Введение……………………………………………………………..……5
1. Линейное программирование. Некоторые экономические задачи, сводимые к задачам линейного программирования………………..….17
2. Виды задач линейного программирования и способы перехода от одного вида к другому…………………………………………………22
3. Общая задача линейного программирования……………………..…28
4. Основные теоремы линейного программирования…………………….30
5. Графический метод решения задач линейного программирования…...34
6. Симплекс-метод……………………………………..…………42
7. Метод искусственного базиса………………………………………....62
8. Двойственность задач линейного программирования. Таблица соответствия. Достаточное условие оптимальности………………...71
9. Леммы Фаркаша…………………………………………….…..……77
10. Теоремы двойственности. Критерий оптимальности…...……………….82
11. Критерий разрешимости задачи линейного программирования…..….87
12. Задача о наилучшем использовании ресурсов…………………...…...94
13. Транспортная задача. Закрытая и открытая модели…………………102
14. Определение опорного плана транспортной задачи…………….….106
15. Метод северо-западного угла…………………………………….……108
16. Метод минимальной стоимости……………………………...…..112
17. Метод аппроксимации Фогеля…………………………….……..114
18. Метод двойного предпочтения ……………………………...…..116
19. Теорема о существовании оптимального решения…………………..118
20. Транспортные задачи с ограничениями……………………………126
21. Задачи дробно-линейного программирования……………………132
22. Графический метод решения задач дробно-линейного программирования……………………………………………………135
23. Сведение задачи дробно-линейного программирования к задаче линейного программирования……………………………………...147

24. Целочисленное линейное программирование. Графический метод решения……………………………………………………………….……160
25. Метод ветвей и границ……………………………………………167
26. Задача о назначениях…………………………….……………....….172
27. Динамическое программирование..……………………..….…...180
28.Функции Беллмана. Уравнения Беллмана. Условно-оптимальные управления………………………………………………………….188
29. Принцип Беллмана для оптимальных путей…………………….191
30. Оптимальное распределение инвестиций как задача динамического программирования……………………………………………196
31. Задача о замене оборудования……………………………...…….203
32. Марковские модели принятия решений…………………….…..214
Список литературы…………………………………………………….225
Приложение. Великий русский математик, академик Императорской Санкт-Петербургской Академии наук А.А. Марков ………………….…..229

Введение.

Исследование операций – дисциплина относительно молодая, возникшая в связи с потребностью наилучшей организации экономических операций, прогнозирования исхода при принятии различных решений.

Формирование исследования операций как самостоятельной ветви прикладной математики относится к периоду 40-х и 50-х годов 20 века. Последующие полтора десятилетия были отмечены широким применением полученных фундаментальных теоретических результатов к разнообразным практическим задачам и связанным с этим переосмыслением потенциальных возможностей теории. В результате исследование операций приобрело черты классической научной дисциплины, без которой немыслимо базовое экономическое образование.

Обращаясь к задачам и проблемам, составляющим предмет исследования операций, нельзя не вспомнить о вкладе, внесенном в их решение представителями отечественной научной школы, среди которых в первую очередь должен быть назван Л. В. Канторович, ставший в 1975 г. лауреатом премии Шведского национального банка по экономическим наукам памяти Альфреда Нобеля за свои работы по оптимальному использованию ресурсов в экономике.

Начало развития исследования операций как науки традиционно связывают с сороковыми годами двадцатого столетия. Среди первых исследований в данном направлении может быть названа работа Л. В. Канторовича "Математические методы организации и планирования производства", вышедшая в 1939 г. В зарубежной литературе отправной точкой обычно считается вышедшая в 1947 г. работа Дж. Данцига, посвященная решению линейных экстремальных задач.

Следует отметить, что не существует жесткого, устоявшегося и общепринятого определения предмета исследования операций. Часто при ответе на данный вопрос говорится, что ***исследование операций*** представляет собой комплекс научных методов для решения задач эффективного управления организационными системами.

Второе определение: ***исследование операций*** – это научная подготовка принимаемого решения, совокупность методов, предлагаемых для подготовки и нахождения самых эффективных или самых экономичных решений.

Исследование операций занимается расчетами будущих решений, позволяющих избегать серьезных ошибок, экономить силы, деньги и время.

Введем некоторые термины и некоторое количество базовых понятий.

Операция – система действий, объединенных общим замыслом и направленных на достижение конкретной цели.

Решение – выбор зависящих от нас параметров. ***Оптимальное решение*** – то решение, которое по тем или иным признакам предпочтительнее других.

Целевая функция (показатель эффективности) – количественный критерий, который позволяет сравнивать между собой разные по эффективности решения.

Методы оптимизации – методы построения алгоритмов нахождения экстремумов функций и точек, в которых они достигаются, при наличии ограничений и без них.

Исследование операций иногда называют ***теорией принятия оптимальных решений.***

Средства исследования операций: математические модели и методы.

Математическая модель представляет собой записанную в математических символах абстракцию реального явления, конструируемую таким образом, чтобы ее анализ давал возможность проникнуть в сущность исследуемого явления.

Цель исследования операций: предварительное количественное обоснование оптимальных решений. Необходимо понимать, что предложенное решение носит рекомендательный характер, предоставляет данные, помогающие сделать выбор с учетом преимуществ и недостатков. Окончательный же выбор решения остается за тем человеком, который несет за него ответственность.

Содержание исследования операций: математический анализ оптимизационных задач, т.е. задач, в которых осуществляется процесс поиска оптимальных решений, нахождение и разработка новых и совершенствование существующих методов оптимизации.

Задача исследования операций: выявление и количественное обоснование наилучших вариантов проведения операций в условиях существования различных ограничений.

Несмотря на многообразие задач при их решении можно выделить некоторую общую последовательность этапов, через которые проходит любое операционное исследование. Как правило, это:

1. Постановка задачи.
2. Построение содержательной (вербальной) модели рассматриваемого объекта (процесса). На данном этапе происходит формализация цели управления объектом, выделение возможных управляющих воздействий, влияющих на достижение сформулированной цели, а также описание системы ограничений на управляющие воздействия.
3. Построение математической модели, т.е. перевод сконструированной вербальной модели в ту форму, в которой для ее изучения может быть использован математический аппарат.
4. Решение задач, сформулированных на базе построенной математической модели.
5. Проверка полученных результатов на их адекватность природе изучаемой системы, включая исследование влияния так называемых

внемодельных факторов, и возможная корректировка первоначальной модели.

6. Реализация полученного решения на практике.

Центральное место при решении задач этой дисциплины отведено вопросам, относящимся к четвертому пункту приведенной выше схемы. Это делается не потому, что он является самым важным, сложным или интересным, а потому, что остальные пункты существенно зависят от конкретной природы изучаемой системы, в силу чего для действий, которые должны производиться в их рамках, не могут быть сформулированы универсальные и содержательные рекомендации.

В самых разнообразных областях человеческой деятельности встречаются сходные между собой задачи: организация производства, эксплуатация транспорта, боевые действия, расстановка кадров, телефонная связь и т.д. Возникающие в этих областях задачи сходны между собой по постановке, обладают рядом общих признаков и решаются сходными методами.

Пример: организуется какое-то целенаправленное мероприятие (система действий), которое можно организовать тем или иным способом. Необходимо выбрать определенное решение из ряда возможных вариантов. Каждый вариант имеет преимущества и недостатки – сразу не ясно, какой из них предпочтительнее. С целью прояснить обстановку и сравнить между собой по ряду признаков различные варианты, организуется серия математических расчетов. Результаты расчетов показывают, на каком варианте целесообразнее остановится.

Математическое моделирование в исследовании операций является, с одной стороны, очень важным и сложным, а с другой - практически не поддающимся научной формализации процессом. Заметим, что неоднократно предпринимавшиеся попытки выделить общие принципы создания математических моделей приводили либо к декларированию рекомендаций самого общего характера, трудноприложимых для решения конкретных проблем, либо, наоборот, к появлению рецептов, применимых в действительности только к узкому кругу задач. Поэтому более полезным представляется знакомство с техникой математического моделирования на конкретных примерах.

1. План снабжения предприятия.

Имеется ряд предприятий, использующих различные виды сырья; имеется ряд сырьевых баз. Базы связаны с предприятиями различными путями сообщения (железные дороги, автотранспорт, водный, воздушный транспорт). Каждый транспорт имеет свои тарифы. Требуется разработать такой план снабжения предприятий сырьем, чтобы потребности в сырье были удовлетворены при минимальных расходах на перевозки.

2. Постройка участка магистрали.

Сооружается участок железнодорожной магистрали. В нашем распоряжении определенное количество средств: людей, техники и т.п. Требуется назначить очередность работ, распределить людей и технику по участкам пути таким образом, чтобы завершить строительство в минимальные сроки.

3. Выборочный контроль продукции.

Выпускается определенный вид изделий. Для обеспечения высокого качества продукции требуется организовать систему выборочного контроля: определить размер контрольной партии, набор тестов, правила отбраковки и т.д. Требуется обеспечить заданный уровень качества продукции при минимальных расходах на контроль.

Подобные задачи встречаются в практике часто. Они имеют общие черты. В каждой задаче определена цель – цели эти похожи; заданы некоторые условия – в рамках этих условий и нужно принять решение, чтобы данное мероприятие было наиболее выгодным. В соответствии с этими общими чертами применяются и общие методы. Система методов, позволяющая обосновать оптимальность того или иного решения с помощью математического аппарата, и лежит в основе **«исследования операций»**.

Такие оптимизационные задачи носят общее название – **задач математического программирования.**

При решении любой конкретной задачи применение методов исследования операций заключается в следующем:

- построение математических, экономических и статистических моделей для задач принятия решений и управления в сложных ситуациях в условиях неопределенности (наличие случайных факторов);
- изучение взаимосвязей, определяющих возможные последствия принятых решений. Установление критериев эффективности, позволяющих оценить преимущества того или иного варианта.

Методы исследования операций обладают рядом специфических черт. Чтобы подход к решению задач можно было считать операционным, он должен содержать следующие элементы:

1. ***Ориентация на принятие решений.*** Основные результаты анализа должны иметь непосредственное и полностью определенное отношение к выбору способа действий (стратегии или тактики).
2. ***Оценка на основе критерия экономической эффективности.*** Сравнение различных возможных вариантов действий должно основываться на количественных оценках, позволяющих однозначно определить полезность ожидаемого исхода. Количественные оценки для коммерческих фирм обычно предполагают использование таких измеримых величин, как расходы, доходы, наличие денежных средств, норма прибыли от дополнительных капиталовложений и т.д. В рекомендуемом решении должен быть достигнут оптимальный баланс с учетом всех, нередко противоречивых факторов.
3. ***Доверие математической модели.*** Процедуры обращения с упомянутыми выше параметрами должны быть определены настолько точно, чтобы любой специалист в области системного анализа смог их

трактовать совершенно однозначно. Другими словами: опираясь на одни и те же данные, различные специалисты должны получить одинаковые результаты.

4. ***Необходимость использования компьютера.*** Это условие отнюдь не является лишь желательным, оно скорее необходимо. Это обуславливается сложностью используемых математических моделей и большим объемом исходных данных. Вычисления могут быть громоздкими; а могут быть несложными, но в больших объемах (статистические модели).

Основные этапы применения метода исследования операций:

1. Определение цели.
2. Составление плана разработки проекта.
3. Формулировка проблемы.
4. Построение модели.
5. Разработка вычислительного метода.
6. Разработка технического задания на программу для ЭВМ, написание программного кода, перевод программного кода в программу для ЭВМ и отладка программы для ЭВМ.
7. Сбор данных.
8. Проверка модели.
9. Реализация результатов, то есть принятие решения.

К основным методам отыскания оптимальных решений и относится математическое программирование.

К математическому программированию, например, относятся:

1. **Линейное программирование:** состоит в нахождении экстремального значения линейной функции многих переменных при наличии линейных ограничений, связывающих эти переменные.

2. **Нелинейное программирование:** целевая функция и ограничения могут быть нелинейными функциями.
3. **Целочисленное программирование:** особые случаи в задачах линейного и нелинейного программирования, когда на оптимальные решения накладывается условие целочисленности.
4. **Динамическое программирование:** для отыскания оптимального решения планируемая операция разбивается на ряд шагов (этапов) и планирование осуществляется последовательно от этапа к этапу. Однако выбор метода решения на каждом этапе производится с учетом интересов операции в целом.
5. **Теория игр:** пытается математически объяснить явления, возникающие в конфликтных ситуациях, в условиях столкновения сторон. Такие ситуации изучаются психологией, политологией, социологией, экономикой.

Временем рождения линейного программирования принято считать 1939 г., когда была напечатана брошюра Леонида Витальевича Канторовича "Математические методы организации и планирования производства". Поскольку методы, изложенные Л.В.Канторовичем, были мало пригодны для ручного счета, а быстродействующих вычислительных машин в то время не существовало, работа Л.В.Канторовича осталась почти не замеченной. Идеи Л.В.Канторовича не встретили понимания в момент их зарождения и его работа была прервана. Концепции Леонида Витальевича вскоре после Второй мировой войны были переоткрыты на западе. Американский экономист Т.Купманс в течение многих лет привлекал внимание математиков к ряду задач, связанных с военной тематикой. Он активно способствовал тому, чтобы был организован математический коллектив для разработки этих проблем. В итоге было осознано, что надо научиться решать задачи о нахождении экстремумов линейных функций на многогранниках, задаваемых линейными неравенствами. По предложению Купманса этот раздел математики получил название линейного программирования.

Американский математик А.Данциг в 1947 году разработал весьма эффективный конкретный метод численного решения задач линейного программирования (он получил название **симплекс метода**).

Важным моментом в линейном программировании является теория двойственности. **Двойственная модель** линейного программирования используется для изучения поставленной проблемы с точки зрения, отличной от той, которая исследуется в обычной прямой задаче. Прямая и двойственная модели приводят к одному и тому же решению. Единственная причина, по которой предпочтение отдается той или иной модели, состоит в том, что одну из них решить, как правило, легче, чем другую. Однако по мере все более широкого распространения пакетов прикладных программ альтернативное использование прямой или двойственной задачи становится менее существенным. Переменные двойственной модели являются для исходной, или прямой модели теневыми ценами ресурсов. Структура двойственной и прямой задачи одинакова. Если прямая модель линейного программирования построена, из нее легко получить соответствующую двойственную модель.

