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 & 1 \end{pmatrix}$. Пусть требуется завести со второго хранилища на третью заправочную станцию горючего не менее 40. Составить такой план перевозок бензина, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

Решение. Для ограничения $x_{23} \geq 40$ вычитаем 40 из запасов и потребностей.

Стоимость доставки единицы груза из каждого пункта отправления в соответствующие пункты назначения задана матрицей тарифов.

Таблица 20.2

	1	2	3	4	Запасы
1	9	7	5	3	175
2	1	2	4	6	85
3	8	10	12	1	140
Потребности	180	110	50	40	

Проверим необходимое и достаточное условие разрешимости задачи: ∑a = 175 + 85 + 140 = 400, ∑b = 180 + 110 + 50 + 40 = 380.

Как видно, суммарная потребность груза в пунктах назначения меньше запасов груза на базах. Следовательно, модель исходной транспортной задачи является открытой. Чтобы получить закрытую модель, введем дополнительную (фиктивную) потребность равную 20 (380—400). Тарифы перевозки единицы груза из хранилища на все заправочные станции полагаем равными нулю.

Занесем исходные данные в распределительную таблицу 20.3.

Таблица 20.3

	1	2	3	4	5	Запасы
1	9	7	5	3	0	175
2	1	2	4	6	0	85
3	8	10	12	1	0	140
Потребности	180	110	50	40	20	

Используя метод наименьшей стоимости, построим первый опорный план транспортной задачи (таблица 20.4).

Таблица 20.4

	1	2	3	4	5	Запасы
1	9	7[110]	5[50]	3	0[15]	175
2	1[85]	2	4	6	0	85
3	8[95]	10	12	1[40]	0[5]	140
Потребности	180	110	50	40	20	

В результате получен первый опорный план, который является допустимым.

Подсчитаем число занятых клеток таблицы, их 7, а должно быть $m + n - 1 = 7$. Следовательно, опорный план является невырожденным.

Значение целевой функции для этого опорного плана равно:

$$F(X) = 7\cdot 110 + 5\cdot 50 + 0\cdot 15 + 1\cdot 85 + 8\cdot 95 + 1\cdot 40 + 0\cdot 5 = 1905.$$

Проверим оптимальность опорного плана (таблица 20.5).

Таблица 20.5

	v_1=8	v_2=7	v_3=5	v_4=1	v_5=0
u_1=0	9	7[110]	5[50]	3	0[15]
u_2=-7	1[85]	2	4	6	0
u_3=0	8[95]	10	12	1[40]	0[5]

Опорный план является оптимальным, так все оценки свободных клеток удовлетворяют условию $u_i + v_j \le c_{ij}$.

Для ограничения $x_{23} \ge 40$ добавляем 40 в (2,3):

$F(X) = 7\cdot 110 + 5\cdot 50 + 0\cdot 15 + 1\cdot 85 + 4\cdot 40 + 8\cdot 95 + 1\cdot 40 + 0\cdot 5 = 2065$ (ед.).