Идеи линейного программирования в течение пяти-шести лет получили грандиозное распространение в мире, и имена Купманса и Данцига стали повсюду широко известны.

Свое второе рождение линейное программирование получило в начале пятидесятых годов с появлением компьютеров. Тогда началось всеобщее увлечение линейным программированием, вызвавшее в свою очередь развитие других разделов математического программирования.

Линейное программирование является наиболее простым и лучше всего изученным разделом математического программирования.

Задачами **нелинейного программирования** называются задачи математического программирования, в которых нелинейны и (или) целевая функция, и (или) ограничения в виде неравенств или равенств.

Общих способов решения, аналогичных симплекс-методу линейного программирования, для нелинейного программирования не существует.

Задачи нелинейного программирования на практике возникают довольно часто, когда, например, затраты растут непропорционально количеству закупленных или произведённых товаров.

Многие задачи нелинейного программирования могут быть приближены к задачам линейного программирования и найдено близкое к оптимальному решению. Но в целом задачи нелинейного программирования относятся к трудным вычислительным задачам. При их решении часто приходится прибегать к приближенным методам оптимизации. Мощным средством для решения задач нелинейного программирования являются численные методы. Они позволяют найти решение задачи с заданной степенью точности.

При рассмотрении целого ряда задач финансового менеджмента и бизнеса необходимо учитывать требование целочисленности используемых переменных. Такие задачи называются задачами **целочисленного программирования.** Под задачей целочисленного программирования понимается задача, в которой все или некоторые переменные должны принимать целые значения.

В том случае, когда ограничения и целевая функция задачи представляют собой линейные зависимости, задачу называют **целочисленной задачей линейного программирования**. В противном случае, когда хотя бы одна зависимость будет нелинейной, это будет **целочисленной задачей нелинейного программирования**. Особый интерес к задачам целочисленного программирования вызван тем, что во многих практических задачах необходимо находить целочисленное решение ввиду дискретности ряда значений искомых переменных.

Динамическое программирование представляет собой математический аппарат, разработанный для эффективного решения некоторого класса задач математического программирования. Этот класс характеризуется возможностью естественного (а иногда и искусственного) разбиения всей операции на ряд взаимосвязанных этапов. Термин "динамическое" в названии метода возник видимо потому, что этапы предполагаются разделенными во времени. Однако этапами могут быть элементы операции, никак не связанные друг с другом показателем времени. Тем не менее, метод решения подобных многоэтапных задач применяется один и тот же, и его название стало общепринятым, хотя в некоторых источниках его называют многоэтапным программированием.

Модели динамического программирования могут применяться, например, при разработке правил управления запасами, устанавливающими момент пополнения запасов и размер пополняющего заказа; при разработке принципов календарного планирования производства и выравнивания занятости в условиях колеблющегося спроса на продукцию; при распределении дефицитных капиталовложений между возможными новыми направлениями их использования; при составлении календарных планов текущего и капитального ремонта сложного оборудования и его замены; при разработке долгосрочных правил замены выбывающих из эксплуатации основных фондов и т.д.

Динамическое программирование часто помогает решить задачу, переборный алгоритм для которой потребовал бы очень много времени. Этот метод использует **идею пошаговой оптимизации**. В этой идее есть принципиальная тонкость: каждый шаг оптимизируется не сам по себе, а с "оглядкой на будущее", на последствия принимаемого "шагового" решения. Оно должно обеспечить максимальный выигрыш не на данном конкретном шаге, а на всей совокупности шагов, входящих в операцию.

Теория игр - теория математических моделей принятия решений в условиях неопределенности, в условиях столкновения, конфликтных ситуациях, когда принимающий решение субъект (игрок) располагает информацией лишь о множестве возможных ситуаций, в одной из которых он в действительности находится, о множестве решений, которые он может принять, и о количественной мере того выигрыша, который он мог бы получить, выбрав в данной ситуации данную стратегию. Теория игр пытается математически объяснить явления, возникающие в конфликтных ситуациях, в условиях столкновения сторон. От той теории, которая существует в настоящее время, не следует ждать чудодейственных рецептов. Она не предписывает поведение, ведущее к выигрышу. Она лишь указывает, чего может добиться игрок в **наихудшей** для него ситуации и как он должен действовать, чтобы в этой наихудшей ситуации добиться минимального проигрыша (или максимального выигрыша).

Дисциплина «Исследование операций» при подготовке магистров по направлению 27.04.06 – Организация и управление наукоемкими производствами охватывает базовые основы науки исследования операций. В ходе дальнейшего обучения отдельные разделы теории исследования операций будут изучены студентами в других дисциплинах.

1. Линейное программирование. Некоторые экономические задачи, сводимые к задачам линейного программирования

Задачи оптимального планирования, связанные с отысканием оптимума заданной целевой функции при наличии ограничений в виде линейных уравнений или линейных неравенств относятся к задачам линейного программирования.

Линейное программирование - наиболее разработанный и широко применяемый раздел математического программирования. Это объясняется следующим:

- математические модели очень большого числа экономических задач линейны относительно искомых переменных;
- эти типы задач в настоящее время наиболее изучены;
- для них разработаны специальные конечные методы, с помощью которых эти задачи решаются, и соответствующие стандартные программы для их решения на компьютере;
- многие задачи линейного программирования, будучи решенными, нашли уже сейчас широкое практическое применение;
- некоторые задачи, которые в первоначальной формулировке не являются линейными, после ряда дополнительных ограничений и допущений могут стать линейными или могут быть приведены к такой форме, что их можно решать методами линейного программирования.

Итак, **линейное программирование** – это направление математического программирования, изучающее методы решения экстремальных задач, которые характеризуются линейной зависимостью между переменными и линейным критерием.

Необходимым условием постановки задачи линейного программирования являются ограничения на наличие ресурсов, величину спроса, производственную мощность предприятия и другие производственные факторы.

Сущность линейного программирования состоит в **нахождении точек наибольшего или наименьшего значения некоторой функции** при определенном наборе ограничений, налагаемых на аргументы и образующих систему ограничений, которая имеет, как правило, бесконечное множество решений. Каждая совокупность значений переменных (аргументов функции ***F***), которые удовлетворяют системе ограничений, называется **допустимым планом** задачи линейного программирования. Функция ***F***, максимум или минимум которой определяется, называется **целевой функцией** задачи. Допустимый план, на котором достигается максимум или минимум функции ***F***, называется **оптимальным планом** задачи.

Система ограничений, определяющая множество планов, диктуется условиями производства. Задачей линейного программирования (***ЗЛП***) является выбор из множества допустимых планов наиболее выгодного (оптимального).

В общей постановке задача математического программирования выглядит следующим образом:
Имеются какие-то переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и функция этих переменных $f(x) = f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$, которая носит название **целевой** функции. Ставится задача: найти экстремум (максимум или минимум) целевой функции $f(x)$ при условии, что переменные x принадлежат некоторой области G:

$$\begin{cases} f(x) \Rightarrow ext \\ x \in G \end{cases} \tag{1.1}$$

В зависимости от вида функции $f(x)$ и области G и различают разделы математического программирования.

Линейное программирование характеризуется тем, что а) функция $f(x)$ является **линейной** функцией переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, б) область G определяется системой **линейных** равенств или неравенств.

Математическая модель любой задачи линейного программирования включает в себя:

- максимум или минимум целевой функции (критерий оптимальности);
- систему ограничений в форме линейных уравнений и неравенств;
- требование неотрицательности переменных.

Примеры задач линейного программирования.

а) задача по использованию сырья

Таблица 1.1

Виды сырья	Запасы сырья	Виды продукции	
		$П_1$	$П_2$
S_1	b_1	a_{11}	a_{12}
S_2	b_2	a_{21}	a_{22}
S_3	b_3	a_{31}	a_{32}
S_4	b_4	a_{41}	a_{42}
Стоимость 1 ед. продукции		C_1	C_2

a_{ij} – количество единиц сырья вида S_i, расходуемого на производство одной единицы продукции вида $П_j$ ($i=1,\ldots 4$, $j=1,2$).

Реализация x_1 единиц продукции вида $П_1$ и x_2 единиц продукции вида $П_2$.

Конечная цель решаемой задачи – получение максимальной прибыли при реализации продукции.

$$F(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 \to \max$$

при условиях

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &\le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &\le b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 &\le b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 &\le b_4 \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

б) задача о диете

Таблица 1.2

Питательные вещества	Кол-во единиц питательных веществ, содержащихся в единице продукции вида				Количество питательного вещества в диете
	B_1	B_2	…	B_n	
N_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	b_1
N_2	a_{21}	a_{22}	….	a_{2n}	b_2
…	…	…	…	…	…
N_n	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	b_m
Стоимость единицы продукта	C_1	C_2	….	C_n	

a_{ij} - количество единицы питательного вещества вида N_i, содержащегося в одной единице продукта вида B_j.

$x_1 ед \to B_1;$

$x_2 ед \to B_2;$

…

$x_n ед \to B_n$

$$F(x) = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \to \min \qquad (1.2)$$

при ограничениях

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \ge b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \ge b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \ge b_m \end{array}\right\} \quad (1.3)$$

В других ситуациях могут возникать задачи с большим количеством переменных, в систему ограничений которых, кроме неравенств, могут входить и равенства. Поэтому в наиболее общей форме задачу линейного программирования формулируют следующим образом:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \{\le \ge =\} b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \{\le \ge =\} b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \{\le \ge =\} b_m \end{cases} \quad (1.4)$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0 \quad (1.5)$$

$$F(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to (\max)\min \quad (1.6)$$

Коэффициенты a_{ij}, b_i, c_j, $j = 1,2,\ldots, n$, $i = 1, 2, \ldots, m$ – любые действительные числа (возможно 0).

Итак, решения, удовлетворяющие системе ограничений (1.4) условий задачи и требованиям неотрицательности (1.5), называются **допустимыми**, а решения, удовлетворяющие одновременно и требованиям минимизации (максимализации) (1.6) целевой функции, - **оптимальными**.

2. Виды задач линейного программирования и способы перехода от одного вида к другому

Выше описанная задача линейного программирования (ЗЛП) представлена в общей форме, но одна и та же (ЗЛП) может быть сформулирована в различных эквивалентных формах. Наиболее важными формами задачи линейного программирования являются **каноническая** и **стандартная**.

В **канонической форме** ЗЛП является задачей на максимум (минимум) некоторой линейной функции $\boldsymbol{F}$, ее система ограничений состоит только из равенств (уравнений). При этом переменные задачи $x_1, x_2, \ldots, x_n$ являются неотрицательными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.1}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0 \tag{2.2}$$

$$F(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to (\max)\min \tag{2.3}$$

К канонической форме можно преобразовать любую задачу линейного программирования.

Чтобы перейти от одной формы записи задачи линейного программирования к другой, нужно в общем случае уметь, во-первых, сводить задачу минимизации к задаче максимизации, во-вторых, переходить от ограничений-неравенств к ограничениям-равенствам и наоборот, в-третьих, заменять переменные, которые не подчинены условию неотрицательности.

Правило приведения ЗЛП к каноническому виду:

1. Если в исходной задаче некоторое ограничение (например, первое) было неравенством, то оно преобразуется в равенство, введением в левую часть некоторой неотрицательной переменной, причем для неравенства «≤» вводится дополнительная неотрицательная переменная со знаком «+»; в случае неравенства «≥» - со знаком «-»

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1. \qquad (2.4)$$

Вводим переменную

$$x_{n+1} = b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - ... - a_{1n}x_n. \qquad (2.5)$$

Тогда неравенство (2.4) запишется в виде:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1. \qquad (2.6)$$

В каждое из неравенств вводится своя “**уравнивающая**” переменная, после чего система ограничений становится системой уравнений.

Число вводимых дополнительных неотрицательных переменных при преобразовании ограничений-неравенств в ограничения-равенства равно числу преобразуемых неравенств.

Вводимые дополнительные переменные имеют вполне определенный экономический смысл. Так, если в ограничениях исходной задачи линейного программирования отражаются расход и наличие производственных ресурсов, то числовое значение дополнительной переменной в плане задачи, записанной в основной форме, равно объему неиспользуемого соответствующего ресурса.

2. Если в исходной задаче некоторая переменная не подчинена условию неотрицательности, то ее заменяют (в целевой функции и во всех ограничениях) разностью неотрицательных переменных

3. Если в ограничениях правая часть отрицательна, то следует умножить это ограничение на (-1).

4. Наконец, если исходная задача была задачей на минимум, а нам удобнее по каким-либо причинам решать задачу на максимум, то введением новой целевой функции $F_1 = -F$ мы преобразуем нашу задачу на минимум функции F в задачу на максимум функции F_1.

Таким образом, всякую задачу линейного программирования можно сформулировать в канонической форме.

В **стандартной форме** ЗЛП является задачей на максимум (минимум) линейной целевой функции. Система ограничений ее состоит из одних линейных неравенств типа "$\le$" или "$\ge$". Все переменные задачи неотрицательны.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le (\ge) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le (\ge) b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le (\ge) b_m \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, ..., x_n \ge 0 \qquad (2.7)$$

$$F(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to (\max)\min$$

Всякую задачу линейного программирования можно сформулировать в **стандартной форме.**

Приведение к стандартной форме необходимо, так как большинство методов решения задач линейного программирования разработано именно для стандартной формы.

Для приведения к стандартной форме задачи линейного программирования может потребоваться выполнить следующие действия:

- перейти от минимизации целевой функции к ее максимизации;

- изменить знаки правых частей ограничений;

- перейти от ограничений-равенств к неравенствам;

- избавиться от переменных, не имеющих ограничений на знак.

Таблица 2.1

Каноническая (основная) форма	Стандартная (симметрическая) форма	Общая форма
1) ограничения		
Уравнения $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_j,$ $i = 1,\dots,m$	Неравенства $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le (\ge) b_j,$ $i = 1,\dots,m$	Уравнения и неравенства $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \begin{pmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{pmatrix} b_j,\ i = 1,\dots,m$
2) условия неотрицательности		
Все переменные $x_j \ge 0,\ j = 1,\dots,n$	Все переменные $x_j \ge 0,\ j = 1,\dots,n$	Часть переменных $x_j \ge 0,\ j = 1,\dots,s\ (s \le n)$
3) цель задачи $F(x) = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j$		
max или min	max или min	max или min

Задача 2.1. Привести к каноническому виду задачу

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge 1 \\ x_1 - 2x_2 \le 1 \\ x_1 + x_2 \le 3 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$
$$F = x_1 + 2x_2 \to \max$$

Решение. Введем дополнительные переменные x_3, x_4, x_5. Причем в первое неравенство введем неотрицательную переменную x_3 со знаком минус, а во второе и в третье – со знаком плюс переменные x_4, x_5 запишем задачу в виде:

$$\begin{cases} -x_3 = 1 - x_1 + x_2 \\ x_4 = 1 - x_1 + 2x_2 \\ x_5 = 3 - x_1 - x_2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 3 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,\dots,5 \qquad\qquad x_j \ge 0,\ j = 1,\dots,5$$

$$F(x) = x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 \to \max$$

что и дает эквивалентную задачу в канонической форме.

Задача 2.2. Привести к стандартному виду задачу

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 120 \\ x_4 + x_5 + x_6 = 180 \\ x_1 + x_4 = 70 \\ x_2 + x_5 = 140 \\ x_3 + x_6 = 90 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0, x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0,\ x_6 \ge 0$$
$$F = 8x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4 + 9x_5 + 7x_6 \to \min$$

Решение. Выразим через x_1 и x_2 остальные переменные:

$$\begin{cases} x_3 = 120 - x_1 - x_2 \\ x_4 = 70 - x_1 \\ x_5 = 140 - x_2 \\ x_6 = 90 - x_3 \\ x_4 + x_5 + x_6 = 180 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 120 - x_1 - x_2 \\ x_4 = 70 - x_1 \\ x_5 = 140 - x_2 \\ x_6 = 90 - (120 - x_1 - x_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 120 - x_1 - x_2 \\ x_4 = 70 - x_1 \\ x_5 = 140 - x_2 \\ x_6 = x_1 + x_2 - 30 \end{cases}$$

Целевая функция будет выглядеть следующим образом:

$$F = 8x_1 + 5x_2 + 6(120 - x_1 - x_2) + 4(70 - x_1) + 9(140 - x_2) + 7(x_1 + x_2 - 30) \to \min$$

Или, после упрощения:

$$F = 5x_1 - 3x_2 + 2050 \to \min$$

Так как $x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0, x_6 \ge 0$, то перепишем нашу систему следующим образом: $\begin{cases} 120 - x_1 - x_2 \ge 0 \\ 70 - x_1 \ge 0 \\ 140 - x_2 \ge 0 \\ x_1 + x_2 - 30 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 \le 120 \\ x_1 \le 70 \\ x_2 \le 140 \\ x_1 + x_2 \ge 30 \end{cases}$.

Итак, эквивалентная задача в стандартной форме будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 120 \\ x_1 \le 70 \\ x_2 \le 140 \\ x_1 + x_2 \ge 30 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$
$$F = 5x_1 - 3x_2 + 2050 \to \min$$

3. Общая задача линейного программирования

Общая задача линейного программирования состоит в определении минимального (максимального) значения функции

$$F = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j \qquad (3.1)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_j,\ i = 1, \ldots, m \qquad (3.2)$$

$$x_j \geq 0 \ \ (j = 1, \ldots, n). \qquad (3.3)$$

Общая задача имеет также векторную и матричную формы записи.

Векторная форма записи: минимизировать (максимизировать) линейную функцию $F = CX$ при ограничениях

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_n x_n = A_0, X \geq 0, \qquad (3.4)$$

где $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$; $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$; $CX -$ скалярное произведение; векторы

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \quad A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$

состоят соответственно из коэффициентов при неизвестных и свободных членов.

Матричная форма записи: минимизировать (максимизировать) линейную функцию $F = CX$ при ограничениях $AX = A_0, X \geq 0$, где $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n) -$ матрица-строка; $A = (a_{ij}) -$ матрица системы; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} -$ матрица-столбец, $A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix} -$ матрица-столбец.

Определение 3.1. Система векторов $A_1, A_2, \ldots, A_r$ $(r \geq 2)$ называется **линейно зависимой**, если хотя бы один из векторов системы является линейной комбинацией остальных, и **линейно независимой** – в противном случае.

Определение 3.2. **Планом** или допустимым решением задачи линейного программирования называется вектор $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющий условиям (3.2) и (3.3).

Определение 3.3. План $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется **опорным**, если векторы A_i $(i = 1, \dots, m)$, входящие в разложение (3.4) с положительными коэффициентами x_i, являются линейно независимыми.

Так как векторы A_i являются m-мерными, то из определения опорного плана следует, что число его положительных компонент не может превышать m.

Определение 3.4. Опорный план называется **невырожденным**, если он содержит m положительных компонент, в противном случае опорный план называется вырожденным.

Определение 3.5. **Оптимальным планом** или оптимальным решением задачи линейного программирования называется план, доставляющий наименьшее (наибольшее) значение линейной функции.

4. Основные теоремы линейного программирования.

Рассмотрим задачу линейного программирования, записанную векторной форме, состоящую в определении максимального значения функции

$$F = CX \tag{4.1}$$

при условиях

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = A_0, \tag{4.2}$$

$$X \geq 0, \tag{4.3}$$

где $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$; $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$; $CX -$ скалярное произведение; векторы

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \ldots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \quad A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \ldots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$

состоят соответственно из коэффициентов при неизвестных и свободных членов.

Свойства решений задачи линейного программирования (4.1)-(4.3) тесным образом связаны со свойствами выпуклых множеств.

Определение 4.1. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n -$ произвольные точки евклидова пространства E_n. **Выпуклой линейной комбинацией** этих точек называется сумма $\alpha_1A_1 + \alpha_2A_2 + \cdots + \alpha_nA_n$, где $\alpha_i -$ произвольные неотрицательные числа, сумма которых равна 1.

Определение 4.2. Множество называется **выпуклым**, если вместе с любыми двумя своими точками оно содержит и их произвольную выпуклую линейную комбинацию.

На рис. 4.1 изображено выпуклое множество (выпуклый многоугольник), а на рис. 4.2 - невыпуклое.

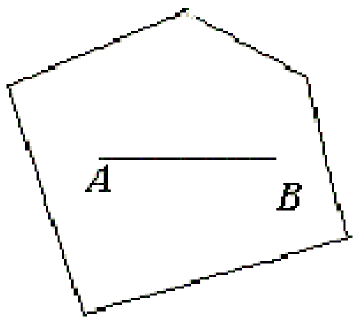

рис. 4.1

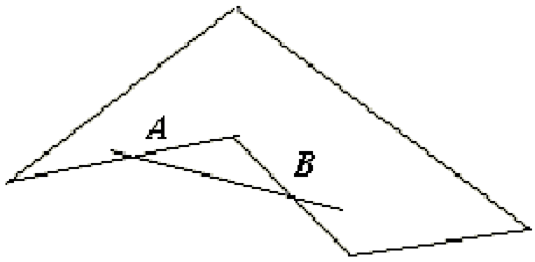

рис. 4.2

Определение 4.3. Точка выпуклого множества называется **угловой**, если она не может быть представлена в виде выпуклой линейной комбинации каких-нибудь двух других различных точек данного множества.

Определение 4.4. **Выпуклым многоугольником** называется выпуклое замкнутое ограниченное множество на плоскости, имеющее конечное число угловых точек.

Определение 4.5. **Выпуклым многогранником** называется замкнутое ограниченное выпуклое множество трехмерного пространства, имеющее конечное число угловых точек. Угловые точки многогранника называются его вершинами.

Теорема 4.1. Множество всех планов задачи линейного программирования является выпуклым (если оно не пусто).

Ранее говорилось, что ограничениями любой задачи линейного программирования являются либо система линейных уравнений, либо система линейных неравенств. Совокупность решений таких систем при условии их совместности, образует выпуклые множества с конечным числом угловых точек.

В частном случае, когда в систему ограничений - неравенств входят только две переменные x_1 и x_2 это множество можно изобразить на плоскости.

Определение 4.6. **Непустое множество планов** общей задачи линейного программирования называется **многогранником решений**, а всякая угловая точка многогранника решений - вершиной.

Теорема 4.2. Если общая задача линейного программирования имеет оптимальный план, то максимальное значение целевая функция задачи принимает в одной из вершин многогранника решений. Если максимальное значение целевая функция задачи принимает более чем в одной вершине, то она принимает его во всякой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией этих вершин.

Из теоремы 4.2 следует, что поиски оптимального решения можно ограничить перебором конечного числа угловых точек (их число меньше C_n^m, где n - число неизвестных, а m – число ограничений), однако построение возможно только для двух и трёхмерных пространств, поэтому нужны аналитические методы, позволяющие находить координаты угловых точек.

Теорема 4.3. Если известно, что система векторов $A_1, A_2, \dots, A_k$ $(k \leq n)$ в разложении (4.2) линейно независима и такова, что

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_kx_k = A_0,$$

где все $x_j \geq 0$, то точка $X = (x_1, x_2, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$ является вершиной многогранника решений.

Теорема 4.4. Если $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$- вершина многогранника решений, то векторы A_j в разложении (4.2), соответствующие положительным x_j, являются линейно независимыми.

Сформулированные теоремы позволяют сделать следующие выводы:

1. Непустое множество планов общей задачи линейного программирования образует выпуклый многогранник.
2. Каждая вершина этого многогранника определяет опорный план.
3. В одной из вершин многогранника решений (т.е. для одного из опорных планов) значение целевой функции является максимальным (при условии, что функция ограничена сверху на множестве планов).

4. Если максимальное значение функция принимает более чем в одной вершине, то это же значение она принимает в любой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией данных вершин.

5. Графический метод решения задач линейного программирования

Графический метод основан на геометрической интерпретации задачи линейного программирования и применяется в основном при решении задач двумерного пространства и только некоторых задач трёхмерного пространства, так как довольно трудно построить многогранник решений, который образуется в результате пересечения полупространств. Задачу пространства размерности больше трёх изобразить графически вообще невозможно.

Задача линейного программирования в стандартной форме с двумя переменными имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m \end{cases} \tag{5.1}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \tag{5.2}$$

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max(\min) \tag{5.3}$$

Эти задачи допускают простое ***геометрическое истолкование***.

Рассмотрим вначале геометрическое истолкование системы ограничений задачи. Каждую совокупность значений переменных x_1, x_2 можно изобразить точкой на плоскости, если ввести систему координат и по одной оси откладывать x_1, а по другой x_2. Выясним, что геометрически означает совокупность решений одного отдельно взятого неравенства: $a_1x_1 + a_2x_2 \le b$.

Рассмотрим прямую на плоскости с уравнением: $a_1x_1 + a_2x_2 = b$. Эта прямая делит плоскость на две полуплоскости, в одной из которых справедливо наше неравенство, а в другой - противоположное. Для того чтобы проверить, какая из полуплоскостей состоит из решений нашего неравенства, следует взять точку из какой-либо полуплоскости и проверить, выполняется ли наше неравенство в этой точке. Множество решений отдельно взятого линейного неравенства представляет собой полуплоскость. Для системы из нескольких таких неравенств точки, координаты которых удовлетворяют всем неравенствам одновременно, должны находиться во всех соответствующих полуплоскостях, т.е. принадлежать теоретико-множественному пересечению этих полуплоскостей. Множество точек на плоскости, удовлетворяющих системе ограничений, составляет, таким образом, некоторую выпуклую многоугольную область (область допустимых решений). Условия неотрицательности переменных $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ приводят к тому, что эта область находится в первой координатной четверти.

При решении двумерных задач линейного программирования возможны следующие ситуации (ОДР - область допустимых решений):

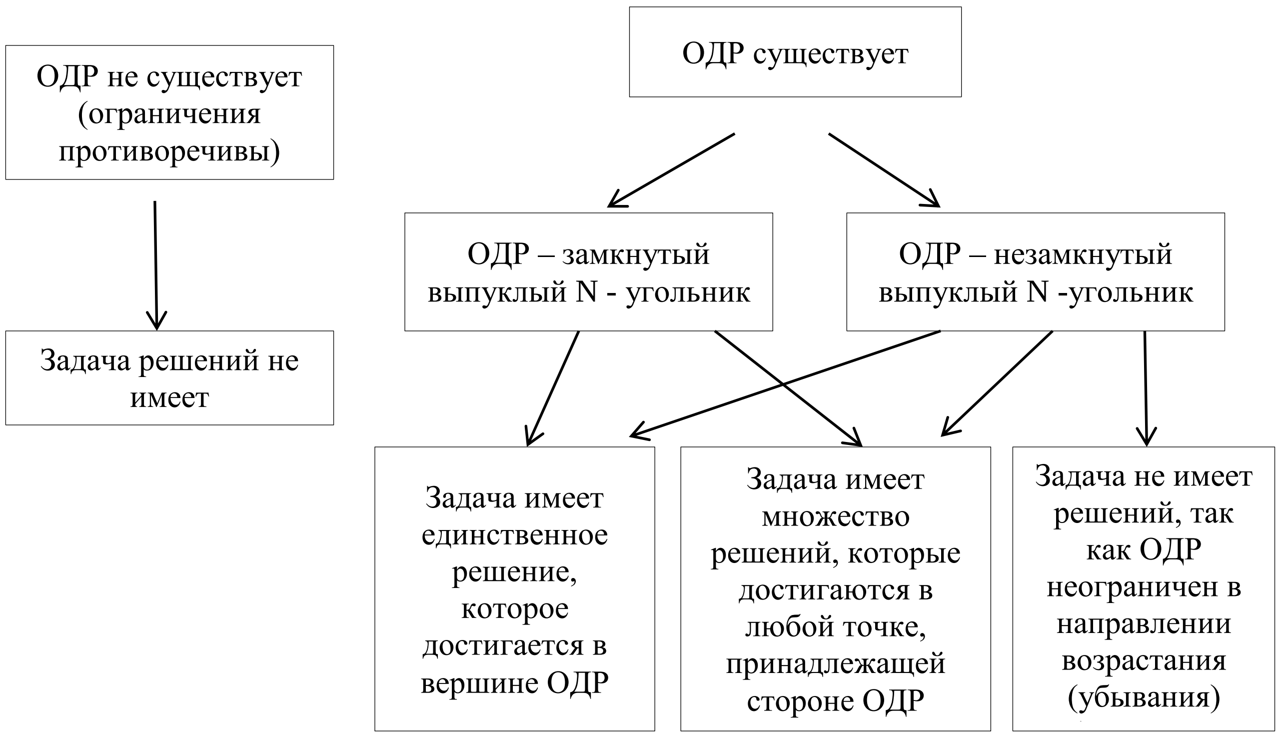

рис. 5.1

Таким образом, исходная задача линейного программирования состоит в нахождении такой точки многоугольника решений, в которой целевая функция F принимает максимальное значение. Эта точка существует тогда, когда многоугольник решений не пуст и на нем целевая функция ограничена сверху. При указанных условиях в одной из вершин многоугольника решений целевая функция принимает максимальное значение. Для определения данной вершины построим линию уровня $C_1x_1 + C_2x_2 = h$ (где h - некоторая постоянная), проходящую через многоугольник решений, и будем передвигать ее в направлении вектора $\vec{C} = (C_1, C_2)$ до тех пор, пока она не пройдет через последнюю ее общую точку с многоугольником решений. Координаты указанной точки и определяют оптимальный план данной задачи.

Отметим, что при нахождении решения задачи (5.1)-(5.3) могут встретиться случаи, изображенные на рис. 5.2– 5.5. Рис.5.2 характеризует такой случай, когда целевая функция принимает максимальное значение в единственной точке *A*. Из рис.5.3 видно, что максимальное значение целевая функция принимает в любой точке отрезка *AB*. На рис.5.4 изображен случай, когда целевая функция неограничена сверху на множестве допустимых решений, а на рис.5.5 – случай, когда система ограничений задачи несовместна, т.е. если система неравенств (5.1) при условии (5.2) не имеет решений.

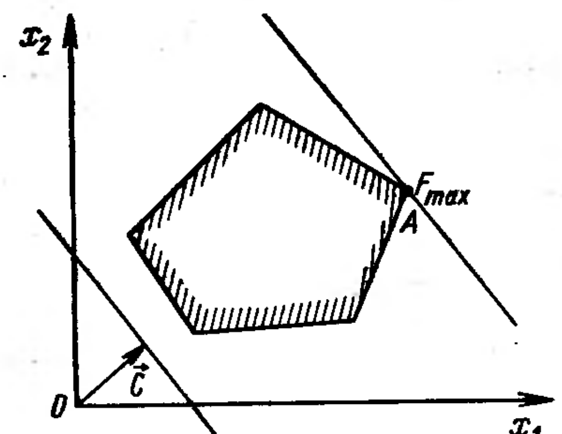

рис. 5.2

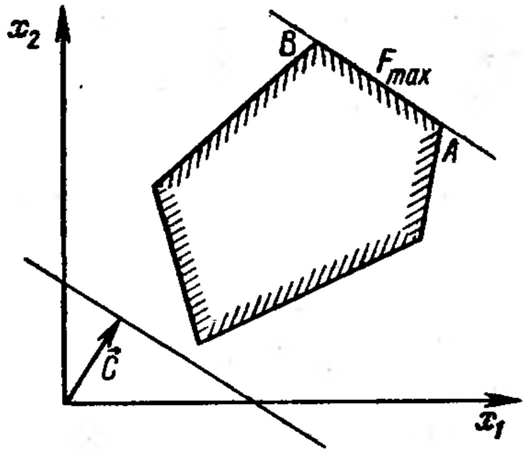

рис. 5.3

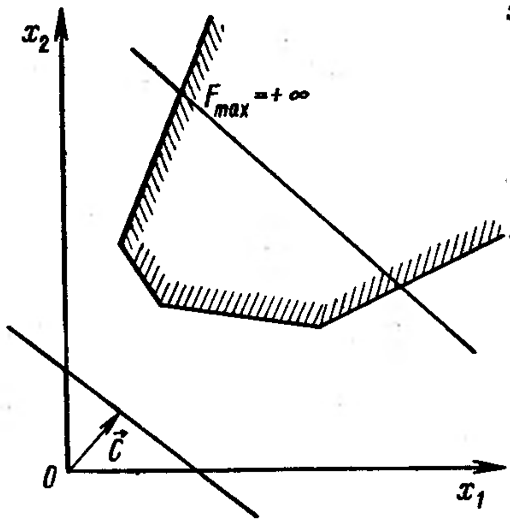

рис. 5.4

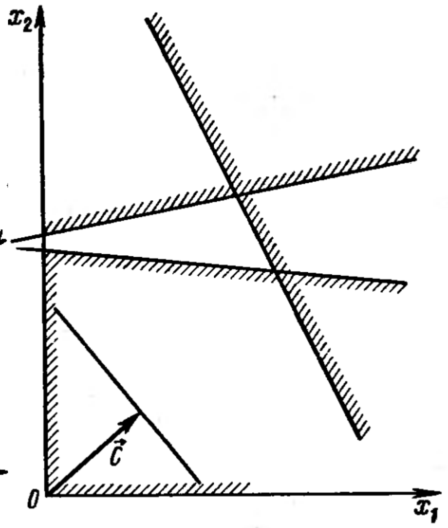

рис. 5.5

Так же отметим, что при нахождении минимального значения линейной функции при данной системе ограничений отличается от нахождения ее максимального значения при тех же ограничениях лишь тем, что линия уровня $C_1x_1 + C_2x_2 = h$ передвигается не в направлении вектора $\vec{C} = (C_1, C_2)$, а в противоположном направлении. Таким образом, отмеченные выше случаи, встречающиеся при нахождении максимального значения целевой функции, имеют место и при определении ее минимального значения.

Алгоритм графического метода решения ЗЛП.

1. Построить область допустимых решений.
2. Если область допустимых решений является пустым множеством, то задача не имеет решения ввиду несовместности системы ограничений.
3. Если область допустимых решений является непустым множеством, построить нормаль линий уровня $n = (c_1, c_2)$ и одну из линий уровня, имеющую общие точки с этой областью.
4. Линию уровня переместить до опорной прямой в задаче на максимум в направлении нормали, в задаче на минимум - в противоположном направлении.

5. Если при перемещении линии уровня по области допустимых решений в направлении, соответствующем приближению к экстремуму целевой функции, линия уровня уходит в бесконечность, то задача не имеет решения в виду неограниченности целевой функции.
6. Если задача линейного программирования имеет оптимальное решение, то для его нахождения решить совместно уравнения прямых, ограничивающих область допустимых решений и имеющих общие точки с соответствующей опорной прямой. Если целевая функция задачи достигает экстремума в двух угловых точках, то задача имеет бесконечное множество решений. Оптимальным решением является любая выпуклая линейная комбинация этих точек. После нахождения оптимальных решений вычислить значение целевой функции на этих решениях.

Задача 5.1. Пусть имеется два станка (S_1, S_2), на каждом из которых можно производить два вида продукции (P_1, P_2). Станок S_1 производит единицу продукции P_1 за 1 час, а единицу продукции P_2 - за 2 часа. Станок S_2 затрачивает на единицу продукции P_1 - 2 часа, а на единицу продукции P_2 - 1 час. Станок S_1 может работать в сутки не более 10 ч., а станок S_2 - не более 8 ч. Стоимость единицы продукции P_1 составляет C_1 руб., а стоимость единицы продукции P_2 - C_2 руб. Требуется определить такие объемы выпуска продукции P_1 и P_2 на станок, чтобы выручка от реализации производственной продукции была максимальной.

Решение. Для наглядности сведем условие задачи в таблицу 5.1.

Таблица 5.1

Вид ресурса	Число единиц ресурса, затрачиваемое на изготовление единицы продукции		Запас ресурса
	P_1	P_2	
S_1	1	2	10
S_2	2	1	8
Прибыль за единицу продукции	C_1	C_2	

Составим математическую модель задачи. Обозначим через x_1 и x_2 количества продукции P_1 и P_2, которое планируется произвести на каждом отдельном станке. Стоимость произведенной продукции $F = c_1x_1 + c_2x_2$. Мы должны назначить x_1 и x_2 так, чтобы величина F была максимальной. Переменные x_1, x_2 не могут принимать произвольных значений. Их значения ограничены условиями производства, а именно тем, что станки могут работать ограниченное время. На изготовление продукции P_1 станок S_1 тратит $1x_1$ часов, а на изготовление продукции P_2 – $2x_2$ часов. Поскольку время работы станка S_1 не превосходит 10 ч, то величины x_1 и x_2 должны удовлетворять неравенству: $x_1 + 2x_2 \le 10$. Аналогично можно получить неравенство для станка S_2: $2x_1 + x_2 \le 8$. Кроме того, величины x_1 и x_2 не могут быть отрицательными: $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$ по смыслу задачи.

Такие задачи кратко записываются следующим образом:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10 \\ 2x_1 + x_2 \le 8 \end{cases} \qquad (5.4)$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \qquad (5.5)$$

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max \qquad (5.6)$$

Итак, математическая модель задачи: найти такой план выпуска продукции $X = (x_1, x_2)$ удовлетворяющей системе (5.4) и условию (5.5), при котором функция (5.6) принимает максимальное значение.

Решения, удовлетворяющие системе ограничений (5.4) и требованием неотрицательности (5.5), являются допустимыми, а решения, удовлетворяющие одновременно и требованием (5.6) оптимальными.

Рассмотрим геометрическое истолкование задачи. Возьмем $c_1 = 1$ и $c_2 = 1$.

Математическая модель задачи:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10 \\ 2x_1 + x_2 \le 8 \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \tag{5.7}$$
$$F = 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \to \max$$

Построение области допустимых решений целевой функции F:

1. Построим прямоугольную систему координат. Так как, x_1 и x_2 неотрицательны, то можно ограничиться рассмотрением первого квадранта.

Рассмотрим первое ограничение: $x_1 + 2x_2 \le 10$ (5.8)

x_1	0	10
x_2	5	0

Рассмотрим второе ограничение: $2x_1 + x_2 \le 8$ (5.9)

x_1	0	4
x_2	8	0

Отложим полученные точки на числовых осях и найдем полуплоскости, которые соответствуют данным ограничениям.

2. Построим нормаль линий уровня $n = (c_1, c_2)$.

3. Линию уровня F переместим до опорной прямой в направлении нормали, т.к. в задаче необходимо определить максимум целевой функции.

4. Точкой максимума здесь является точка C, координаты которой определяются из системы уравнений (5.4), решая которую, получаем точку максимума $C(2,4)$, $F_{\max} = 6$. (см. рис.5.6)

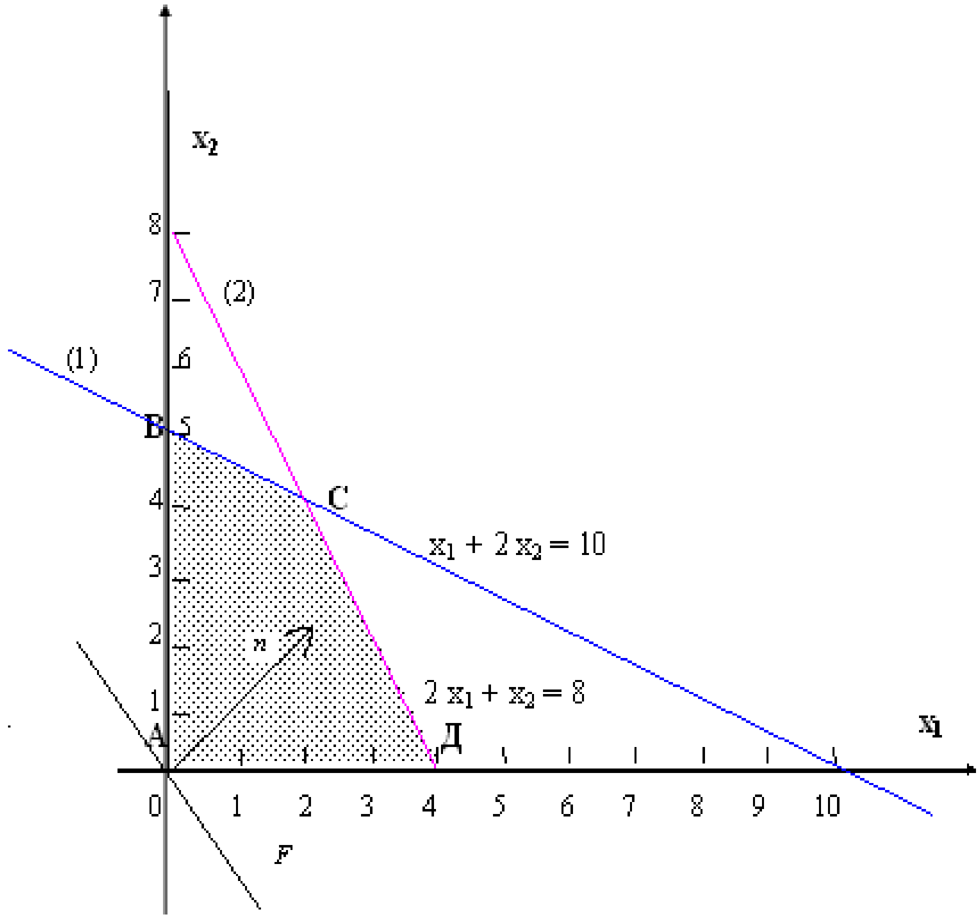

рис.5.6

Двумерные задачи линейного программирования решаются графически**.**

Для случая ***N=3*** можно рассмотреть трехмерное пространство и целевая функция будет достигать своё оптимальное значение в одной из вершин многогранника.

В общем виде, когда в задаче участвуют ***N***-неизвестных, можно сказать, что область допустимых решений, задаваемая системой ограничивающих условий, представляется **выпуклым многогранником** в ***n***-мерном пространстве и оптимальное значение целевой функции достигается в одной или нескольких вершинах.

Для решения ЗЛП любой размерности существует универсальный способ решения задач линейного программирования, называемый **симплекс-методом**.

6. Симплекс-метод.

Существует такая угловая точка многогранника решений, в которой линейная функция достигает своего наименьшего (наибольшего) значения. Каждой угловой точке многогранника решений соответствует опорный план. Каждый опорный план определяется системой m линейно независимых векторов, содержащихся в данной системе из n векторов, $A_1, A_2, \dots, A_n$. Для отыскания оптимального плана необходимо исследовать только опорные планы. Верхняя граница количества опорных планов, содержащихся в данной задачи, определяется числом сочетаний C_n^m. При больших m и n найти оптимальный план, перебирая все опорные планы задачи, очень трудно. Поэтому необходимо иметь схему, позволяющую осуществлять упорядоченный переход от одного опорного плана к другому.

Такой схемой является симплекс-метод, который позволяет, исходя из известного опорного плана задачи, за конечное число шагов получить ее оптимальный план. Каждый из шагов (или итераций) состоит в нахождении нового плана, которому соответствует меньшее значение линейной функции, чем значение этой же функции в предыдущем плане. Процесс продолжают до получения оптимального плана. Если задача не обладает планами или ее линейная функция не ограничена на многограннике решений, то симплекс-метод позволяет установить это в процессе решения.

Построение опорных планов.

Пусть поставлена задача линейного программирования: найти минимальное значение функции $F = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n$ при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad x_j \geq 0 \ (j = 1, \dots, n),$$

где $b_i \geq 0 \ \ (i = 1, .., m)$.

Предположим сначала, что система ограничений задачи содержит m единичных векторов, причем без ограничений общности можно положить, что единичными являются первые m векторов. Тогда необходимо минимизировать линейную функцию

$$F = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n \tag{6.1}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + a_{1,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ x_2 + a_{2,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{6.2}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1, \dots, n). \tag{6.3}$$

Запишем систему (6.2) в векторной форме:

$$x_1A_1 + x_2A_2 + \ldots + x_mA_m + x_{m+1}A_{m+1} + \dots + x_nA_n = A_0, \tag{6.4}$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \quad A_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$A_{m+1} = \begin{pmatrix} a_{1,m+1} \\ a_{2,m+1} \\ \dots \\ a_{m,m+1} \end{pmatrix}, \dots, \quad A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Векторы $A_1, A_2, \dots, A_m$- линейно независимые единичные векторы m-мерного пространства. Они и образуют базис этого пространства. Поэтому в разложении (6.4) за базисные неизвестные выбираем $x_1, x_2, \dots, x_m$, свободные неизвестные $x_{m+1}, \dots, x_n$ приравниваем нулю и, учитывая, что $b_i \geq 0 \ (i = 1, .., m)$, а векторы $A_1, A_2, \dots, A_m$- единичные, получаем первоначальный план:

$$X_0 = (x_1 = b_1; x_2 = b_2; \dots; x_m = b_m; x_{m+1} = 0; \dots; x_n = 0). \tag{6.5}$$

Плану (6.5) соответствует разложение

$$x_1A_1 + x_2A_2 + \ldots + x_mA_m = A_0, \tag{6.6}$$

где векторы $A_1, A_2, \dots, A_m$ линейно независимы, следовательно, построенный первоначальный план является и опорным.

Рассмотрим, как исходя из первоначального опорного плана (6.5), можно построить второй опорный план.

Векторы $A_1, A_2, \dots, A_m$ образуют базис в m-мерном пространстве, поэтому каждый из данных n векторов соотношения (6.4) можно разложить по векторам базиса, причем единственным образом:

$$A_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} A_i \ , j = 1, \dots, n.$$

Предположим, что для некоторого вектора, не входящего в базис, например, для вектора A_{m+1}, положителен хотя бы один из коэффициентов $x_{i,m+1}$ в разложении

$$x_{1,m+1}A_1 + x_{2,m+1}A_2 + \dots + x_{m,m+1}A_m = A_{m+1}. \qquad (6.7)$$

Зададимся некоторой величиной $\theta > 0$ (пока неизвестной), умножим на нее обе части равенства (6.7) и вычтем результат почленно из равенства (6.6).

Получаем

$$\left(x_1 - \theta x_{1,m+1}\right)A_1 + \left(x_2 - \theta x_{2,m+1}\right)A_2 + \dots + \left(x_m - \theta x_{m,m+1}\right)A_m +$$
$$+\theta A_{m+1} = A_{0.} \qquad (6.8)$$

Таким образом, вектор

$$X_1 = (x_1 - \theta x_{1,m+1};\ x_2 - \theta x_{2,m+1}; \dots;\ x_m - \theta x_{m,m+1};\ 0; 0; \dots; 0)$$

является планом, если его компоненты неотрицательны.

Так как $\theta > 0$, то все компоненты вектора X_1, в которые входят неположительные $x_{i,m+1}$, неотрицательны. Поэтому надо рассмотреть только компоненты, включающие положительные $x_{i,m+1}\ (i = 1, \dots, m)$, т.е. необходимо определить такое $\theta > 0$, при котором для всех $x_{i,m+1} > 0$

$$x_i - \theta x_{i,m+1} \geq 0. \qquad (6.9)$$

Из (6.9) получаем $\theta \leq x_i / x_{i,m+1}$, следовательно, вектор X_1- план задачи для любого θ, удовлетворяющего условию

$$0 < \theta \le \min_i \frac{x_i}{x_{i,m+1}}, \tag{6.10}$$

где минимум берется по i, для которых $x_{i,m+1} > 0$.

Опорный план не может содержать m+1 положительных компонент, поэтому в плане X_1 необходимо обратить в ноль по крайней мере одну из компонент.

Положим в (6.10), что

$$\theta = \theta_0 = \min_i \frac{x_i}{x_{i,m+1}}; \tag{6.11}$$

тогда компонента плана X_1, для которой достигается минимум, обращается в ноль. Пусть эта компонента стоит на первом месте, т.е.

$$\theta_0 = \min_i \frac{x_i}{x_{i,m+1}} = \frac{x_1}{x_{1,m+1}}.$$

Подставляя значение θ_0 в (6.8), имеем

$$\left(x_1 - \frac{x_1}{x_{1,m+1}} x_{1,m+1}\right) A_1 + \left(x_2 - \frac{x_1}{x_{1,m+1}} x_{2,m+1}\right) A_2 + \cdots +$$

$$+ \left(x_m - \frac{x_1}{x_{1,m+1}} x_{m,m+1}\right) A_m + \frac{x_1}{x_{1,m+1}} A_{m+1} = A_0,$$

откуда получаем разложение

$$x_2' A_2 + x_3' A_3 + \cdots + x_m' A_m + x_{m+1}' A_{m+1} = A_0,$$

которому соответствует опорный план:

$$X_1 = (0;\ x_2';\ x_3'; \dots;\ x_m';\ x_{m+1}'; 0; \dots; 0),$$

где $x_i' = x_i - \theta_0 x_{i,m+1}\ (i = 2,3, \dots, m), x_{m+1}' = \theta_0$.

Исключение одного вектора из базиса и включение вместо него другого с помощью θ_0 соответствуют переходу от одного базиса к другому с помощью метода Жордана-Гаусса[1], поэтому система векторов $A_2, A_3, \dots, A_m, A_{m+1}$ линейно независима и является новым базисом.

[1] Методом Жордана-Гаусса называется численный метод для решения систем линейных уравнений, который позволяет с помощью элементарных преобразований за конечное число шагов найти решение (если оно существует) и при необходимости получить обратную матрицу. Суть метода состоит в том, что, рассмотрев первое уравнение, а в нем неизвестное с коэффициентом, отличным от нуля (он в дальнейшем называется разрешающим элементом), и разделив первое уравнение на этот коэффициент, с помощью

Для определения следующего опорного плана необходимо любой вектор, не входящий в базис $A_2, A_3, \dots, A_m, A_{m+1}$, разложить по векторам этого базиса, а затем определить такое $\theta_0 > 0$, при котором исключался бы один из векторов этого базиса.

Таким образом, процесс получения новых опорных планов заключается в выборе вектора, который подлежит включению в базис, и определении вектора, подлежащего исключению из базиса. Критерий, используемый для определения вектора, который включается в базис, является одним из основных элементов симплекс-метода. Заметим, что если вектор A_{m+1} подлежит включению в базис, а в его разложении (6.7) все $x_{i,m+1} \le 0$, то, очевидно, нельзя выбрать такое $\theta > 0$, которое исключало бы один из векторов разложения (6.8). В этом случае план X_1 содержит m+1 положительных компонент, а система векторов $A_1, A_2, A_3, \dots, A_m, A_{m+1}$ линейно зависимая и определяет не угловую, а внутреннюю точку многогранника решений, в которой линейная функция не может достигать минимального значения. Это указывает на то, что гиперплоскость соответствующая линейной функции, не может стать опорной[2] к многограннику решений, как бы далеко ни перемещать ее в направлении, обратном вектору $\vec{C}$, т.е. линейная функция не ограничена на многограннике решений.

Таким образом, если система ограничений задачи линейного программирования при неотрицательных свободных членах содержит единичный базис, то без дополнительных вычислений можно получить

первого уравнения исключают это неизвестное из всех уравнений, кроме первого. Выбрав во втором уравнении неизвестное с коэффициентом, отличным от нуля, и разделив на него второе уравнение, с помощью второго уравнения исключают другое неизвестное из всех уравнений, кроме второго, и т. д., т. е. с помощью одного уравнения производят полное исключение одного неизвестного. Процесс продолжают до тех пор, пока не будут использованы все уравнения.

[2] Опорной плоскостью многогранника называется плоскость, имеющая с многогранником, расположенным по одну сторону от нее, хотя бы одну общую точку.

первоначальный опорный план, а также коэффициенты разложения векторов по векторам базиса.

Отыскание оптимального плана. Условие оптимальности. Предположим, что задача линейного программирования (6.1)-(6.3) обладает планами и каждый ее опорный план невырожден. В этом случае для опорного плана (6.5) имеем:

$$x_1A_1 + x_2A_2 + \ldots + x_mA_m = A_0, \quad (6.12)$$

$$x_1C_1 + x_2C_2 + \ldots + x_mC_m = F(X_0), \quad (6.13)$$

где все $x_i > 0$, а $F(X_0) -$ значение линейной функции, соответствующее этому плану.

Разложение любого вектора A_j по векторам данного базиса $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_m$ единственное:

$$x_{1j}A_1 + x_{2j}A_2 + \ldots + x_{mj}A_m = A_j \;\; (j = 1, \ldots, n), \quad (6.14)$$

поэтому разложению вектора A_j в базисе соответствует и единственное значение линейной функции

$$x_{1j}C_1 + x_{2j}C_2 + \ldots + x_{mj}C_m = F_j \;\; (j = 1, \ldots, n), \quad (6.15)$$

где $F_j -$значение линейной функции, если в нее вместо неизвестных подставить соответствующие коэффициенты разложения j-го вектора по векторам базиса.

Обозначим через C_j коэффициент линейной функции, соответствующий вектору A_j. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 6.1. Если для некоторого вектора A_j выполняется условие $F_j - C_j > 0$, то план X_0 не является оптимальным, и можно построить такой план X, для которого выполняется неравенство $F(X) < F(X_0)$.

Доказательство. Умножая (6.14) и (6.15) на $\theta > 0$ и вычитая результаты соответственно из (6.12) и (6.13), получаем

$$\left(x_1 - \theta x_{1j}\right)A_1 + \left(x_2 - \theta x_{2j}\right)A_2 + \cdots + \left(x_m - \theta x_{mj}\right)A_m + \theta A_j = A_0, \quad (6.16)$$

$$\left(x_1 - \theta x_{1j}\right)C_1 + \left(x_2 - \theta x_{2j}\right)C_2 + \cdots + \left(x_m - \theta x_{mj}\right)C_m + \theta C_j =$$

$$= F(X_0) - \theta\left(F_j - C_j\right). \quad (6.17)$$

В соотношении (6.17) к обеим частям прибавлена величина θC_j для $j = 1, \dots, n$. В (6.16) $x_1, x_2, \dots, x_m$ положительны, поэтому всегда можно выбрать такое $\theta > 0$, чтобы все коэффициенты при векторах $A_1, A_2, A_3, \dots, A_m, A_j$ были неотрицательными, т.е. получить новый план задачи: $X = \left(x_1 - \theta x_{1j};\ x_2 - \theta x_{2j}; \dots;\ x_m - \theta x_{mj};\ 0; 0; \dots; 0\right)$, которому согласно (6.17) соответствует значение линейной функции

$$F(X) = F(X_0) - \theta\left(F_j - C_j\right). \quad (6.18)$$

Так как по условию теоремы $F_j - C_j > 0$ и $\theta > 0$, то $F(X) < F(X_0)$.

Следствие. Если для некоторого плана X_0 разложения всех векторов A_j $(j = 1, \dots, n)$ в данном базисе удовлетворяют условию

$$F_j - C_j \leq 0, \quad (6.19)$$

то план X_0 является оптимальным.

Неравенства (6.19) являются условием оптимальности плана задачи, решаемой на отыскание минимального значения линейной функции, а значения $F_j - C_j$ называются оценками плана.

Таким образом, для того чтобы план задачи на отыскание минимального значения линейной функции был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы его оценки были неположительными.

Для задачи линейного программирования (6.1)-(6.3), заключающейся в отыскании максимального значения линейной функции, справедлива следующая теорема.

Теорема 6.2. Если для некоторого вектора A_j выполняется условие $F_j - C_j < 0$, то план X_0 не является оптимальным и можно построить такой план X, для которого выполняется неравенство $F(X) > F(X_0)$.

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 6.1.

Следствие. Если для некоторого плана X_0 разложения всех векторов A_j $(j = 1, \dots, n)$ в данном базисе удовлетворяют условию

$$F_j - C_j \geq 0, \tag{6.20}$$

то план X_0 является оптимальным.

Неравенство (6.20) - условие оптимальности плана задачи на отыскание максимального значения линейной функции.

Таким образом, для того чтобы план задачи на отыскание максимального значения линейной функции был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы его оценки были неотрицательными.

Алгоритм симплекс-метода.

Как следует из теоремы 6.1 и теоремы 6.2 и следствий, начиная с исходного опорного плана задачи можно получить последовательность опорных планов, завершающихся оптимальным планом.

Продолжим рассмотрение задачи линейного программирования (6.1)-(6.3) на отыскание минимального значения линейной функции, опорный план которой $X_0 = (x_1 = b_1; x_2 = b_2; \dots; x_m = b_m; x_{m+1} = 0; \dots; x_n = 0)$ определяется системой m-мерных единичных векторов $A_1, A_2, A_3, \dots, A_m$. Для исследования этого опорного плана на оптимальность необходимо векторы A_j $(j = 1, \dots, n)$ системы (6.2) разложить по векторам базиса $A_1, A_2, A_3, \dots, A_m$ и подсчитать значения оценок $F_j - C_j$. Базис является единичным, поэтому коэффициентами разложения вектора A_jпо базису служат его компоненты, т.е. $x_{ij} = a_{ij}$ $(i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$. Дальнейшие вычисления удобнее проводить, если условия задачи и первоначальные данные, полученные после определения первого опорного плана, записать в симплексную таблицу (таблица 6.1). В столбце С базиса запишем коэффициенты линейной функции, соответствующие векторам базиса. В столбце A_0- первоначальный опорный план X_0, в нем же в результате вычислений получаем оптимальный план, в столбцах A_j $(j = 1, \dots, n)$ записываем коэффициенты разложения j-го вектора по базису, обозначаемые в дальнейшем через X_j. В (m+1)-й строке в столбце A_0 записываем значения линейной функции $F(X_0)$, которое она принимает при найденном опорном плане, а в столбцах A_j- значения оценок $F_j - C_j$. Функции $F(X_0)$ и $F_j = F(X_j)$ находим, подставляя в линейную функцию соответственно компоненты опорного плана и коэффициенты разложения j-го вектора по векторам базиса, поэтому эти значения в таблице 6.1 можно получить как скалярное произведение:

$$F(X_0) = C_б X_0 = \sum_{i=1}^{m} C_i x_i \,,$$

$$F_j = C_б X_j = \sum_{i=1}^{m} C_i x_{ij} \ , j = 1, \dots, n,$$

где $C_i -$ коэффициенты линейной функции, соответствующие векторам базиса.

Таблица 6.1

i	*базис*	$C_б$	A_0	C_1	C_2	$\dots$	C_l	$\dots$	C_m	C_{m+1}	$\dots$	C_j	$\dots$	C_k	$\dots$	C_n
				A_1	A_2	$\dots$	A_l	$\dots$	A_m	A_{m+1}	$\dots$	A_j	$\dots$	A_k	$\dots$	A_n
1	A_1	C_1	x_1	1	0	$\dots$	0	$\dots$	0	$x_{1,m+1}$	$\dots$	x_{1j}	$\dots$	x_{1k}	$\dots$	x_{1n}
2	A_2	C_2	x_2	0	1	$\dots$	0	$\dots$	0	$x_{2,m+1}$	$\dots$	x_{2j}	$\dots$	x_{2k}	$\dots$	x_{2n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
l	A_l	C_l	x_l	0	0	$\dots$	1	$\dots$	0	$x_{l,m+1}$	$\dots$	x_{lj}	$\dots$	x_{lk}	$\dots$	x_{ln}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
m	A_m	C_m	x_m	0	0	$\dots$	0	$\dots$	1	$x_{m,m+1}$	$\dots$	x_{mj}	$\dots$	x_{mk}	$\dots$	x_{mn}
m+1	$F_j - C_j$		F_0	0	0	$\dots$	0	$\dots$	0	$F_{m+1} - C_{m+1}$	$\dots$	$F_j - C_j$	$\dots$	$F_k - C_k$	$\dots$	$F_n - C_n$

После составления таблицы 6.1 просматриваем (m+1)-ю строку. Если для всех $j = 1, \dots, n$ разности $F_j - C_j \le 0$, то опорный план X_0 оптимальный и минимальное значение линейной функции равно $F(X_0)$.

Пусть одна из оценок $F_j - C_j > 0$; тогда план X_0 не является оптимальным и, включая в базис вектор, соответствующий этой оценке, можно построить другой опорный план, которому соответствует меньшее значение линейной функции.

Если положительных оценок несколько, то на основании соотношения (6.18) в базис должен быть включен вектор, которому соответствует $max[\theta_{0j}\,(F_j - C_j)]$, где максимум берется по тем j, для которых $F_j - C_j > 0$ и θ_{0j} определяется для каждого j. Это дает возможность на данном шаге перейти к вершине многогранника решений, связанной с наибольшим уменьшением линейной функции и в большинстве случаев приводящей к уменьшению количества итераций, что при решении задачи «вручную» позволяет быстрее получить оптимальное решение. При решении задачи на компьютере вектор, подлежащий включению в базис, выбирается по $max(F_j - C_j)$. Если имеется несколько одинаковых максимальных значений $\theta_{0j}(F_j - C_j)$, то из соответствующих им векторов включается в базис прежде всего вектор, которому соответствует $min\,C_j$. Если хотя бы для одной положительной оценки $F_j - C_j > 0$ коэффициенты разложения x_{ij} соответствующего вектора неположительны, то линейная функция не ограничена на многограннике решений и, выбирая θ, ее значение можно сделать сколь угодно малым; многогранник решений в этом случае представляет собой неограниченную многогранную область.

Пусть $max[\theta_{0j}\,(F_j - C_j)] = \theta_{0k}(F_k - C_k)$, т.е. максимальное значение достигается для k-го вектора, $m < k \le n$. Тогда в базис включается вектор A_k и исключается вектор, которому соответствует $\theta_{0k} = min(x_i/x_{ik})$ $(x_{ik} > 0)$.

Допустим, что $\theta_{0k} = min(x_i/x_{ik}) = x_l/x_{lk}$ достигается для вектора базиса, состоящего в l-й строке; тогда вектор A_l исключается из базиса. Элемент x_{lk} называется разрешающим, а столбец и строка, на пересечении которых он находится, - направляющими. Новому опорному плану соответствует базис, состоящий из векторов $A_1, \dots, A_{l-1}, A_k, A_{l+1}, \dots, A_m$.

Чтобы вычислить новый опорный план и проверить его на оптимальность, необходимо все векторы A_0, A_j $(j = 1, \dots, n)$ разложить по векторам базиса.

Первоначальный базис был единичным $(A_1, A_2, A_3, \dots, A_m) = E$, поэтому

$$A_0 = x_1 A_1 + \cdots + x_l A_l + \ldots + x_m A_m, \tag{6.21}$$

$$A_k = x_{1k} A_1 + \cdots + x_{lk} A_l + \ldots + x_{mk} A_m, \tag{6.22}$$

$$A_j = x_{1j} A_1 + \cdots + x_{lj} A_l + \ldots + x_{mj} A_m. \tag{6.23}$$

Из (6.22) имеем

$$A_l = 1/x_{lk}(A_k - x_{1k} A_1 - \cdots - x_{mk} A_m). \tag{6.24}$$

Подставляя выражение A_l в (6.21), получаем

$$A_0 = x_1 A_1 + \cdots + x_l \left[\frac{1}{x_{lk}}(A_k - x_{1k} A_1 - \cdots - x_{mk} A_m)\right] + \ldots + x_m A_m \,,$$

или

$$A_0 = (x_1 - \frac{x_l}{x_{lk}} x_{1k}) A_1 + \cdots + \frac{x_l}{x_{lk}} A_k + \ldots + (x_m - \frac{x_l}{x_{lk}} x_{mk}) A_m.$$

Таким образом, новый опорный план $X_0 = (x'_1, x'_2, \dots, x'_k, \dots, x'_m)$ вычисляется по формулам

$$\begin{cases} x'_i = x_i - \frac{x_l}{x_{lk}} x_{ik} & (i \neq l), \\ x'_k = \frac{x_l}{x_{lk}} & (i = l). \end{cases} \tag{6.25}$$

Подставляя в (6.24) в (6.23), получаем разложение вектора A_j по векторам нового базиса:

$$A_j = x'_{1j} A_1 + \cdots + x'_{kj} A_k + \ldots + x'_{mj} A_m \,,$$

где

$$\begin{cases} x'_{ij} = x_{ij} - \frac{x_{lj}}{x_{lk}} x_{ik} & (i \neq l), \\ x'_{kj} = \frac{x_{lj}}{x_{lk}} & (i = l). \end{cases} \tag{6.26}$$

Объединяя (6.25) и (6.26), находим, что новый опорный план и разложения векторов в новом базисе при $j = 0,1, \dots, n$ определяются по формулам

$$\begin{cases} x'_{ij} = x_{ij} - \frac{x_{lj}}{x_{lk}} x_{ik} \ \ (i \neq l), \\ x'_{lj} = \frac{x_{lj}}{x_{lk}} \qquad\qquad (i = l). \end{cases} \tag{6.27}$$

Полагая $j=k$, имеем

$$\begin{cases} x'_{ik} = x_{ik} - \dfrac{x_{lk}}{x_{lk}} x_{ik} = 0 \ \ (i \neq l), \\ x'_{lk} = \dfrac{x_{lk}}{x_{lk}} = 1 \qquad\qquad (i = l), \end{cases}$$

т.е. все коэффициенты разложения вектора, вводимого в базис, за исключением одного, обращаются в ноль, а коэффициент, взятый за разрешающий элемент,- в единицу. Вектору базиса соответствует оценка, равная нулю, поэтому для вычисления значений (m+1)-й строки также используем формулы (6.27).

Таким образом, чтобы получить коэффициенты разложения векторов $A_0, A_j \ (j = 1, \dots, n)$ по векторам нового базиса, значения оценок нового опорного плана и значение линейной функции, нужно разделить все элементы направляющей строки на разрешающий элемент и, производя одно полное исключение по методу Жордана-Гаусса с помощью этой преобразованной строки, составить симплексную таблицу 6.2.

Формулы

$$F(X_0) = C_б X_0; \ F_j - C_j = C_б X_j - C_j \tag{6.28}$$

используют для контроля за правильностью произведенных вычислений.

Если в таблице 6.2 в (m+1)-й строке все оценки $F_j - C_j \leq 0$, то полученный план X_0 является оптимальным; если же имеются положительные оценки, то отыскивают следующий опорный план.

Процесс продолжают либо до получения оптимального плана, либо до установления неограниченности линейной функции решаемой задачи. Если среди оценок оптимального плана нулевые только оценки, соответствующие базисным векторам, то это говорит о единственности оптимального плана. Если же нулевая оценка соответствует вектору, не входящему в базис, то в общем случае это означает, что оптимальный план не единственный.

Таблица 6.2

i	*базис*	$C_б$	A_0	C_1	C_2	$\dots$	C_l	$\dots$	C_m	C_{m+1}	$\dots$	C_j	$\dots$	C_k	$\dots$	C_n
				A_1	A_2	$\dots$	A_l	$\dots$	A_m	A_{m+1}	$\dots$	A_j	$\dots$	A_k	$\dots$	A_n
1	A_1	C_1	x'_1	1	0	$\dots$	x'_{1l}	$\dots$	0	$x'_{1,m+1}$	$\dots$	x'_{1j}	$\dots$	0	$\dots$	x'_{1n}
2	A_2	C_2	x'_2	0	1	$\dots$	x'_{2l}	$\dots$	0	$x'_{2,m+1}$	$\dots$	x'_{2j}	$\dots$	0	$\dots$	x'_{2n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
l	A_k	C_k	x'_k	0	0	$\dots$	x'_{ll}	$\dots$	0	$x'_{l,m+1}$	$\dots$	x'_{lj}	$\dots$	1	$\dots$	x'_{ln}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
m	A_m	C_m	x'_m	0	0	$\dots$	x'_{ml}	$\dots$	1	$x'_{m,m+1}$	$\dots$	x'_{mj}	$\dots$	0	$\dots$	x'_{mn}
$m+1$	$F_j - C_j$		F'_0	0	0	$\dots$	$F'_l - C_l$	$\dots$	0	$F'_{m+1} - C_{m+1}$	$\dots$	$F'_j - C_j$	$\dots$	0	$\dots$	$F'_n - C_n$

Используя теорему 6.2 и ее следствие, решаем задачу линейного программирования на отыскание максимального значения линейной функции.

При невыполнении условия оптимальности (6.20) в базис включают в первую очередь тот вектор, которому соответствует $min[\theta_{0j}\,(F_j - C_j)]$, где минимум берется по тем j, для которых $F_j - C_j < 0$. Если минимальных оценок несколько, то в базис прежде всего включают вектор, которому соответствует $max\,C_j$. В остальном симплексный процесс аналогичен процессу, имеющему место при отыскании минимального значения линейной функции.

Рассмотрим порядок решения задачи с помощью симплекс-таблиц на примере.

Задача 6.1 (об использовании сырья) Для производства четырех видов изделий A_1, A_2, A_3, A_4 завод должен использовать три вида сырья I, II, III, запасы которого на планируемый период составляют соответственно 1000, 600 и 150 условных единиц. В приведенной ниже таблице даны технологические коэффициенты, т.е. расход каждого вида сырья на производство единицы каждого изделия и прибыль от реализации единицы изделия каждого вида.

Таблица 6.3

Виды сырья	Запасы сырья	Технологические коэффициенты			
		A_1	A_2	A_3	A_4
I	1000	5	1	0	2
II	600	4	4	2	1
III	150	1	0	2	1
Прибыль от реализации		6	2	2,5	4

Требуется составить такой план выпуска указанных изделий, чтобы обеспечить максимальную прибыль от их реализации.

Решение. Обозначим через x_1, x_2, x_3, x_4 количество единиц соответствующих изделий A_1, A_2, A_3, A_4.

Тогда математическая модель задачи будет следующая:

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_4 \le 1000 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \le 600 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 \le 150 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0$$

$$F = 6x_1 + 2x_2 + 2,5x_3 + 4x_4 \to \max$$

Для построения первого опорного плана систему неравенств приведем к системе уравнений путем введения дополнительных неотрицательных переменных (**переход к канонической форме**). В 1-м неравенстве вводим базисную переменную x_5. В 2-м неравенстве вводим базисную переменную x_6. В 3-м неравенстве вводим базисную переменную x_7.

$$\begin{cases} 5\cdot x_1 + 1\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + 2\cdot x_4 + 1\cdot x_5 + 0\cdot x_6 + 0\cdot x_7 = 1000 \\ 4\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + 2\cdot x_3 + 1\cdot x_4 + 0\cdot x_5 + 1\cdot x_6 + 0\cdot x_7 = 600 \\ 1\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 2\cdot x_3 + 1\cdot x_4 + 0\cdot x_5 + 0\cdot x_6 + 1\cdot x_7 = 150 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1,...,7\ .$$

Матрица коэффициентов A = a(ij) этой системы уравнений имеет вид:

5	1	0	2	1	0	0
4	2	2	1	0	1	0
1	0	2	1	0	0	1

Базисные переменные это переменные, которые входят только в одно уравнение системы ограничений и притом с единичным коэффициентом. **Экономический смысл дополнительных переменных**: дополнительные переменные ЗЛП обозначают излишки сырья, времени, других ресурсов, остающихся в производстве данного оптимального плана.

Решим систему уравнений относительно базисных переменных: x_5, x_6, x_7.

Полагая, что **свободные переменные** равны 0, получим первый опорный план: X1 = (0,0,0,0,1000,600,150)

Базисное решение называется допустимым, если оно неотрицательно.

Таблица 6.4

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_5	1000	5	1	0	2	1	0	0
x_6	600	4	2	2	1	0	1	0
x_7	150	1	0	2	1	0	0	1
F(X0)	0	-6	-2	-2.5	-4	0	0	0

Переходим к основному алгоритму симплекс-метода. **Итерация №0**.

1. Проверка критерия оптимальности.

Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты.

2. Определение новой базисной переменной.

В индексной строке F(x) выбираем максимальный по модулю элемент. В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x_1, так как это наибольший коэффициент по модулю.

3. Определение новой свободной переменной.

Вычислим значения D_i по строкам как частное от деления: b_i / a_{i1} и из них выберем наименьшее: $\min\left(\frac{1000}{5};\frac{600}{4};\frac{150}{1}\right)=150$. Следовательно, 2-ая строка является ведущей. Разрешающий элемент равен 4 и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

Таблица 6.5

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	min
x_5	1000	5	1	0	2	1	0	0	200
x_6	600	**4**	2	2	1	0	1	0	**150**
x_7	150	1	0	2	1	0	0	1	150
F(X1)	0	**-6**	-2	-2.5	-4	0	0	0	0

Поскольку в последнем столбце присутствует несколько минимальных элементов 150, то номер строки выбираем по **правилу Креко**.

Метод Креко заключается в следующем. Элементы строк, имеющие одинаковые наименьшие значения min=150, делятся на предполагаемые разрешающие элементы, а результаты заносятся в дополнительные строки. За ведущую строку выбирается та, в которой раньше встретится наименьшее частное при чтении таблицы слева направо по столбцам.

4. Пересчет симплекс-таблицы.

Формируем следующую часть симплексной таблицы. Вместо переменной x_6 в план 1 войдет переменная x_1. Строка, соответствующая переменной x_1 в плане 1, получена в результате деления всех элементов строки x_6 плана 0 на разрешающий элемент РЭ=4.На месте разрешающего элемента в плане 1 получаем 1. В остальных клетках столбца x_1 плана 1 записываем нули. Таким образом, в новом плане 1 заполнены строка x_1 и столбец x_1. Все остальные элементы нового плана 1, включая элементы индексной строки, определяются по правилу прямоугольника. Для этого выбираем из старого плана четыре числа, которые расположены в вершинах прямоугольника и всегда включают разрешающий элемент РЭ. НЭ = СТЭ - (A*B)/РЭ, СТЭ - элемент старого плана, РЭ - разрешающий элемент (4), A и B - элементы старого плана, образующие прямоугольник с элементами СТЭ и РЭ. Представим расчет каждого элемента в виде таблицы 6.6:

Таблица 6.6

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$1000-\frac{600\cdot5}{4}=250$	$5-\frac{4\cdot5}{4}=0$	$1-\frac{2\cdot5}{4}=-1.5$	$0-\frac{2\cdot5}{4}=-2.5$	$2-\frac{1\cdot5}{4}=0.75$	$1-\frac{0\cdot5}{4}=1$	$0-\frac{1\cdot5}{4}=-1.25$	$0-\frac{0\cdot5}{4}=0$
600/4=150	4/4 = 1	2/4 = 0.5	2/4 = 0.5	1/4 = 0.25	0/4 = 0	1/4=0.25	0/4 = 0
$150-\frac{600\cdot1}{4}=0$	$1-\frac{4\cdot1}{4}=0$	$0-\frac{2\cdot1}{4}=-0.5$	$2-\frac{2\cdot1}{4}=1.5$	$1-\frac{1\cdot1}{4}=0.75$	$0-\frac{0\cdot1}{4}=0$	$0-\frac{1\cdot1}{4}=-0.25$	$1-\frac{0\cdot1}{4}=1$
$0-\frac{600(-6)}{4}=900$	$-6-\frac{4(-6)}{4}=0$	$-2-\frac{2(-6)}{4}=1$	$-2.5-\frac{2(-6)}{4}=0.5$	$-4-\frac{1(-6)}{4}=-2.5$	$0-\frac{0(-6)}{4}=0$	$0-\frac{1(-6)}{4}=1.5$	$0-\frac{0(-6)}{4}=0$

После преобразований получаем новую таблицу 6.7:

Таблица 6.7

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_5	250	0	-1.5	-2.5	0.75	1	-1.25	0
x_1	150	1	0.5	0.5	0.25	0	0.25	0
x_7	0	0	-0.5	1.5	0.75	0	-0.25	1
F(X1)	900	0	1	0.5	-2.5	0	1.5	0

Итерация №1.

1. Проверка критерия оптимальности.

Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты.

2. Определение новой базисной переменной.

В индексной строке F(x) выбираем максимальный по модулю элемент. В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x_4, так как это наибольший коэффициент по модулю.

3. Определение новой свободной переменной.

Вычислим значения D_i по строкам как частное от деления: b_i / a_{i4} и из них выберем наименьшее: $\min\left(\frac{250}{0,75};\frac{150}{0,25};\frac{0}{0,75}\right)=0$. Следовательно, 3-ая строка является ведущей. Разрешающий элемент равен (0.75) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

Таблица 6.8

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	min
x_5	250	0	-1.5	-2.5	0.75	1	-1.25	0	333.33
x_1	150	1	0.5	0.5	0.25	0	0.25	0	600
x_7	0	0	-0.5	1.5	**0.75**	0	-0.25	1	**0**
F(X2)	900	0	1	0.5	**-2.5**	0	1.5	0	0

4. Пересчет симплекс-таблицы.

Формируем следующую часть симплексной таблицы. Вместо переменной x_7 в план 2 войдет переменная x_4 Строка, соответствующая переменной x_4 в плане 2, получена в результате деления всех элементов строки x_7 плана 1 на разрешающий элемент РЭ=0.75. На месте разрешающего элемента в плане 2 получаем 1. В остальных клетках столбца x_4 плана 2 записываем нули. Таким образом, в новом плане 2 заполнены строка x_4 и столбец x_4. Все остальные элементы нового плана 2, включая элементы индексной строки, определяются по правилу прямоугольника. После преобразований получаем новую таблицу 6.9:

Таблица 6.9

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_5	250	0	-1	-4	0	1	-1	-1
x_1	150	1	0.67	0	0	0	0.33	-0.33
x_4	0	0	-0.67	2	1	0	-0.33	1.33
F(X2)	900	0	-0.67	5.5	0	0	0.67	3.33

Итерация №2.

1. Проверка критерия оптимальности.

Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты.

2. Определение новой базисной переменной.

В индексной строке F(x) выбираем максимальный по модулю элемент. В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x_2, так как это наибольший коэффициент по модулю.

3. Определение новой свободной переменной.

Вычислим значения D_i по строкам как частное от деления: b_i / a_{i2} и из них выберем наименьшее: $\min\left(-;\frac{150}{0,67};-\right)=225$. Следовательно, 2-ая строка является ведущей. Разрешающий элемент равен (0.67) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

Таблица 6.10

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	min
x_5	250	0	-1	-4	0	1	-1	-1	-
x_1	150	1	**0.67**	0	0	0	0.33	-0.33	**225**
x_4	0	0	-0.67	2	1	0	-0.33	1.33	-
F(X3)	900	0	**-0.67**	5.5	0	0	0.67	3.33	0

4. Пересчет симплекс-таблицы.

Формируем следующую часть симплексной таблицы. Вместо переменной x_1 в план 3 войдет переменная x_2. Строка, соответствующая переменной x_2 в плане 3, получена в результате деления всех элементов строки x_1 плана 2 на разрешающий элемент РЭ=0.67. На месте разрешающего элемента в плане 3 получаем 1. В остальных клетках столбца x_2 плана 3 записываем нули. Таким образом, в новом плане 3 заполнены строка x_2 и столбец x_2. Все остальные элементы нового плана 3, включая элементы индексной строки, определяются по правилу прямоугольника. После преобразований получаем новую таблицу 6.11:

Таблица 6.11

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_5	475	1.5	0	-4	0	1	-0.5	-1.5
x_2	225	1.5	1	0	0	0	0.5	-0.5
x_4	150	1	0	2	1	0	0	1
F(X3)	1050	1	0	5.5	0	0	1	3

1. Проверка критерия оптимальности.

Среди значений индексной строки нет отрицательных. Поэтому эта таблица определяет оптимальный план задачи:

$x_2 = 225$

$x_4 = 150$

$F(X) = 2 \cdot 225 + 4 \cdot 150 = 1050$.

Ответ. Оптимальным будет решение ***(0; 225; 0; 150; 475; 0; 0)*** при котором $\boldsymbol{F_{max}}$ ***=1050***, т.е. для получения наибольшей прибыли, равной ***1050*** денежных единиц, предприятие должно выпустить ***225*** единиц продукции вида $\boldsymbol{A_2}$***, 150*** единиц продукции вида $\boldsymbol{A_4}$ (продукцию вида $\boldsymbol{A_1}$ и $\boldsymbol{A_3}$ в данных условиях производить невыгодно); при этом сырье типа II и III будет использовано полностью, а ***475*** единиц сырья типа I останутся неизрасходованными.

7. Метод искусственного базиса.

Если ограничения задачи линейного программирования можно преобразовать к виду $AX \leq A_0$ при $A_0 \geq 0$, то система ограничений всегда содержит единичную матрицу. Многие задачи линейного программирования, имеющие решения, не содержат единичной матрицы и не приводятся к указанному виду. В этом случае для решения задач применяется **метод искусственного базиса.**

Рассмотрим общую задачу линейного программирования.

Найти минимальное значение линейной функции

$$F = C_1x_1 + C_2x_2 + \ + \cdots + C_nx_n$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad x_j \geq 0 \ (j = 1, \ldots, n),$$

где $b_i \geq 0$ и система ограничений не содержит единичной матрицы.

Для получения единичной матрицы к каждому равенству прибавим по одной переменной $x_{n+i} \geq 0 \ \ (i = 1, \ldots, m)$, которые назовем искусственными, и рассмотрим расширенную задачу, связанную с отысканием наименьшего значения линейной функции

$$\bar{F} = C_1x_1 + C_2x_2 + \cdots + C_nx_n + Mx_{n+1} + \cdots + +Mx_{n+m}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} \qquad\qquad = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \qquad + x_{n+2} \qquad = b_2, \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \qquad\qquad + x_{n+m} = b_m, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1, \ldots, n + m).$$

Величина M предполагается достаточно большим положительным числом, если задача решается на отыскание минимального значения линейной функции, и достаточно малым отрицательным числом, если находится максимальное значение линейной функции. Единичные векторы

$A_{n+1}, A_{n+2}, \dots, A_{n+m}$, соответствующие искусственным переменным, образуют искусственный базис.

Для отыскания оптимального плана исходной задачи используют следующую теорему.

Теорема 7.1. Если в оптимальном плане $\bar{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$ расширенной задачи искусственные переменные $x_{n+i} = 0$ $(i = 1, \dots, m)$, то план $X = = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ является оптимальным планом исходной задачи.

Доказательство. Заметим, что если план $\bar{X} -$ оптимальный план расширенной задачи, то план $X -$ план первоначальной задачи, при этом $\bar{F}(\bar{X}) = F(X)$. Равенство значений функции следует из того, что план $\bar{X}$ от плана X отличается m последними компонентами, равными нулю.

Докажем, что план $X -$ оптимальный план исходной задачи. Допустим, что X не является оптимальным планом. Тогда существует такой оптимальный план $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, для которого $F(X^*) < F(X)$. Отсюда для вектора $\bar{X}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, 0, \dots, 0)$, являющегося планом расширенной задачи, получаем

$$\bar{F}(\bar{X}^*) = F(X^*) < F(X) = \bar{F}(\bar{X}),$$

т.е.

$$\bar{F}(\bar{X}^*) < \bar{F}(\bar{X}).$$

Таким образом, план $\bar{X}$ расширенной задачи не является оптимальным, что противоречит условию теоремы.

Применение симплекс-метода к расширенной задачи обеспечивает построение плана, в котором каждое из искусственных переменных $x_{n+i} = 0$. Если первоначальная задача не обладает планами (т.е. она не совместна), то оптимальное решение расширенной задачи содержит, по крайней мере, одно $x_{n+i} > 0$.

Для отыскания оптимального плана расширенной задачи в случае, если заранее не задана величина M, применяется симплекс-метод с составлением симплексных таблиц, которые имеют на одну строку больше, чем обычная симплексная таблица. По этой (m+2)-й строке определяют вектор, подлежащий включению в базис. Итерационный процесс по (m+2)-й строке проводят для исключения из базиса всех искусственных векторов, затем процесс отыскания оптимального плана продолжают по (m+1)-й строке.

Задача 7.1. Решить задачу линейного программирования

$$\begin{cases} 3x_1+6x_2-4x_3+x_4 \le 12 \\ 4x_1-13x_2+10x_3+5x_4 \ge 6 \\ 3x_1+7x_2+x_3 \ge 1 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0$$

$$F = 2x_1+5x_2+3x_3+8x_4 \to \min$$

Решение. Для построения первого опорного плана систему неравенств приведем к системе уравнений путем введения дополнительных переменных (**переход к канонической форме**). В 1-м неравенстве вводим базисную переменную x_5. В 2-м неравенстве вводим базисную переменную x_6 со знаком минус. В 3-м неравенстве вводим базисную переменную x_7 со знаком минус: $\begin{cases} 3x_1+6x_2-4x_3+1x_4+1x_5+0x_6+0x_7=12 \\ 4x_1-13x_2+10x_3+5x_4+0x_5-1x_6+0x_7=6 \\ 3x_1+7x_2+1x_3+0x_4+0x_5+0x_6-1x_7=1 \end{cases}$.

Введем **искусственные переменные**: в 2-м равенстве вводим переменную x_8; в 3-м равенстве вводим переменную x_9.

$$\begin{cases} 3x_1+6x_2-4x_3+1x_4+1x_5+0x_6+0x_7+0x_8+0x_9=12 \\ 4x_1-13x_2+10x_3+5x_4+0x_5-1x_6+0x_7+1x_8+0x_9=6 \\ 3x_1+7x_2+1x_3+0x_4+0x_5+0x_6-1x_7+0x_8+1x_9=1 \end{cases}$$

Для постановки задачи на минимум целевую функцию запишем так:

$F(X) = 2x_1+5x_2+3x_3+8x_4+Mx_8+Mx_9 \to \min$

За использование искусственных переменных, вводимых в целевую функцию, накладывается так называемый штраф величиной M, очень большое положительное число, которое обычно не задается. Полученный базис называется искусственным, а метод решения называется методом искусственного базиса.

Причем искусственные переменные не имеют отношения к содержанию поставленной задачи, однако они позволяют построить стартовую точку, а процесс оптимизации вынуждает эти переменные принимать нулевые значения и обеспечить допустимость оптимального решения.

Из уравнений выражаем искусственные переменные:

$x_8 = 6-4x_1+13x_2-10x_3-5x_4+x_6,$

$x_9 = 1-3x_1-7x_2-x_3+x_7,$

которые подставим в целевую функцию:

$F(X) = 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 8x_4 + M(6-4x_1+13x_2-10x_3-5x_4+x_6) + M(1-3x_1-7x_2-x_3+x_7) \rightarrow \min$

или

$F(X) = (2-7M)x_1+(5+6M)x_2+(3-11M)x_3+(8-5M)x_4+(M)x_6+(M)x_7+(7M) \rightarrow \min$

Матрица коэффициентов A = a(ij) этой системы уравнений имеет вид:

3	6	-4	1	1	0	0	0	0
4	-13	10	5	0	-1	0	1	0
3	7	1	0	0	0	-1	0	1

Решим систему уравнений относительно базисных переменных: x_5, x_8, x_9.

Полагая, что **свободные переменные** равны 0, получим первый опорный план: X1 = (0,0,0,0,12,0,0,6,1).

Базисное решение называется допустимым, если оно неотрицательно.

Таблица 7.1

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_5	12	3	6	-4	1	1	0	0	0	0
x_8	6	4	-13	10	5	0	-1	0	1	0
x_9	1	3	7	1	0	0	0	-1	0	1
F(X0)	7M	-2+7M	-5-6M	-3+11M	-8+5M	0	-M	-M	0	0

Переходим к основному алгоритму симплекс-метода.

Итерация №0.

1. Проверка критерия оптимальности.

Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся положительные коэффициенты.

2. Определение новой базисной переменной.

В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x_3, так как это наибольший коэффициент .

3. Определение новой свободной переменной.

Вычислим значения D_i по строкам как частное от деления: b_i / a_{i3} и из них выберем наименьшее: $\min\left(-;\frac{6}{10};\frac{1}{1}\right)=\frac{3}{5}$. Следовательно, 2-ая строка является ведущей. Разрешающий элемент равен (10) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

Таблица 7.2

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	min
x_5	12	3	6	-4	1	1	0	0	0	0	-
x_8	6	4	-13	**10**	5	0	-1	0	1	0	$^3/_5$
x_9	1	3	7	1	0	0	0	-1	0	1	1
F(X1)	7M	-2+7M	-5-6M	**-3+11M**	-8+5M	0	-M	-M	0	0	0

4. Пересчет симплекс-таблицы.

Формируем следующую часть симплексной таблицы. Вместо переменной x_8 в план 1 войдет переменная x_3. Строка, соответствующая переменной x_3 в плане 1, получена в результате деления всех элементов строки x_8 плана 0 на разрешающий элемент РЭ=10. На месте разрешающего элемента в плане 1 получаем 1. В остальных клетках столбца x_3 плана 1 записываем нули. Таким образом, в новом плане 1 заполнены строка x_3 и столбец x_3. Все остальные элементы нового плана 1, включая элементы индексной строки, определяются по правилу прямоугольника. Получаем новую симплекс-таблицу.

Таблица 7.3

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_5	$14^2/_5$	$4^3/_5$	$^4/_5$	0	3	1	$^{-2}/_5$	0	$^2/_5$	0
x_3	$^3/_5$	$^2/_5$	$-1^3/_{10}$	1	$^1/_2$	0	$^{-1}/_{10}$	0	$^1/_{10}$	0
x_9	$^2/_5$	$2^3/_5$	$8^3/_{10}$	0	$^{-1}/_2$	0	$^1/_{10}$	-1	$^{-1}/_{10}$	1
F(X1)	$1^4/_5+^2/_5M$	$-\frac{4}{5}+2\frac{3}{5}M$	$-8\frac{9}{10}+8\frac{3}{10}M$	0	$-6\frac{1}{2}-M$	0	$-\frac{3}{10}+M$	-M	3 $\frac{3}{10}-1\frac{1}{10}M$	0

Итерация №1.

1. Проверка критерия оптимальности.

Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся положительные коэффициенты.

2. Определение новой базисной переменной.

В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x_2, так как это наибольший коэффициент .

3. Определение новой свободной переменной.

Вычислим значения D_i по строкам как частное от деления: b_i / a_{i2}

и из них выберем наименьшее: min ($14^2/_5$: $^4/_5$, - , $^2/_5$: $8^3/_{10}$) = $^4/_{83}$

Следовательно, 3-ая строка является ведущей.

Разрешающий элемент равен ($8^3/_{10}$) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

Таблица 7.4

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_5	$14^2/_5$	$4^3/_5$	$^4/_5$	0	3	1	$^{-2}/_5$	0	$^2/_5$	0
x_3	$^3/_5$	$^2/_5$	$-1^3/_{10}$	1	$^1/_2$	0	$^{-1}/_{10}$	0	$^1/_{10}$	0
x_9	$^2/_5$	$2^3/_5$	$\mathbf{8^3/_{10}}$	0	$^{-1}/_2$	0	$^1/_{10}$	-1	$^{-1}/_{10}$	**1**
F(X1)	$1^4/_5+^2/_5M$	$-\frac{4}{5}+2\frac{3}{5}M$	$\mathbf{-8\frac{9}{10}+8\frac{3}{10}M}$	0	$-6\frac{1}{2}-M$	0	$-\frac{3}{10}+M$	- M	3 $\frac{3}{10}-1\frac{1}{10}M$	0

4. Пересчет симплекс-таблицы.

Формируем следующую часть симплексной таблицы. Вместо переменной x_9 в план 2 войдет переменная x_2. Строка, соответствующая переменной x_2 в плане 2, получена в результате деления всех элементов строки x_9 плана 1 на разрешающий элемент РЭ=$8^3/_{10}$. На месте разрешающего элемента в плане 2 получаем 1.В остальных клетках столбца x_2 плана 2 записываем нули. Таким образом, в новом плане 2 заполнены строка x_2 и столбец x_2. Все остальные элементы нового плана 2, включая элементы индексной строки, определяются по правилу прямоугольника.

Получаем новую симплекс-таблицу.

Таблица 7.5

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_5	$14^{30}/_{83}$	$4^{29}/_{83}$	0	0	$3^4/_{83}$	1	$^{-34}/_{83}$	$^8/_{83}$	$^{34}/_{83}$	$^{-8}/_{83}$
x_3	$^{55}/_{83}$	$^{67}/_{83}$	0	1	$^{35}/_{83}$	0	$^{-7}/_{83}$	$^{-13}/_{83}$	$^7/_{83}$	$^{13}/_{83}$
x_2	$^4/_{83}$	$^{26}/_{83}$	1	0	$^{-5}/_{83}$	0	$^1/_{83}$	$^{-10}/_{83}$	$^{-1}/_{83}$	$^{10}/_{83}$
F(X2)	$2^{19}/_{83}$	$1^{82}/_{83}$	0	0	$-7^3/_{83}$	0	$^{-16}/_{83}$	$-1^6/_{83}$	$^{16}/_{83}$-M	$1^6/_{83}$-M

Итерация №2.

1. Проверка критерия оптимальности.

Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся положительные коэффициенты.

2. Определение новой базисной переменной.

В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x_1, так как это наибольший коэффициент.

3. Определение новой свободной переменной.

Вычислим значения D_i по строкам как частное от деления: b_i / a_{i1} и из них выберем наименьшее: min $(14^{30}/_{83} : 4^{29}/_{83}, {}^{55}/_{83} : {}^{67}/_{83}, {}^{4}/_{83} : {}^{26}/_{83}) = {}^{166}/_{1079}$. Следовательно, 3-ая строка является ведущей. Разрешающий элемент равен $({}^{26}/_{83})$ и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

Таблица 7.6

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	min
x_5	$14^{30}/_{83}$	$4^{29}/_{83}$	0	0	$3^{4}/_{83}$	1	${}^{-34}/_{83}$	${}^{8}/_{83}$	${}^{34}/_{83}$	${}^{-8}/_{83}$	$3\frac{9047}{29963}$
x_3	${}^{55}/_{83}$	${}^{67}/_{83}$	0	1	${}^{35}/_{83}$	0	${}^{-7}/_{83}$	${}^{-13}/_{83}$	${}^{7}/_{83}$	${}^{13}/_{83}$	$\frac{4565}{5561}$
x_2	${}^{4}/_{83}$	$\mathbf{{}^{26}/_{83}}$	1	0	${}^{-5}/_{83}$	0	${}^{1}/_{83}$	${}^{-10}/_{83}$	${}^{-1}/_{83}$	${}^{10}/_{83}$	$\frac{166}{1079}$
F(X3)	$2^{19}/_{83}$	$\mathbf{1^{82}/_{83}}$	0	0	$-7^{3}/_{83}$	0	${}^{-16}/_{83}$	$-1^{6}/_{83}$	${}^{16}/_{83}$-M	$1^{6}/_{83}$-M	0

4. Пересчет симплекс-таблицы.

Формируем следующую часть симплексной таблицы. Вместо переменной x_2 в план 3 войдет переменная x_1. Строка, соответствующая переменной x_1 в плане 3, получена в результате деления всех элементов строки x_2 плана 2 на разрешающий элемент РЭ=${}^{26}/_{8}$. На месте разрешающего элемента в плане 3 получаем 1.В остальных клетках столбца x_1 плана 3 записываем нули.Таким образом, в новом плане 3 заполнены строка x_1 и столбец x_1. Все остальные элементы нового плана 3, включая элементы индексной строки, определяются по правилу прямоугольника.

Получаем новую симплекс-таблицу.

Таблица 7.7

Базис	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_5	$13^9/_{13}$	0	$-13\frac{1909}{2158}$	0	$3^{23}/_{26}$	1	$^{-15}/_{26}$	$1^{10}/_{13}$	$^{15}/_{26}$	$-1^{10}/_{13}$
x_3	$^7/_{13}$	0	$-2\frac{1245}{2158}$	1	$^{15}/_{26}$	0	$^{-3}/_{26}$	$^{13778}/_{89557}$	$^3/_{26}$	$^{-13778}/_{89557}$
x_1	$^{166}/_{1079}$	1	$3^5/_{26}$	0	$-\frac{415}{2158}$	0	$^1/_{26}$	$^{-5}/_{13}$	$^{-1}/_{26}$	$^5/_{13}$
F(X3)	$1^{12}/_{13}$	0	$-6\frac{747}{2158}$	0	$-6^{17}/_{26}$	0	$^{-7}/_{26}$	$^{-4}/_{13}$	$^7/_{26}$-M	$^4/_{13}$-M

1. Проверка критерия оптимальности. Среди значений индексной строки нет положительных. Поэтому эта таблица определяет оптимальный план задачи. Так как в оптимальном решении отсутствуют искусственные переменные (они равны нулю), то данное решение является допустимым. Оптимальный план можно записать так:

$x_3 = {}^7/_{13}$

$x_1 = {}^{166}/_{1079}$

$$F(X) = 3\cdot\frac{7}{13} + 2\cdot\frac{166}{1079} = 1\frac{12}{13}.$$